Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 11.01.2002 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 13.5 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 29 & -16 & -8 \\ 28.25 & -14 & -9 \\ 30.25 & -19 & -6 \end{pmatrix}$$

haben beide den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

a) Berechnen Sie nach der Potenzmethode für beide Matrizen Approximationen x_A, λ_A bzw. x_B, λ_B für λ_1 und einen dazugehörigen Eigenvektor x_1, so daß für die Defekte

$$\begin{aligned} d_A &= Ax_A - \lambda_A x_A \quad , \quad d_B = Bx_B - \lambda_B x_B \qquad \text{gilt :} \\ \varepsilon_A &= \frac{\|d_A\|}{\|x_A\|_2} \leq 0.1 \quad , \quad \varepsilon_B = \frac{\|d_B\|_2}{\|x_B\|_2} \leq 0.1 \qquad . \end{aligned}$$

b) Vergleichen Sie die Verhältnisse

$$|\lambda_1 - \lambda_A|/\varepsilon_A \quad , \quad |\lambda_1 - \lambda_B|/\varepsilon_B$$

und erklären Sie das Resultat mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 4.5.

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grade n und sei $P(\lambda_0) = 0$. Zeigen Sie:

$$|\lambda_0| \leq \max_{i=0,\ldots,n-1} |a_i| + 1 \, .$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Was kann man durch Anwendung des Satzes von Gerschgorin über die Lage der Eigenwerte der folgenden Matrix sagen?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

<u>Hinweis:</u> Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auch auf die transponierte Matrix an.

Aufgabe 40: (4 Punkte)
Sei A eine hermitesche Matrix. A heißt positiv definit, wenn $x^*Ax > 0$ ist für $x \neq 0$. Man zeige:

a) A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

b) Die (n, n)-Matrix A sei positiv definit und für $m \leq n$ sei $\{i_1, \ldots, i_n\}$ eine m-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$. Dann ist auch die (m, m)-Matrix mit den Elementen

$$\left(a_{i_\nu i_\mu}\right)_{\nu,\mu=1,\ldots,m}$$

positiv definit.

c) Eine positiv definite Matrix besitzt eine LR-Zerlegung.

Wir wünschen allen Studierenden ein

FROHES WEIHNACHTSFEST

und ein

GUTES NEUES JAHR 2002