Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 14 , Abgabe: 08.02.2002 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Aufgabe 53: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die zusammengesetzte Trapezregel bei Aufteilung in n Teilintervalle die trigonometrischen Polynome vom Grade $< n$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ exakt integriert.

Aufgabe 54: (4 Punkte)
Die (zusammengesetzte) Mittelpunktsregel lautet:

$$M_h = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}) \ , \quad x_k = a + kh \ , \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Zeigen Sie: Ist $f \in C^2[a, b]$, so gilt

$$|M_h - I| \leq \frac{b-a}{24} \, h^2 \max_{[a,b]} |f''(x)| \ .$$

Aufgabe 55: (4 Punkte)
Sei $f \in C^{2p+2}[a, b]$. Sei M_h die Mittelpunktsregel aus Aufgabe 54.

Man kann zeigen: Es gibt Konstanten $c_1, \ldots, c_p$ unabhängig von h, so daß

$$M_h = \int_a^b f dx + c_1 h^2 + \ldots + c_p h^{2p} + O(h^{2p+2}) \ .$$

Leiten Sie daraus ein Verfahren zur Romberg-Integration her, das auf Dreiteilung des Intervalls beruht.

Aufgabe 56: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die vier Parameter (a_0, a_1, b_0, b_1) so, daß die Formel

$$\int_0^h y(x) dx = h(a_0 y(0) + a_1 y(h)) + h^2(b_0 y'(0) + b_1 y'(h))$$

für $y \in \{1, x, x^2, x^3\}$ exakt ist.

Läßt sich die Genauigkeit durch Änderung der Auswertstellen 0 und h erhöhen?