Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 3 , Abgabe: 09.11.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Die Programmieraufgabe 12 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Bestimmen Sie von Hand die Cholesky-Zerlegung von A und lösen Sie $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Die (n,n)-Matrix A besitze eine LR-Zerlegung $A = LR$ mit $\ell_{ii} = 1,\ i = 1,\dots,n$.

Zeigen Sie:

(a) L, R mit dieser Eigenschaft sind eindeutig bestimmt, falls A nicht singulär ist.

(b) Ist A nicht singulär und von Bandbreite m (d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > m$), so gilt dies auch für L und R.

(c) Hat A obere Hessenberg-Form (d.h. $a_{ij} = 0$ für $i - j > 1$), und ist A nicht singulär, so kann man die LR-Zerlegung in $\frac{1}{2}n^2 + O(n)$ flops herstellen.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Sei T eine reelle, symmetrische (n,n) Tridiagonalmatrix mit positiven Außerdiagonalelementen. Sei $(u^\ell)_{\ell=1,2,\dots}$ eine Folge von Vektoren mit

$$u^{\ell+1} = Tu^\ell \,, \quad u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen sie, daß T durch die Zahlen $g_\ell = u_1^\ell,\ \ell = 1,\dots,2n-1$, bis auf das $(n,n)-$Element, eindeutig bestimmt ist und geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung von T an.
Hinweis: Betrachten Sie die $(n,n)-$Matrix $U = (u^1,\dots,u^n)$ und zeigen Sie, daß man U durch Cholesky - Zerlegung einer geeigneten, aus den g_ℓ gebildeten Matrix G erhält.

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe) Schreiben Sie ein Programm choldcmp (A, d, n) zur Cholesky - Zerlegung LL^T der reellen positiv definiten $(n,n)-$Matrix A . Nur der Platz in und oberhalb der Diagonalen von A muß besetzt werden. L findet sich unterhalb der Hauptdiagonalen und in d.

Testen Sie Ihr Programm an der Hilbert-Matrix aus Aufgabe 4(a) mit $n = 4$.