Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: 30.11.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Die Programmieraufgabe 24 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $f(\overline{x}) = 0$, $f'(\overline{x})$ invertierbar.

Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung D von $\overline{x}$, so daß das vereinfachte Newton-Verfahren für jedes $x^0 \in D$ gegen $\overline{x}$ konvergiert.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Sei A eine $(n, n)-$Matrix. Das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$Ax - \lambda x = 0 \;, \qquad \|x\|_2^2 - 1 = 0$$

von $n + 1$ Gleichungen in den $n + 1$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, λ.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix dieses Gleichungssystems und stellen Sie das Newton-Verfahren auf.

(b) Zeigen Sie: Ist λ ein algebraisch einfacher Eigenwert von A und sind die Startwerte λ^0, x^0 hinreichend nahe bei λ, x gewählt, so konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch gegen λ, x.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Stellen Sie das Newton-Verfahren für $f(x) = \frac{1}{x} - a$ auf und zeigen Sie, daß es für $|1 - ax_0| < 1$ konvergiert.

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Schreiben Sie ein Programm für das Newton-Verfahren für das System

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

und testen Sie es für das Problem

$$\begin{aligned} x_1 - \sin(x_2 + e^{x_1}) &= 0 \\ x_2 - \cos(x_1 - e^{x_2}) &= 0 \;. \end{aligned}$$