

**Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik**

Übungsblatt 7 , Abgabe: 07.12.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

**Die Programmieraufgabe 28 darf eine Woche später abgegeben werden.****Aufgabe 25:** (4 Punkte)Die Inversion der  $(n, n)$ -Matrix  $A$  ist gleichbedeutend mit der Lösung des nichtlinearen Systems

$$F(X) = X^{-1} - A = 0 .$$

Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von  $F(X) = 0$  auf und zeigen Sie, daß ein Schritt des Newton - Verfahrens durch zwei Matrix - Multiplikationen und weitere  $n$  Additionen ausgeführt werden kann.**Aufgabe 26:** (4 Punkte)Sei  $A$  eine positiv definite  $(n, n)$ -Matrix. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte positiv definite Quadratwurzel  $X = \sqrt{A}$  von  $A$ , d.h.  $X$  ist positiv definit und  $X^2 = A$ .Zeigen Sie: Das Newton-Verfahren für das nichtlineare System  $X^2 = A$  von  $n(n + 1)/2$  Unbekannten in  $n(n + 1)/2$  Variablen  $x_{ij}$ ,  $i > j$ , lautet

$$X^{k+1} = \frac{1}{2} \left( X^k + (X^k)^{-1} A \right) .$$

**Tip:** Die zu berechnende Matrix  $X$  ist offenbar invertierbar und kommutiert mit  $A$ . Gehen Sie deshalb von Startmatrizen  $X^{(0)}$  aus, die neben der Symmetrie ebenfalls diese Eigenschaften haben.**Aufgabe 27:** (4 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Man zeige für das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren: Das Verfahren zur Lösung von  $Ax = b$  konvergiert genau dann für alle  $b$  und alle Startwerte  $x_0$ , wenn  $|a| < 2$ .**Aufgabe 28:** (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem ( $n = 10$ )

$$4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 ; \quad i, j = 1, \dots, n-1, \quad h = 1/n$$

$$u_{ij} = 0 \quad \text{falls } i \in \{0, n\} \quad \text{oder } j \in \{0, n\}$$

durch das SOR-Verfahren mit  $\omega = 1$  und  $\omega = 1.53$ .