Numerische Analysis

Übungsblatt 1, Abgabe Do. 21.04.16, 12:00 Uhr

---

**Aufgabe 1: Polynome** **4 P.**

Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien die Polynome $E_k$ rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1 \\ E_{k+1}(x) &= x(E_k'(x)(1-x) + (k+1)E_k(x)). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $E_0, \dots, E_n$ bilden eine Basis von $P_n$.

(b) Zeigen Sie: Für $|x| < 1$ gilt:

$$R_k(x) = E_k(x)(1-x)^{-k-1}$$

für $R_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$ (Hinweis: Vollständige Induktion nach $k$).

**Aufgabe 2: Čebyšev-Polynome zweiter Art** **4 P.**

Zeigen Sie:

(a) $|U_n(x)| \leq U_n(1) = n+1$ für $-1 \leq x \leq 1$ (Hinweis: Setzen Sie $\varphi_n(t) := U_n(x)$ für $t = \arccos x$ und zeigen Sie die Behauptung für $\varphi_n$).

(b) $U_n$, $n \geq 1$, hat die n einfachen, im Intervall $(-1, 1)$ liegenden Nullstellen

$$x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),$$

$k = 1, \dots, n$.

(c) Die Nullstellen von $U_n$ trennen die von $U_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$.

**Aufgabe 3: Clenshaw-Algorithmus** **4 P.**

Betrachten Sie das Polynom $p(x) = 16x^6 - 24x^5 + 8x^3 - 24x + 48$.

(a) Drücken Sie p als Linearkombination von Čebyšev-Polynomen

  (i) erster Art

  (ii) zweiter Art

aus.

(b) Berechnen Sie $p(\frac{1}{2})$ mit Hilfe des Clenshaw-Algorithmus.

(c) Der Clenshaw-Algorithmus basiert auf Auswertungen der Čebyšev-Polynome erster Art. Schreiben Sie einen entsprechenden Algorithmus, der Auswertungen der Čebyšev-Polynome zweiter Art verwendet, d.h. zur Berechung von

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i U_i(x)$$

.

**Aufgabe 4: Programmieraufgabe** **4 P.**

(a) Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

in Monomdarstellung auswerten kann. Ihre Funktion sollte als Eingabewerte die Koeffizienten $(a_0, \ldots, a_n)$ erhalten sowie einen Punkt $x$, an dem das Polynom ausgewertet werden soll. Anschließend soll das Polynom auf dem Intervall $I = [0, 2]$ geplottet sowie der Punkt $(x, p(x))$ markiert werden. Rückgabewert der Funktion soll die Polynomauswertung $p(x)$ sein. Testen Sie Ihr Programm am Beispiel des Polynoms aus Aufgabe 3 (b).

(b) Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die wie in (a) die Koeffizienten $(a_0, \ldots, a_n)$ erhält und die Koeffizienten der ersten Ableitung des Polynoms zurückgibt. Zusätzlich soll die Funktion sowohl das Polynom selbst als auch die Ableitung auf dem Intervall $I = [0, 2]$ in einem Bild plotten. Testen Sie Ihr Programm am Beispiel des Polynoms

$$p(x) = -1 - \frac{1}{2}x + x^2.$$