Numerische Analysis

Übungsblatt 4, Abgabe Do. 12.05.16, 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Trigonometrische Interpolation **4 P.**

Seien $x_0, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{R}$ gegeben durch $x_k = \frac{2\pi k}{2n+1}$ für $k = 0, \ldots, 2n$. Zeigen Sie: Zu gegebenen Stützwerten $y_0, \ldots, y_{2n} \in \mathbb{C}$ existiert genau eine Funktion

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(jt)$$

mit $g(x_k) = y_k$, $k = 0, \ldots, 2n$. Drücken Sie die Koeffizienten a_j und b_j durch die diskrete Fouriertransformation von $y_0, ..., y_{2n}$ aus.

Aufgabe 2: Faltungssatz **4 P.**

Zeigen Sie:

(a) $(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

(b) $(f \cdot g)\hat{} = \frac{1}{n+1} \hat{f} * \hat{g}$

Hierbei bezeichnet $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von f, $f \cdot g$ das Hadamardprodukt sowie $f * g$ das Faltungsprodukt von f und g wie in der Vorlesung definiert.

Aufgabe 3: FFT **4 P.**

Geben Sie den Algorithmus für die schnelle Fouriertransformation (lesen Sie dazu die relevanten Seiten im Vorlesungsskript) eines Vektors $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)^T$ im Fall $n = 3$, $p = 1$ und $q = 1$ explizit an, und machen Sie sich seine Funktionsweise bewusst. Wie viel Aufwand lässt sich hierbei gegenüber der diskreten Fouriertransformation sparen?

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass Bilder mit Hilfe einer Faltung geglättet werden können. Dies kann man nutzen, um verrauschte Bilder (d.h. Bilder, die „fehlerhafte“ Pixel enthalten) zu entrauschen. Lesen Sie dazu ein Bild ein durch

```
image = im2double(rgb2gray(imread('peppers.png')));
```

und fügen Sie dann dem Bild künstlich Rauschen hinzu mit Hilfe des Befehls

```
imageNoisy = image + 0.05*randn(size(image));
```

Anschließend soll das Bild wie in der Vorlesung durch eine Faltung geglättet werden. Testen Sie hierbei verschiedene Breiten der Gauss-Kurve (Werte für `n` aus der Vorlesung). Plotten Sie jeweils das ursprüngliche Bild, das verrauschte Bild und das geglättete Bild nebeneinander und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Original.