

Numerische Analysis

Übungsblatt 5, Abgabe **Mi. 25.05.16, 18:00 Uhr****Aufgabe 1: Satz von Rolle****4 P.**

Sei $f \in C^k([a, b])$. Zeigen Sie: Hat $f^{(k)}$ auf dem Intervall $[a, b]$ Nullstellen mit Gesamtvielfachheit N , so hat f in $[a, b]$ Nullstellen mit einer Gesamtvielfachheit von höchstens $N + k$. (Intervalle, auf denen f verschwindet, werden als k -fache Nullstelle gezählt.)

Aufgabe 2: B-Splines**4 P.**

- (a) Zeigen Sie: Der in der Vorlesung definierte B-Spline $B_{l,m}$ ist ein Spline vom Grad $m - l - 1$.
- (b) Skizzieren Sie für $m - l - 1 = 0, 1, 2$ und äquidistante Knoten $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, m$, $h > 0$, den Verlauf der zugehörigen B-Splines.

Aufgabe 3: Spline-Interpolation**4 P.**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4$ auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$. Finden Sie einen kubischen Spline S , der die Funktion f an den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ interpoliert und zusätzlich die Bedingungen $S'(-1) = f'(-1)$ sowie $S'(1) = f'(1)$ erfüllt. Fertigen Sie eine Skizze von S an.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe**4 P.**

Gegeben seien die Funktion f und Stützstellen $0 = x_0 < \dots < x_n = 1$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Sei $\Delta := \{x_0, \dots, x_n\}$ die Menge aller Stützstellen und S der lineare interpolierende Spline. Zusätzlich sei eine weitere Unterteilung der Stützstellen gegeben durch $\Delta_k := \Delta \cup \{x_i + r(x_{i+1} - x_i)/k \mid i = 0, \dots, n-1, r = 1, \dots, k-1\}$. Wir definieren den Fehler der Interpolation durch

$$e_k := \max_{x \in \Delta_k} |f(x) - S(x)|.$$

- (a) Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die als Eingabeparameter die Funktion f , die Stützstellen Δ sowie den Grad der weiteren Unterteilung k erhält und den Fehler der Interpolation zurückgibt.
- (b) Testen Sie Ihre Funktion für $f(x) = \sqrt{x}$ sowie für $f(x) = x^3 + x^2 + x$ mit $k = 10$, Stützstellen $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$ für $n = 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127$. Plotten Sie dabei den Fehler mit $\log(n)$ auf der x-Achse und $\log(e_k)$ auf der y-Achse (verwenden Sie die Matlab-Funktion `loglog`).