

Numerische Analysis

Übungsblatt 7, Abgabe Do. 09.06.16, 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Newton-Cotes-Formeln**4 P.**

Bestimmen Sie eine Approximation des Integrals $I(f) = \int_1^3 \frac{x}{x+2} dx$ mit Hilfe der

- (a) Mittelpunkregel
- (b) Trapezregel
- (c) Simpsonregel

und berechnen Sie jeweils den Interpolationsfehler. Vergleichen Sie diesen mit der Fehler-schranke aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: Gauß-Quadratur für gewichtete Integrale**4 P.**

Leiten Sie die Gauß-Quadraturformel zur Approximation des gewichteten Integrals $I(f) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx$ analog zur Vorlesung her. Zeigen Sie, dass die Formel exakt ist vom Grad $2n + 1$ bei $n + 1$ Stützstellen.

Aufgabe 3: Interpolationsfehler**4 P.**

Sei $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ und $I_0(f) = (b - a)f(\frac{a+b}{2})$ die Mittelpunkregel auf dem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie:

- (a) Falls $f \in C^1([a, b])$, so gilt: $|I(f) - I_0(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.
- (b) Falls $f \in C^2([a, b])$, so gilt: $|I(f) - I_0(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe**4 P.**

Schreiben Sie ein Programm, das eine gegebene Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe der Newton-Cotes-Formeln mit $n = 1, 2, 3, 4$ äquidistanten Stützstellen integriert. Das Programm soll als Eingabewerte die Funktion f als *function handle*, die Intervallgrenzen a und b sowie die Anzahl an Stützstellen n erhalten. Das Programm soll sowohl offene als auch geschlossene Newton-Cotes-Formeln anwenden können. Testen Sie Ihr Programm an folgenden Beispielen:

- (a) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ auf dem Intervall $[1, 3]$ (Beispiel aus Aufgabe 1)
- (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf dem Intervall $[0, 2]$ (verwenden Sie hier die offenen Formeln)
- (c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf dem Intervall $[-3, 3]$