Numerische Analysis

Übungsblatt 8, Abgabe Do. 16.06.16, 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Monosplines **4 P.**

Zeigen Sie:

(a) Der Monospline $M_{k,n}$ verschwindet außerhalb von $[a,b]$, d.h. $M_{k,n} = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [a,b]$.

(b) Ist $x_0 = a$, so hat $M_{k,n}$ in $t = a$ eine k-fache Nullstelle. Ist $x_0 > a$, so hat $M_{k,n}$ in $t = a$ eine (k+1)-fache Nullstelle.

(c) Ist $x_n = b$, so hat $M_{k,n}$ in $t = b$ eine k-fache Nullstelle. Ist $x_n < b$, so hat $M_{k,n}$ in $t = b$ eine (k+1)-fache Nullstelle.

Aufgabe 2: Quadraturfehler **4 P.**

Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x+2)$, $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$. Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der Gauß-Formel, der mindestens notwendig ist, um $I(f)$ mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2}10^{-10}$ zu approximieren.

Aufgabe 3: Romberg-Integration **4 P.**

Es gilt: $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$. Approximieren Sie das Integral mit Hilfe der Romberg-Integration, indem Sie die zusammengesetzte Trapezregel für $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$ und $h = \frac{1}{8}$ anwenden und daraus eine bessere Approximation mit Hilfe der Richardson-Extrapolation berechnen.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Die zusammengesetzte Trapezregel zur Approximation eines Integrals $\int_a^b f(x)dx$ für $f \in C([a,b])$ und $N = \frac{b-a}{h}$ lautet

$$I_1^N(f) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih)\right) =: g(h).$$

Sei $h_k := (b-a)2^{-k}$ für $k = 0, \ldots, m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie ein Programm zur Approximation von $g(0)$ mit Hilfe der Romberg-Integration, welches $g(h_k)$ für $k = 0, \ldots, m$ berechnet und daraus mittels Richardson-Extrapolation eine bessere Näherung bestimmt. Ihr Programm soll eine Funktion f, die Intervallgrenzen a und b sowie die maximale Verfeinerungsstufe m erhalten und den Wert der Romberg-Approximation zurückgeben. Testen Sie Ihr Programm am Beispiel aus Aufgabe 3.