Numerische Analysis

Übungsblatt 9, Abgabe Do. 23.06.16, 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Numerische Differentiation **4 P.**

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Geben Sie ein Verfahren mit möglichst hoher Ordnung an, das $f'(0)$ mit Hilfe der Funktionswerte von f an den Stellen $-2h, -h, 0, h, 2h$ approximiert.

Aufgabe 2: Anfangswertprobleme **4 P.**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = t^2 + 2,\ y(0) = 0$

(b) $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2},\ y(0) = 0$ (Hinweis: Teilen Sie durch die rechte Seite der Differentialgleichung und schreiben Sie das Ergebnis als Ableitung einer Funktion $f(y(t))$.)

(c) $y'(t) = ty(t) + 1,\ y(0) = 1$ (Hinweis: Betrachten Sie das Lemma von Gronwall.)

Aufgabe 3: Satz von Picard-Lindelöf **4 P.**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 1 + y(t)^2,\ y(0) = 0$$

auf $I = [0, \varepsilon]$, $B = (-\delta, \delta)$. Bestimmen Sie δ und ε so, dass das Anfangswertproblem garantiert auf I eine Lösung besitzt. Wie muss man δ wählen, sodass ε möglichst groß gewählt werden kann?

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lassen sich die Ableitungen analog zum eindimensionalen Fall mit Hilfe des Vorwärtsdifferenzenquotienten approximieren:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h}$$

Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Approximation der ersten Ableitung auf dem Gebiet $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Ihr Programm soll eine Funktion u einlesen und zunächst eine Diskretisierung I_n des Intervalls $I = [0,1]$ in $n+1$ äquidistante Punkte $0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ vornehmen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Vorwärtsdifferenzenquotienten numerisch die Ableitung von u in den Punkten $(x_0, x_0), (x_0, x_1), \ldots, (x_0, x_{n-1}), \ldots, (x_{n-1}, x_{n-1})$. Plotten Sie anschließend die Funktion u sowie die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Testen Sie Ihr Programm am Beispiel $u(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ mit $n = 100$.