

Numerische Analysis

Übungsblatt 11, Abgabe Do. 07.07.16, 12:00 Uhr (Bonusblatt)

Aufgabe 1: Lineare Mehrschrittverfahren**4 P.***Gegeben sei ein Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$.

- (a) Zeigen Sie, dass das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = h(4f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 2f(t_k, y_k))$$

die Konsistenzordnung 3 hat. Ist das Verfahren nullstabil?

- (b) Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$y_{k+3} - y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = 0$$

konsistent ist, obwohl es nicht von der Differentialgleichung abhängt!

Aufgabe 2: Begleitmatrix eines Polynoms**4 P.***

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

- (a) Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n$.
 (b) Die Dimension des Eigenraums zu jedem Eigenwert von A ist 1.

Aufgabe 3: Wurzelbedingung von Dahlquist**4 P.***

Zeigen Sie den fehlenden Teil im Beweis der Wurzelbedingung von Dahlquist: Sei

$$\delta_l \leq 2M\|F\|_\infty(m + h(l+1)) + 2hML \sum_{k=0}^{l-1} \delta_k,$$

dann folgt mittels vollständiger Induktion

$$\delta_l \leq 2M(m + b - a)e^{lh2ML}\|F\|_\infty.$$

Aufgabe 4: Programmieraufgabe

4 P.*

Schreiben Sie eine Funktion in Matlab zur Lösung eines Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(a) = y_0$ auf $I = [a, b]$ mit Hilfe expliziter linearer Mehrschrittverfahren. Das Programm soll eine Funktion f sowie Vektoren $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)^T$, $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)^T$ einlesen und für eine gegebene Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ eine Näherungslösung berechnen. Dabei sollen zunächst die Anfangswerte y_1, \dots, y_{m-1} mit Hilfe des expliziten Eulerverfahrens berechnet werden. Testen Sie das Programm an dem Verfahren aus Aufgabe 1(a) für das Anfangswertproblem $y'(t) = y(t)$, $y(0) = 1$ auf $I = [0, 5]$.

* Punkte zählen als Bonuspunkte, werden also nicht mit zu den maximal erreichbaren Punkten gezählt.