Numerische Analysis
Probeklausur

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Geburtsdatum: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Übungsgruppenleiter: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Max. Punktzahl	15	15	10	10	12	8	15	15	100
Bearbeitet									
Erreichte Punkte									

Diese Probeklausur ist als Vorbereitung auf die richtige Klausur gedacht, welche vom Aufbau und Schwierigkeitsgrad ähnlich sein wird. Die vorgesehene Klausurzeit beträgt drei (volle) Stunden, es sind keine zusätzlichen Hilfsmittel erlaubt. Um Ihren eigenen Wissensstand zu prüfen, suchen Sie sich einen ruhigen Ort, nehmen sich drei Stunden Zeit und rechnen die Klausur durch, natürlich möglichst ohne das Vorlesungsskript zu Rate zu ziehen. Die Klausur ist mit einem Ergebnis von 50 Punkten sicher bestanden!

Aufgabe 1: Čebyšev-Polynome **3+6+6 P.**

Gegeben sei das Polynom $p(x) = 48x^4 - 16x^3 - 36x^2 + 10x$.

(a) Geben Sie die rekursive Definition der Čebyšev-Polynome erster Art an.

(b) Drücken Sie p als Linearkombination von Čebyšev-Polynomen erster Art aus.

(c) Bestimmen Sie $p(1)$ mit Hilfe des Clenshaw-Algorithmus.

Aufgabe 2: Hermite-Interpolation **8+7 P.**

(a) Bestimmen Sie das eindeutige Polynom $p \in P_4$ in Monom-Darstellung, welches die Bedingungen

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 3, \quad p''(1) = -6, \quad p(3) = -5, \quad p'(3) = 7$$

erfüllt.

(b) Werten Sie das Polynom mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 4$ aus.

Aufgabe 3: Diskrete Fouriertransformation **4+6 P.**

(a) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation des Vektors $y = (0, 2, -1, 0)^T$.

(b) Die Sinustransformation eines Vektors $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})^T$ ist definiert durch

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin\left(\frac{\pi(j+1)(k+1)}{n+1}\right), \; k = 0, \ldots, n-1.$$

Zeigen Sie: Die Sinustransformation ist invertierbar. Geben Sie eine Formel für die inverse Sinustransformation an. Hinweis: Die Sinustransformation ist bis auf einen konstanten Faktor äquivalent zur diskreten Fouriertransformation einer periodischen Fortsetzung $\tilde{y}$ von y definiert durch $\tilde{y} = (y_{-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n, \ldots, y_{2n})^T$ mit

$$\begin{aligned} y_{-1} &= 0 \\ y_j &= -y_{2n-j} \;\forall\; k = 0, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Gauß-Quadratur **5+5 P.**

(a) Bestimmen Sie die Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit der Gewichtsfunktion $w(x) = 1 - x^2$.

(b) Verwenden Sie die Quadraturformel aus (a), um das Integral der Funktion $f(x) = e^x$ (mit obiger Gewichtsfunktion) auf dem Intervall $[-1, 1]$ zu approximieren.

Aufgabe 5: Romberg-Integration **5+7 P.**

Sei $I(f) = \int_0^1 \sin(\pi x) dx$.

(a) Berechnen Sie eine Approximation des Integrals mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel für $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{4}$.

(b) Verwenden Sie die Näherungen aus (a), um mit Hilfe der Romberg-Integration eine bessere Approximation von $I(f)$ zu erhalten.

Aufgabe 6: Diskretes Lemma von Gronwall **8 P.**

Seien $\alpha_k, \beta_k, u_k \geq 0$ reelle Folgen mit $u_{k+1} - u_k \leq \alpha_k + \beta_k u_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$u_k \leq u_0 \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \exp\left(\sum_{j=i+1}^{k-1} \beta_j\right).$$

Aufgabe 7: Mehrschrittverfahren **5+5+5 P.**

Gegeben sei das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} - (1-\alpha)y_{k+1} - \alpha y_k = h(\beta f(t_k, y_k) + (1-\beta) f(t_{k+1}, y_{k+1})).$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das Verfahren konsistent?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Verfahren nullstabil?

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass Sie maximale Konvergenzordnung erhalten.

Aufgabe 8: A-Stabilität **8+7 P.**

(a) Zeigen Sie: Für ein explizites m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das Anfangswertproblem $y'(t) = \lambda y(t)$ existiert ein Polynom $R \in P_m$ mit $y_{k+1} = R(\lambda h) y_k$.

(b) Prüfen Sie, ob das lineare 2-Schritt-Verfahren

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = h(4f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 2f(t_k, y_k))$$

A-stabil ist.