

Numerische Lineare Algebra

Anwesenheitsblatt, keine Abgabe

Aufgabe 1: Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ die induzierte Norm. Für zwei Vektoren $x, y \in V$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Zeigen Sie, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

Hinweis: Zeigen Sie, dass Gleichheit bei Cauchy-Schwarz gleichbedeutend ist mit $0 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle$ für ein bestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Induzierte Norm

Die Betragssummennorm auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n ist definiert durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

die Spaltensummennorm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ durch

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

Zeigen Sie, dass die Spaltensummennorm von der Betragssummennorm induziert wird, d.h.

$$\|A\|_1 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch Abschätzungen, dass $\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$, und finden Sie dann ein Beispiel für Gleichheit!