Prof. Dr. B. Wirth, M. Sc. C. Roßmanith, WS 15/16

Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 1, Abgabe Do. 29.10.15, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Banachräume und Operatornormen **4 P.**

Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$. Für $p\,(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\|p\| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{P}$ ist ein normierter Raum. Ist $\mathcal{P}$ auch ein Banachraum? Hinweis: Betrachten Sie die Exponentialfunktion $f\,(t) = e^t$.

(b) Zeigen Sie für die folgenden Operatoren, dass $T \in L\,(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ bzw. $T \in L\,(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ und bestimmen Sie die jeweilige Operatornorm:

(i) $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P},\ T\,(p)\,(t) := \int_0^t p\,(s)\,ds$

(ii) $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ T\,(p) := p'\,(0)$

Hinweis zum Bestimmen der Operatornorm: Schätzen Sie zunächst die Operatornorm nach oben ab und betrachten Sie dann bei (i) das Polynom $p(t) = a_0$ und bei (ii) das Polynom $p(t) = a_1 t$.

Aufgabe 2: Induzierte Norm **4 P.**

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Die von dieser Norm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ ist gegeben durch

$$\|A\|_M := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|A\|_M < 1$, so ist die Matrix $I + A$ invertierbar.

(b) Unter obigen Voraussetzungen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + \|A\|_M} \leq \|(I + A)^{-1}\|_M \leq \frac{1}{1 - \|A\|_M}$$

Aufgabe 3: Orthogonale Vektoren und Matrizen **4 P.**

(a) Gegeben seien Vektoren $v_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)^T$ und $x = (1, 3, 5, 3)^T$.

(i) Finden Sie Vektoren v_3 und v_4, sodass v_1, v_2, v_3, v_4 orthogonal zueinander sind, d.h. dass $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$, wobei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ gemeint ist.

(ii) Stellen Sie x als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 dar.

(b) Eine *Hadamard-Matrix* ist eine Matrix mit Einträgen aus $\{-1, 1\}$, für die gilt, dass $A^T = cA^{-1}$ mit einer Konstanten c. Man kann zeigen, dass für eine $m \times m$-Hadamard-Matrix mit $m > 2$ gelten muss, dass m ein Vielfaches von 4 ist.

Zeigen Sie: Durch die Rekursionsvorschrift

$$H_0 = 1, \; H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

wird eine Hadamard-Matrix der Dimension $m = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, definiert.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Definieren Sie in Matlab eine $m \times m$-Zufallsmatrix, deren Einträge zufälligen Stichproben einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $m^{-\frac{1}{2}}$ entsprechen:

```
A = randn(m,m)/sqrt(m);
```

(a) Wie sehen die Eigenwerte von Zufallsmatrizen aus? Definieren Sie 100 verschiedene Zufallsmatrizen und plotten Sie alle (komplexwertigen) Eigenwerte in einer Graphik - welches Muster ergibt sich für verschiedene Dimensionen $m = 8, 16, 32, 64, \ldots$? Was passiert mit dem Spektralradius $\rho(A)$ (dem betragsmäßig größten Eigenwert) für $m \to \infty$? (Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `eig`.)

(b) Die Frobenius-Norm einer $m \times n$-Matrix A ist definiert durch

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Wie verhält sich die Frobenius-Norm einer Zufallsmatrix A für $m \to \infty$? Es muss gelten: $\rho(A) \leq \|A\|_F$ - Wird diese Ungleichung für $m \to \infty$ zu einer Gleichung?

(c) Was passiert mit dem kleinsten Singulärwert σ_{min} für festes m? Für welches m gilt, dass der kleinste Singulärwert kleiner ist als $2^{-1}, 4^{-1}, 8^{-1}, \ldots$? Erstellen Sie für verschiedene Dimensionen m jeweils 100 Zufallsmatrizen und plotten Sie zu jedem m jeweils die Anzahl derer, deren kleinster Singulärwert kleiner ist als 2^{-1}. Machen Sie dasselbe für $4^{-1}, 8^{-1}, \ldots$ - welches Verhalten ergibt sich? (Hinweis: Machen Sie sich in Matlab mit dem Befehl `svds` vertraut.)

(d) Wie ändern sich die Antworten auf die obigen Fragen, wenn man statt vollbesetzter Matrizen zufällige obere oder untere Dreiecksmatrizen betrachtet?