Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 2, Abgabe Do. 05.11.15, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Numerischer Fehler — 4 P.

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\; f(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ gilt und schätzen Sie dann den Grenzwert ab, indem Sie mit einem Taschenrechner $f(10^{-n})$ für $n = 1,\dots,5$ berechnen. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

(b) Wir wollen die Eulersche Zahl e approximieren. Dazu verwenden wir die Darstellung

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Der Rechner kann den Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ nicht exakt auswerten und rechnet stattdessen mit

$$1 \oplus \frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\epsilon)$$

mit $|\epsilon| \le eps \approx 10^{-16}$. Wie groß ist der absolute Fehler für $n = 10^k$, $k = 5,\dots,10$? Was beobachten Sie dabei? Wie groß muss n etwa sein, damit der Fehler minimiert wird?

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Aufgabe 2: Kondition — 4 P.

(a) Berechnen Sie die relative Kondition der folgenden Probleme bezüglich der Euklidischen Norm:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f(x_1,x_2) = x_1x_2$

(ii) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\; f(x) = \ln(x)$

Sind die Probleme gut oder schlecht konditioniert?

(b) Die durch die Euklidische Norm induzierte Matrixnorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird als Spektralnorm bezeichnet. Berechnen Sie die Kondition einer orthogonalen Matrix bezüglich der Spektralnorm.

Aufgabe 3: Singulärwertzerlegung **4 P.**

In Matlab werden einfache Graustufenbilder durch Matrizen dargestellt, wobei jeder Eintrag der Matrix einem Grauwert im entsprechenden Bildpixel entspricht. Gegeben sei ein 3×3 -Bild

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Wert 0 als schwarz dargestellt wird und der Wert 1 als weiß. Führen Sie eine Singulärwertzerlegung des Bildes durch (mit Angabe aller nötigen Zwischenschritte). Ersetzen Sie anschließend den kleinsten Singulärwert, der echt größer ist als 0, durch 0 - welcher Effekt ergibt sich dadurch auf das Bild?

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Implementieren Sie die folgenden Funktionen für $x, y, z \in \mathbb{R}$ in Matlab, sodass die Teiloperationen in der Reihenfolge der Klammerung durchgeführt werden. Es sollen Gleitkommazahlen doppelter Genauigkeit verwendet werden.

$$f_1(x,y,z) = x(y-z), \quad f_2(x,y,z) = xy - xz$$
$$g_1(x,y,z) = x + (y+z), \quad g_2(x,y,z) = (x+y) + z$$

(a) Bestimmen Sie die Differenz von f_1 und f_2 an der Stelle $x = e^{10}$, $y = \sin(1.57)$ und $z = \ln(2.71)$.

(b) Bestimmen Sie die Differenz von g_1 und g_2 an der Stelle $x = 10^{-10}$, $y = 10^{10}$ und $z = -y$.

Was fällt auf? Erläutern Sie Ihre Beobachtungen!