Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 3, Abgabe Do. 12.11.15, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Kondition einer Matrix **4 P.**

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -0.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.5 & 0.1 \\ -0.4 & 0.1 & 1.3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

Zur Verfügung stehen allerdings nur gestörte Versionen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.009 & -0.599 & -0.400 \\ -0.600 & 1.497 & 0.098 \\ -0.395 & 0.102 & 1.307 \end{pmatrix}, \; \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1.105 \\ 1.188 \\ 2.310 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Kondition $\kappa(A)$ bezüglich der Spektralnorm, also der durch die Euklidische Norm induzierten Matrixnorm.

(b) Seien $\tilde{x}$ und x die Lösungen von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ bzw. $Ax = b$. Schätzen Sie den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_2}{\|x\|_2}$ ab.

Aufgabe 2: Landau-Symbole **4 P.**

Gegeben sind Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$.

(a) Seien $h_1 = O(f)$, $h_2 = O(g)$, $h_3 = o(f)$ $(x \to x_0)$. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Regeln:

(i) $h_1 + h_2 = O(|f| + |g|)$

(ii) $h_1 \cdot h_2 = O(f \cdot g)$

(iii) $c \cdot h_1 + h_3 = O(f)$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f = O\left(x^{k+1}\right) \;\Leftrightarrow\; f = o\left(x^k\right)$ $(x \to 0)$

(ii) $f = O(n^n) \;\Leftrightarrow\; f = O(n!)$ $(n \to \infty)$

(iii) Für stetiges f mit $f(0) = 0$ gilt: $f(x) = o(1)$ $(x \to 0)$

Aufgabe 3: Stabilität **4 P.**

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$. Zur näherungsweisen Berechnung von $f(x)$ soll der folgende Algorithmus $\tilde{f}(x)$ verwendet werden:

$$\begin{aligned} z_1 &= rd\,(x+1) \\ z_2 &= rd\,(\sqrt{z_1}) \\ z_3 &= rd\left(\sqrt{x}\right) \\ z_4 &= rd\,(z_2 - z_3) \\ \tilde{f}(x) &= z_4 \end{aligned}$$

Ist dieser Algorithmus vorwärtsstabil?

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Schreiben Sie eine Funktion zur Lösung eines linearen Gleichungssystems durch Vorwärtseinsetzen. Das Programm soll eine untere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ einlesen und die Lösung des LGS $Ax = b$ zurückgeben. Verwenden Sie hierbei KEIN Matlab-internes Lösungsverfahren (wie zum Beispiel den Backslash-Operator), sondern berechnen Sie die Lösung analog zur Vorlesung mit Hilfe von Schleifen.

Schreiben Sie ein Testprogramm, in dem Sie anhand von drei verschiedenen Beispielen Ihr Lösungsverfahren mit der Matlab-Lösung gegeben durch `x = A\b` vergleichen.