Prof. Dr. B. Wirth, M. Sc. C. Roßmanith, WS 15/16

Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 4, Abgabe Do. 19.11.15, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: LU-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung **4 P.**

(a) Bestimmen Sie die LU-Zerlegung (mit Spaltenpivotisierung) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Warum ist eine Spaltenpivotisierung hier notwendig? Wie sieht die entsprechende Permutationsmatrix aus?

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der in (a) bestimmten LU-Zerlegung die Lösung des LGS $Ax = b$ mit $b = (4, -2, 3)^T$.

Aufgabe 2: LU-Zerlegung für Tridiagonalmatrizen **4 P.**

Gegeben sei eine reelle $n \times n$-Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ sei die Matrix A_k definiert durch $A_k := (a_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}$, das heißt durch Streichen der Zeilen und Spalten $k+1, \dots, n$ der Matrix A. Der Wert $c_k = \det(A_k)$ wird *k-ter Hauptminor* der Matrix A genannt.
Zeigen Sie: Die Gauß-Elimination ist ohne Pivotisierung durchführbar, wenn keiner ihrer Hauptminoren verschwindet.

(b) Bestimmen Sie L und U in Abhängigkeit der Parameter $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$ (Hinweis: L und U sind Bidiagonalmatrizen und die Werte auf den Diagonalen lassen sich rekursiv definieren).

Aufgabe 3: Cholesky-Zerlegung **4 P.**

Bestimmen Sie mit Angabe aller notwendigen Zwischenschritte die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Schreiben Sie ein Programm, welches eine Gauß-Elimination mit partieller Pivotisierung (wie in der Vorlesung definiert) durchführt. Das Programm soll eine Matrix A einlesen und die entsprechenden Matrizen L und U zurückgeben. Verwenden Sie diese anschließend, um per Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen die Lösung eines LGS $Ax = b$ zu bestimmen. Testen Sie ihr Progamm am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$