Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 5, Abgabe Do. 26.11.15, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Projektion — 4 P.

Gegeben seien zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Wie sehen die orthogonalen Projektionen P_1 bzw. P_2 auf $\mathit{Bild}(A)$ bzw. $\mathit{Bild}(B)$ aus? Worauf wird jeweils der Vektor $x = (1,2,3)^T$ projiziert?

(b) Sei $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ eine Projektion mit $P \neq 0$. Zeigen Sie: $\|P\|_2 \geq 1$ (in der Spektralnorm) mit Gleichheit genau dann, wenn P eine orthogonale Projektion ist.

Aufgabe 2: QR-Zerlegung — 4 P.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie von Hand die QR-Zerlegung von A

(a) mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.

(b) mit dem Householder-Verfahren.

Geben Sie in beiden Fällen Q und R explizit an.

Aufgabe 3: QR-Zerlegung mit Householder-Reflektion — 4 P.

Schauen Sie sich noch einmal das Theorem aus der Vorlesung an, das zeigt, dass der Aufwand der QR-Zerlegung für eine $m \times n$-Matrix etwa $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$ flops beträgt.

(a) Wie groß ist der Aufwand, wenn $A_{ik} = 0$ für $i > k+1$?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte einer Householder-Reflektion und geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Eigenwerte an.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ die QR-Zerlegung berechnet. Das Programm soll eine Matrix A einlesen, mit Hilfe des modifizierten Gram-Schmidt-Verfahrens die QR-Zerlegung berechnen und die Matrizen Q und R zurückgeben. Testen Sie ihr Ergebnis mit der Matrix aus Aufgabe 2 und vergleichen Sie mit der Matlab-Version der QR-Zerlegung `[Q,R] = qr(A)`.