Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe Do. 17.12.15, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Banachscher Fixpunktsatz — 4 P.

Gegeben sei die Fixpunktaufgabe $x = \varphi(x)$, wobei $x = (\xi, \eta)^T$ auf $I = [0,1] \times [-1,1]$ und

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta + 3 \\ \log(1+\eta^2+\xi^2) - 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für $q = \frac{5}{6}$ bezüglich der Maximumsnorm erfüllt sind.

(b) Sei $\hat{x}$ der Fixpunkt von φ in I sowie ein Startvektor $x_0 = (0,0)^T$ gegeben. Wie viele Iterationsschritte der Fixpunktiteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sind hinreichend, damit

$$\|x_k - \hat{x}\|_\infty \leq 10^{-3}$$

erfüllt ist?

Aufgabe 2: Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren — 4 P.

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie jeweils drei Schritte des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens aus.

(b) Führen Sie ebenfalls drei Schritte der jeweiligen relaxierten Verfahren mit Relaxationsparameter $w = 0,5$ aus.

(c) Untersuchen Sie, ob diese Verfahren konvergieren.

Aufgabe 3: Satz von Gerschgorin — 4 P.

(a) Zeigen Sie den ersten Teil des Satzes von Gerschgorin. Hinweis: Betrachten Sie für einen Eigenwert λ von A den zugehörigen Eigenvektor x mit maximalem Eintrag 1.

(b) Zeigen Sie den zweiten Teil des Satzes von Gerschgorin. Hinweis: Transformieren Sie die Matrix A in eine Diagonalmatrix und verwenden Sie die Tatsache, dass sich die Eigenwerte einer Matrix als stetige Funktionen der Matrixeinträge auffassen lassen.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Implementieren Sie zwei Funktionen in Matlab, die die Lösung des LGS $Ax = b$ mit Hilfe des Jacobi- sowie des Gauß-Seidel-Verfahrens berechnen. Verwenden Sie anschließend Ihr Programm, um die Randwertaufgabe $-u^{''}(x) = f(x)$ mit $u(0) = u(1) = 0$ und $f(x) = \pi^2 sin(\pi x)$ auf $I = [0, 1]$ zu lösen. Dazu gehen Sie wie folgt vor:

- Sei $x_0, \dots, x_{n+1}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ mit $x_i = ih$, $h = \frac{1}{n+1}$. $u_i = u(x_i)$ sei der Funktionswert an der Stelle x_i.
- Eine Diskretisierung der zweiten Ableitung führt zu dem LGS

  $$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \; i = 1, \dots, n,$$

  wobei $u_0 = u_{n+1} = 0$ gegeben sind.
- Die exakte Lösung der Randwertaufgabe ist gegeben durch $u(x) = sin(\pi x)$. Das Iterationsverfahren soll stoppen, wenn der maximale Fehler $\max\limits_{1 \le i \le n} |u_i - u(x_i)|$ kleiner ist als eine vorgegebene Toleranz $TOL = 10^{-3}$.
- Testen Sie Ihr Programm für verschiedene Eingaben von n.