Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 9, Abgabe Do. 14.01.16, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Tschebyscheff-Polynome 4 P.

Betrachten Sie die in der Vorlesungen definierten Tschebyscheff-Polynome

$$T_k(x) := \cos(k \arccos(x))$$

.

(a) Zeigen Sie: T_k ist ein Polynom vom Grad k und hat für $k > 0$ Höchstkoeffizient 2^{k-1}.

(b) Zeigen Sie: $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ sind paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)dx, \; w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aufgabe 2: CG-Verfahren 4 P.

Gegeben sind ein Vektor $b = (1, 1, 1)^T$ und eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen für das CG-Verfahren erfüllt sind.

(b) Führen Sie einen Schritt des CG-Verfahrens mit Startvektor $x_0 = (1, 0, 1)^T$ durch, d.h. nicht wie in der Vorlesung mit $x_0 = (0, 0, 0)^T$.

(c) Nach wie vielen Schritten liefert das CG-Verfahren spätestens die exakte Lösung?

Aufgabe 3: GMRES 4 P.

Im GMRES-Algorithmus aus der Vorlesung muss in jedem Schritt ein Kleinste-Quadrate-Problem der Form

$$y_k = \underset{y}{argmin} \; \|\tilde{H}_k y - \|b\|_2 e_1\|_2$$

mittels QR-Zerlegung gelöst werden. Der Aufwand ist wegen der Hessenbergstruktur der Matrix $\tilde{H}_k$ von der Ordnung $\mathcal{O}(k^2)$. Anstatt nacheinander die QR-Zerlegungen der Matrizen $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots$ unabhänging voneinander zu berechnen, kann man auch die Zerlegung von $\tilde{H}_k$ aus der von $\tilde{H}_{k-1}$ aus dem vorherigen Schritt bestimmen. Dazu verwendet man anstelle der Householder-Reflektionen Givens-Rotationen: Die Matrix

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Givens-Rotation um θ. Durch Linksmultiplikation einer Matrix A mit $G(i,j,\theta)$ wird mit entsprechender Definition von θ der Eintrag a_{ji} eliminiert.

Zeigen Sie, dass das obige Kleinste-Quadrate-Problem mit $\mathcal{O}(k)$ Operationen gelöst werden kann. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie einen Algorithmus für die QR-Zerlegung (analog zu dem aus der Vorlesung), bei dem anstelle der Householder-Reflektionen Givens-Rotationen verwendet werden.

(b) Schreiben Sie einen Algorithmus zur Lösung des Kleinste-Quadrate-Problems mit Hilfe der QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen aus Aufgabenteil (a) und zeigen Sie, dass dies mit $\mathcal{O}(k)$ Operationen möglich ist, wenn man im k-ten Schritt davon ausgeht, dass $\tilde{H}_{k-1}$ schon berechnet wurde.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die das CG-Verfahren durchführt. Das Programm soll eine symmetrische positiv definite Matrix A und einen Vektor b als Eingabeparameter erhalten und eine Approximation x_k der Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems ausgeben. Testen Sie Ihr Programm mit den Daten aus Aufgabe 2 und verifizieren Sie Ihre Lösung der Aufgabenteile (b) und (c).