Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 10, Abgabe Do. 21.01.16, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Newton-Verfahren 4 P.

Gesucht ist das Minimum der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$. Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung des Minimums der Funktion auf, indem Sie die Gleichung $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$ betrachten. Schreiben Sie einen Algorithmus für die Lösung des Problems, bei dem die direkte Inversion von $Df(x)$ umgangen wird. Führen Sie dann zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$ durch.

Aufgabe 2: Vektoriteration 4 P.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

(b) Führen Sie drei Schritte der Vektoriteration mit Startwert $v_0 = (1, 1, 1)^T$ durch und geben Sie die Approximation des betragsmaximalen Eigenwertes an.

Aufgabe 3: Inverse Iteration 4 P.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch und kein Vielfaches der Einheitsmatrix.

(a) Zeigen Sie: Für μ nahe einem Eigenwert von A ist die Lösung des linearen Gleichungssystems in der inversen Iteration schlecht konditioniert.

(b) Zeigen Sie: Dies beeinflusst nicht die Stabilität des Algorithmus! Gehen Sie hierbei wie folgt vor: Sei o.B.d.A. $\mu = 0$ und A habe einen Eigenwert λ_i mit Vielfachheit 1, der betragsmäßig viel kleiner ist als die anderen. Sei außerdem $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v = a_1 q_1 + \ldots + a_m q_m$, wobei $a_i \neq 0$ und $q_1, \ldots, q_m$ die Eigenvektoren von A sind. Sei $\tilde{w}$ die durch ein rückwärtsstabiles Verfahren gefundene Lösung des linearen Gleichungssystems $(A - \mu I)w = v$ aus der inversen Iteration. Zeigen Sie dann: $|\frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|} - \frac{w}{\|w\|}| = \mathcal{O}(\epsilon_m)$, auch wenn $|w - \tilde{w}|$ groß sein kann.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

Schreiben Sie jeweils ein Programm in Matlab, das die Vektoriteration und die inverse Iteration durchführt. Testen Sie Ihre Lösung an den Daten aus Aufgabe 2, um alle Eigenwerte der Matrix A zu bestimmen.