Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 11, Abgabe Do. 28.01.16, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Eigenwertbestimmung mit Newton **4 P.**

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine invertierbare Matrix mit m verschiedenen Eigenwerten. Die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A kann als Nullstellenproblem der Funktion

$$F(x,\lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}(1 - x^T x) \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden. Für die Nullstellensuche eignet sich beispielsweise das Newton-Verfahren.

(a) Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Eigenwert/Eigenvektorbestimmung auf!

(b) Zeigen Sie: Die Ableitung der Funktion F ist an ihren Nullstellen invertierbar.

Aufgabe 2: Rayleigh-Quotienten-Shifts **4 P.**

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $A = (e_2\ e_3\ \dots\ e_m\ e_1)$, wobei e_i der i-te m-dimensionale Einheitsvektor ist.

(a) Zeigen Sie: Im QR-Algorithmus mit Rayleigh-Quotienten-Shifts gilt: $\mu_k = 0$ für alle k.

(b) Im Falle von nicht-symmetrischen Matrizen wählt man im QR-Algorithmus mit Wilkinson-Shifts im k-ten Schritt μ_k als den Eigenwert der Matrix

$$(A_{k-1})_{m-1:m,m-1:m} = \begin{pmatrix} a_{m-1} & b_{m-1} \\ c_{m-1} & a_m \end{pmatrix},$$

der näher an a_m liegt. Führen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -8 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

einen Iterationsschritt des QR-Algorithmus mit Wilkinson-Shifts durch.

Aufgabe 3: Bisektion **4 P.**

Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{m-1} \\ & & b_{m-1} & a_m \end{pmatrix}$$

mit $b_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, m-1$. Sei $A^{(k)} = A_{1:k,1:k}$.

(a) Zeigen Sie: Die Eigenwerte $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_k^{(k)}$ von $A^{(k)}$ sind paarweise verschieden für $k \in \{1, \dots, m\}$. Hinweis: Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix $A - \lambda I$ mindestens Rang $m-1$ hat.

(b) Zeigen Sie: $\det(A^{(k)}) = a_k \det(A^{(k-1)}) - b_{k-1}^2 \det(A^{(k-2)})$.

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

(a) Schreiben Sie eine Funktion `T=tridiag(A)`, die eine reelle symmetrische Matrix A einliest und sie auf Tridiagonalgestalt bringt.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `Tneu = QRAlgorithmus(T)`, die für eine Tridiagonalmatrix T den QR-Algorithmus mit Wilkinson-Shifts durchführt.