Prof. Dr. B. Wirth, M. Sc. C. Roßmanith, WS 15/16

Numerische Lineare Algebra
Probeklausur

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Geburtsdatum: ______________________

Studiengang: ______________________

Übungsgruppenleiter: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Max. Punktzahl	10	10	18	10	15	12	15	10	100
Bearbeitet									
Erreichte Punkte									

Diese Probeklausur ist als Vorbereitung auf die richtige Klausur gedacht, welche vom Aufbau und Schwierigkeitsgrad ähnlich sein wird. Die vorgesehene Klausurzeit beträgt drei (volle) Stunden, es sind keine zusätzlichen Hilfsmittel erlaubt. Um Ihren eigenen Wissensstand zu prüfen, suchen Sie sich einen ruhigen Ort, nehmen sich drei Stunden Zeit und rechnen die Klausur durch, natürlich möglichst ohne das Vorlesungsskript zu Rate zu ziehen. Anschließend vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Musterlösung, welche nach den Weihnachtsferien auf die Homepage gestellt wird, und bewerten Sie sich selbst oder bitten einen Kommilitonen darum. Die Klausur ist mit einem Ergebnis von 50 Punkten sicher bestanden!

Aufgabe 1: Singulärwertzerlegung **5+5 P.**

(a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie: Die Singulärwerte einer Matrix A sind gleich den Quadratwurzeln aus den positiven Eigenwerten der Matrix A^*A.

Aufgabe 2: Stabilität **10 P.**

Gegeben sei der folgende Algorithmus zur rekursiven Berechnung des Euklidischen Skalarprodukts zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := x_1 \odot y_1 \oplus \langle (x_2, \dots, x_n)^T, (y_2, \dots, y_n)^T \rangle,$$

wobei $\odot$ und $\oplus$ Maschinenoperationen kennzeichnen. Überprüfen Sie, ob der Algorithmus rückwärtsstabil ist.

Aufgabe 3: LU-Zerlegung **10+3+5 P.**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix A ohne Pivotisierung. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das möglich?

(b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für $b = (1, 2, 3)^T$ und $\alpha = 2$ mit Hilfe der LU-Zerlegung.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ die Kondition der Matrix A bezüglich der Zeilensummennorm.

Aufgabe 4: Vorwärtseinsetzen **5+5 P.**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix, $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

(a) Geben Sie den Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mittels Rückwärtseinsetzen in Form von Pseudocode wieder.

(b) Bestimmen Sie den Aufwand des Rückwärtseinsetzens.

i	1	2	3	4
x_i	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y_i	0	1	0	1

Aufgabe 5: Überbestimmte lineare Gleichungssysteme **10+5 P.**

Betrachten Sie die obige Tabelle mit gegebenen Messwerten.

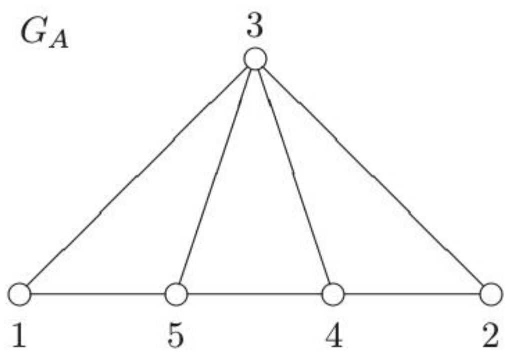
Es wird ein quadratischer Zusammenhang der Form $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ angenommen, sodass sich zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem ergibt.

(a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf und bestimmen Sie die QR-Zerlegung der zugehörigen Matrix A mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

(b) Bestimmen Sie die Polynomkoeffizienten a_0, a_1, a_2 mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Aufgabe 6: Graphen **2+10 P.**

Betrachten Sie den folgenden Graphen:



(a) Stellen Sie die Besetzungsstruktur der zugehörigen Matrix dar.

(b) Wenden Sie den Cuthill-McKee-Algorithmus an, um eine Umnummerierung der Zeilen und Spalten vorzunehmen, und zeichnen Sie den resultierenden neuen Graphen.

Aufgabe 7: Banachscher Fixpunktsatz **10+5 P.**

Gegeben sei eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 x_2 + 1 \\ x_1^2 - x_2 + 2 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: g besitzt genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Wie viele Fixpunktiterationen sind nötig, damit $\|\bar{x} - x_k\|_\infty \leq 0.01$ bezüglich der Maximumsnorm gilt?

Aufgabe 8: Iterative Gleichungssystemlöser **10 P.**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = I + \alpha E$, wobei I die $n \times n$-Einheitsmatrix und E die Matrix ist, bei der alle Einträge gleich 1 sind. Seien zusätzlich $\alpha > 0$ und $n < 2 + \frac{1}{\alpha}$. Geben Sie das Jakobi-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an und zeigen Sie, dass das Verfahren für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.