**Hausaufgabe 1 (Abgabe bis Mittwoch, 16. April, 12 Uhr)**

1. (Nach Evans' "PDEs") Betrachten Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{im } \mathbb{R}^2$$

zusammen mit Cauchy-Daten

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{n}\sin(nx_1) \quad \text{auf } \{x_2 = 0\}\,.$$

(a) Existiert eine Lösung des partiellen Differentialgleichungs-Problems um $x = 0$? (1,5 pt)

(b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von $u$ an $x = 0$. (2 pt)

(c) Nutzen Sie 1b um zu zeigen, dass eine analytische Lösung gegeben ist durch

$$u(x) = \frac{1}{n^2}\sin(nx_1)\sinh(nx_2)\,.$$

Was passiert für $n \to \infty$? (Dieses Beispiel stammt von Hadamard.) (1,5 pt)

2. (Aus Evans' "PDEs") Finden Sie eine Lösung von

$$-\Delta u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$$

der Form $u(x) = \alpha(1 - |x|^2)^{-\beta}$ für positive Konstanten $\alpha, \beta$. Dieses Beispiel zeigt, dass eine Lösung einer nichtlinearen pDgl. innerhalb eines Gebiets endlich, doch überall auf dem Rand unendlich sein kann. (5 pt)

3. (Aus Evans' "PDEs") Zeigen Sie, dass die Linie $\{t = 0\}$ charakteristisch für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ ist. Zeigen Sie, dass es keine analytische Lösung $u$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $u(0, x) = \frac{1}{1+x^2}$ geben kann. (5 pt)

(Hinweis: Nehmen Sie die Existenz einer analytischen Lösung an, berechnen Sie ihre Koeffizienten und zeigen Sie, dass die sich ergebende Potenzreihe divergiert außer an $(0, 0)$. Dieses Beispiel stammt von Kovalevskaya.)