Partielle Differentialgleichungen I **Institut für Numerische und Angewandte Mathematik**
SS 2014 **Prof. Dr. Benedikt Wirth**
Hausaufgabe 10 (Abgabe bis Mittwoch, 25. Juni, 12 Uhr)

1. (Aus Evans PDEs) Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ für Ω zusammenhängend ist eine schwache Lösung des Neumann Problems
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } \Omega\,, \\ \partial u/\partial\nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{cases}$$
wenn für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\,.$$
   (a) Zeigen Sie, dass eine glatte schwache Lösung auch eine klassische Lösung ist. (0,5 pt)
   (b) Zeigen Sie, dass für $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung existiert genau dann wenn $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$. (2,5 pt)
2. (Aus Evans PDEs) Eine Funktion $u \in H^2_0(\Omega)$ ist eine schwache Lösung des *biharmonischen Randwertproblems*
$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{auf } \Omega \\ u = \partial u/\partial\nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
wenn für alle $v \in H^2_0(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\,.$$
Zeigen Sie für $f \in L^2(\Omega)$, dass eine eindeutige schwache Lösung existiert. (4 pt)
3. Zeigen Sie mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung („direct method of the calculus of variations"), dass die Funktion
$$f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}\,, \quad A \mapsto \begin{cases} -c & \text{wenn } A \text{ singulär ist} \\ \det A + |A|^5 & \text{sonst} \end{cases}$$
mit einer festen Konstante $c > 0$ einen Minimierer besitzt. (4 pt)
4. Der letzte Schritt der direkten Methode besteht darin, Unterhalbstetigkeit des Energiefunktionals E entlang der Minimalfolge zu zeigen. Betrachten Sie
$$E[u] = \int_\Omega L(\nabla u, u, x) \,\mathrm{d}x$$
für $\Omega = (0,1)$, Randwerte $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und ein $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $L(p,z,x) \geq \alpha|p|^q - \beta$, $\alpha, \beta > 0$, $q \in (1,\infty)$. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass Minimalfolgen schwach konvergente Teilfolgen besitzen,
$$u_k \rightharpoonup u^* \quad \text{in } W^{1,q}(\Omega)\,.$$
Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass Konvexität von L im ersten Argument notwendig für die Unterhalbstetigkeit
$$\liminf_{k\to\infty} E[u_k] \geq E[u^*]$$
ist. (Hinweis: Wählen Sie $L \geq 0$ mit zwei verschiedenen globalen Minima und die u_k als Sägezahnfunktion. Nutzen Sie außerdem, dass Funktionen des Typs $v_k(x) = \begin{cases} 1 & (kx \text{ modulo } 1) < \gamma \\ -1 & (kx \text{ modulo } 1) > \gamma \end{cases}$ für ein $\gamma \in (0,1)$ schwach in L^q gegen ihren Durchschnittswert konvergieren.) (4 pt)