Partielle Differentialgleichungen I **Institut für Numerische und Angewandte Mathematik**
SS 2014 **Prof. Dr. Benedikt Wirth**
Hausaufgabe 11 (Abgabe bis Mittwoch, 02. Juli, 12 Uhr)

1. (Aus Evans, PDEs) Sei u eine glatte Lösung von $u_t - \Delta u = 0$ auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

   (a) Zeigen Sie, dass $u_\lambda(t,x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung löst. (0,5 pt)

   (b) Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass $v(t,x) := x \cdot \nabla u(t,x) + 2tu_t(t,x)$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung löst. (1 pt)

   Nehmen Sie nun $n = 1$ sowie $u(t,x) = v(\frac{x}{\sqrt{t}})$ an.

   (a) Zeigen Sie
   $$u_t = u_{xx} \qquad \Leftrightarrow \qquad v''(z) + \tfrac{z}{2} v'(z) = 0\,.$$
   Zeigen Sie, dass eine allgemeine Lösung gegeben ist durch $v(z) = c\int_0^z e^{-s^2/4}\,\mathrm{d}s + d$. (1 pt)

   (b) Differenzieren Sie $u(t,x) = v(\frac{x}{\sqrt{t}})$ bzgl. x und wählen Sie die Konstante c passend, um die Fundamentallösung Φ zu erhalten. Warum ergibt dieses Vorgehen die Fundamentallösung? (Hinweis: Was ist die Anfangsbedingung für u?) (2 pt)

2. (Aus Evans, PDEs) Geben Sie einen direkten Beweis, dass für beschränktes Ω und $u \in C^1((0,T];C^2(\Omega;\mathbb{R})) \cap C(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung gilt
   $$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u\,.$$
   (Hinweis: Definieren Sie $u_\varepsilon := u - \varepsilon t$ für $\varepsilon > 0$, und zeigen Sie, dass u_ε kein Maximum auf Ω_T annehmen kann.) (2,5 pt)

3. Betrachten Sie für $\Omega = [0,\infty)$ das parabolische Problem
   $$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty)\times\Omega \\ u = h & \text{auf } \partial\Omega \\ u = g & \text{für } t = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Geben Sie die Fundamentallösung Φ der 1D Wärmeleitungsgleichung an. (0,5 pt)

   (b) Rechnen Sie explizit nach, dass die Greensche Funktion
   $$G^{(s,y)}(t,x) = \Phi(s-t, x-y) - \Phi(s-t, x+y)$$
   für $s, y > 0$ auf $(0,s)\times\Omega$ die Differentialgleichung $-\partial_t G^{(s,y)} - \Delta G^{(s,y)} = 0$ erfüllt. (1 pt)

   (c) Schreiben Sie mit Hilfe der Greenschen Darstellungsformel die Lösung von (1) hin für $f = 0$, $h = 0$,
   $$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ 0 & x \geq 2\,. \end{cases}$$
   (0,5 pt)

   (d) In der Vorlesung hatten wir den Fall $h = 0$ betrachtet. Wie sieht die Greensche Darstellungsformel für $h \neq 0$ aus? Geben Sie die Lösung an für f und g wie oben,
   $$h(t) = \begin{cases} 1 & t < 3 \\ 0 & t \geq 3\,. \end{cases}$$
   (2 pt)

   (e) Nehmen Sie nun $\partial_\nu u = h$ auf $\partial\Omega$ statt $u = h$ an. Wie sieht die Greensche Darstellungsformel aus? (2 pt)

   (f) Leiten Sie eine Greensche Darstellungsformel her für das obige Problem, nur dass $u_t - \Delta u$ ersetzt wird durch $u_t - \Delta u + u$. Wie sieht das von der Greenschen Funktion zu lösende Problem aus? (Hinweis: Sie brauchen die Greensche Funktion bzw. die Fundamentallösung nicht explizit zu finden.) (2 pt)