Partielle Differentialgleichungen I **Institut für Numerische und Angewandte Mathematik**
SS 2014 **Prof. Dr. Benedikt Wirth**
Hausaufgabe 2 (Abgabe bis Mittwoch, 23. April, 12 Uhr)

1. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe
$$\sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha! s^{|\alpha|}} x^\alpha$$
aus der Vorlesung absolut konvergiert für $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \frac{s}{\sqrt{n}}$. (5 pt)

   (Hinweis: Beweisen Sie zunächst das Multinomialtheorem $(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha$ mittels Induktion nach n.)

2. Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung
$$u_t + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} = f(t,x)\,.$$
   - Berechnen Sie die charakteristischen Kurven. (1,5 pt)
   - Lösen Sie die Differentialgleichung für $f \equiv 0$ und Randdaten $u(0,x) = g(x)$ auf $\{t=0\} \times \mathbb{R}^2$. (1,5 pt)
   - Lösen Sie die Differentialgleichung für $f(t,x) = t$ und Randdaten $u(0,x) = x^2$ auf $\{t=0\} \times \mathbb{R}^2$. (2 pt)

3. (Aus Evans' "PDEs") Sei ein glattes Vektorfeld $\mathbf{b}$ auf $\mathbb{R}^n$ gegeben, und sei $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s,x,t)$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (s \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{x}(t) &= x\,. \end{cases}$$
   - Definieren Sie die Jakobische
$$J(s,x,t) := \det D_x \mathbf{x}(s,x,t)$$
     und leiten Sie Eulers Formel
$$J_s(s,x,t) = (\mathrm{div}\mathbf{b})(\mathbf{x}(s,x,t))J(s,x,t)$$
     her. (2,5 pt)
   - Zeigen Sie, dass
$$u(x,t) := g(\mathbf{x}(0,x,t))J(0,x,t)$$
     das partielle Differentialgleichungs-Problem
$$\begin{cases} u_t + \mathrm{div}(u\mathbf{b}) = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{auf } \{t=0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$
     löst. (Hinweis: Zeigen Sie $\frac{\partial}{\partial s}(u(\mathbf{x}(s,x,t),s)J(s,x,t)) = 0$.) (2,5 pt)