Hausaufgabe 4 (Abgabe bis Mittwoch, 7. Mai, 12 Uhr)

1. Bestimmen Sie das Definitionsgebiet und die Lösung für das Problem

$$u_{x_1} = (u_{x_2})^2 \quad \text{mit } u(0, x_2) = g(x_2) \quad \text{für}$$

   - $g(x_2) = x_2^2$, (2,5 pt)
   - $g(x_2) = x_2^3$. (2,5 pt)

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zulässig für den Satz von Gauß, $g \in C^1(\overline{\Omega})$ eine skalare und $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion. Zeigen Sie

$$\int_\Omega g \mathrm{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} gF \cdot \nu \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla g \cdot F \, \mathrm{d}x \, ,$$

   worin ν die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist. (1 pt)

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Omega = B_1(0) \cap C$ für $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 > x_1^2 + x_2^2\}$.

   - Zeigen Sie, dass Ω eine zulässige Menge für den Satz von Gauß ist. (1 pt)
   - Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld gegeben durch $F(x) = e^{|x|^3} x$. Berechnen Sie $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, \mathrm{d}x$. (3 pt)
   - Berechnen Sie $\int_{C \cap \partial B_1(0)} F \cdot \nu \, \mathrm{d}x$. (2 pt)

4. Seien $h \in C^1([0, \infty))$ eine Funktion mit $h(0) = 0$ und $h'(t) > 0$ auf $[0, \infty)$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch $\Psi(x) = h(|x|^2)$. Sei $T > 0$ fest und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Omega = \Psi^{-1}([0, T])$. Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = g(|x|^2)x$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \mathrm{div} F \, \mathrm{d}x = 4\pi [h^{-1}(T)]^{3/2} g(h^{-1}(T)) \, .$$

   (3 pt)

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass Ω eine Kugel ist, deren Radius $\sqrt{h^{-1}(T)}$ ist.)