PDE I

Einleitung

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$. Eine „partielle Differentialgleichung" (pDgl oder PDE, „partial differential equation") ist eine Gleichung, die eine Funktion $u: \Omega \to \mathbb{R}$ und ihre partiellen Ableitungen verknüpft,

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

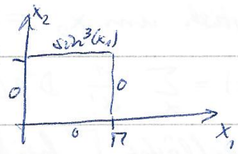
$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$. k ist die Ordnung der pDgl, u die gesuchte Fkt.

Notation:
- $u_{x_1} := \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $u_{x_1 x_2} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ usw.
- $\nabla u := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$
- $\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \operatorname{div} \nabla u$
- Manchmal ist die erste Variable die Zeit. Dann betrachten wir $\Omega' = (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, statt Ω. t bezeichnet dann die Zeitvariable, $x_1, \dots, x_n$ die räumlichen Variablen. ∇, Δ bezieht sich auf die räumlichen Variablen.
- Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt Multiindex der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. $D^\alpha u := \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $b^\alpha := b_1^{\alpha_1} \cdots b_n^{\alpha_n}$ $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

Bsp.:
- Transportgl. $\quad u_t + b \cdot \nabla u = 0 \quad , b \in \mathbb{R}^n$
- Laplace-gl. $\quad \Delta u = 0$
- Wärmeleitungsgl. $\quad u_t = \Delta u$
- Wellengl. $\quad u_{tt} = \Delta u$

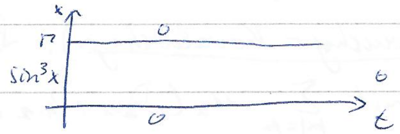
Ein pDgl.-Problem ist eine pDgl. mit Randbedingungen auf einem Teil $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Bsp:
- $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } (0,\pi)^2, \\ u = 0 & \text{für } x_1 = 0, x_1 = \pi, x_2 = 0 \\ u = \sin^3(x_1) & \text{für } x_2 = \pi \end{cases}$



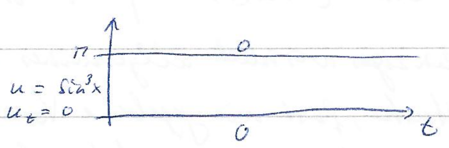
Lsg.: $u(x) = \frac{3}{4} \sin x_1 \frac{\sinh x_2}{\sinh(1)} - \frac{1}{4} \sin(3x_1) \frac{\sinh(3x_2)}{\sinh(3)}$

- $\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{auf } (0,\infty) \times (0,\pi) \\ u(0,x) = \sin^3 x \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & u \to 0 \text{ für } t \to \infty \end{cases}$



Lsg.: $u(t,x) = \frac{3}{4} \sin x \, e^{-t} - \frac{1}{4} \sin 3x \, e^{-3t}$

- $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{auf } (0,\infty) \times (0,\pi) \\ u(0,x) = \sin^3 x, & u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$



Lsg.: $u(t,x) = \frac{3}{4} \sin x \cos t - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3t$

Def:
- Lineare pDgl.: $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$
- semilineare pDgl: $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, u(x), x) = 0$
- quasilineare pDgl: $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, u(x), x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, u(x), x) = 0$
- nichtlineare pDgl: nichtlinear in $D^k u$

Def.: Ein pDgl-Problem heißt <u>wohlgestellt</u> nach Hadamard, wenn

(i) es eine Lsg. besitzt,
(ii) die Lsg. eindeutig ist und
(iii) sie stetig von den Daten (Randwerte / rechte Seite) abhängt

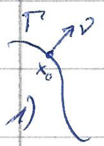
Wir möchten die Wohlgestelltheit von verschiedenen pDgl. untersuchen und ihre Lsgen angeben/ charakterisieren. Was verstehen wir unter einer Lsg.? Obige Notation impliziert eigentlich k-fache Differenzierbarkeit von u – manchmal machen jedoch auch weniger reguläre Lsgen Sinn, z.B. „schwach differenzierbare“.

Typisches Vorgehen:
(1) Zeige Existenz einer (wenig regulären) Lsg.
(2) Schätze die Lsg. ab in Termen der Daten
(3) Leite daraus Regularität (z.B. k-fache Diff-barkeit) her

<u>Ein allgemeines Resultat: Cauchy-Kovalevskaya</u>

Betrachte im Folgenden eine quasilineare pDgl $k$ter Ordnung (Ergebnisse gelten auch für nichtlineare)

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x),\dots,u(x),x)\,D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x),\dots,u(x),x) = 0 \qquad (1)$$



- Γ = glatte $(n-1)$-dim. Hyperfläche
- $\nu(x) = \nu = \begin{pmatrix}\nu_1\\ \vdots\\ \nu_n\end{pmatrix}$ = Einheitsnormale an Γ in $x\in\Gamma$ (Vektor senkrecht zu Γ mit Norm 1)
- $j$te Normalenableitung von u in $x\in\Gamma$ = $j$te Richtungsableitung für $\nu = (\nu\cdot\nabla)^j u$
$$= \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}\frac{\partial^j u}{\partial x^\alpha}\nu^\alpha$$

Def: (<u>Cauchy-Problem</u>) Löse pDgl. unter vorgegebenen <u>Cauchy-Daten</u>,
$$u = g_0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = g_1,\ \dots,\ \frac{\partial^{k-1}u}{\partial\nu^{k-1}} = g_{k-1} \quad \text{auf } \Gamma \qquad (2)$$

Def: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ heißt <u>analytisch</u> um $x_0\in\mathbb{R}^n$, wenn $\exists r>0,\ f_\alpha\in\mathbb{R}: f(x)=\sum_\alpha f_\alpha (x-x_0)^\alpha \ \forall |x-x_0|<r$

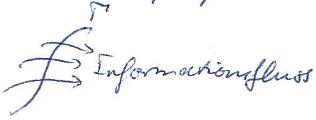
Bem:
- f analytisch um $x_0 \Rightarrow f\in C^\infty$ um x_0 mit $D^\alpha f(x_0) = f_\alpha\,\alpha!$
$$\Rightarrow f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha = \text{Taylorentwicklung auf } |x-x_0|<r$$
- Eine Hyperfläche Γ heißt <u>analytisch</u> um $x_0\in\Gamma$, wenn es analytische Fkten $\Phi,\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ und $r>0$ gibt mit $\Psi=\Phi^{-1}$ und $\Phi(\Gamma\cap B_r(x_0))\subset\{x_n=0\}$

Thm (<u>Cauchy-Kovalevskaya</u>): Seien $\Gamma, g_0,\dots,g_{k-1}$ sowie a_α, a_0 analytisch um x_0 mit $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D_{k-1}, D_{k-2},\dots,D_0,x)\neq 0 \ \forall D_i\in\mathbb{R}^{n^i}, x\in\Gamma$. Dann existiert ein $r>0$ sodass (1) & (2) auf $B_r(x_0)$ eine analytische Lsg. besitzt.

Bem:
- einziges wirklich allgemeines Resultat
- Starke, fast nie gegebene Voraussetzungen (Analytizität)
- Keine Aussage über r! Lsg. kann beliebig nahe an x_0 aufhören zu existieren, z.B.
$$\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2\\ u=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\varepsilon\delta^2}{x_1^2+\delta^2} & \text{auf } \Gamma=\{x_2=0\}\end{cases} \qquad \text{für } \varepsilon,\delta>0$$
$\frac{\varepsilon\delta^2}{x_1^2+\delta^2}$ ist analytisch & beschränkt durch ε

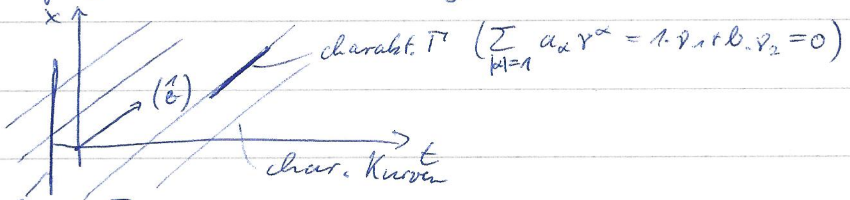
Lsg.: $u = \frac{\varepsilon\delta}{4}\ln\frac{x_1^2+(x_2+\delta)^2}{x_1^2+(x_2-\delta)^2} \Rightarrow u$ explodiert um $\begin{pmatrix}0\\ \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ -\delta\end{pmatrix}$, egal wie klein ε ist!
- In einer pDgl. fließt Information entlang „<u>charakteristischer Kurven</u>“
Γ mit $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\nu^\alpha\neq 0$ auf Γ heißt „<u>nichtcharakteristisch</u>“

Γ nicht-charakteristisch bedeutet, dass Information quer zu Γ fließt
(tangentialer Informationsfluss hilft nicht)



Bsp.: $u_t + b\cdot\nabla u = 0$ (Transportgl.) $\Leftrightarrow \binom{1}{b}\cdot\binom{u_t}{\nabla u} = 0 \Rightarrow u = \text{const.}$ in Richtung $\binom{1}{b}$

$\Rightarrow$ Anfangsdaten werden entlang char. Kurven mit Richtung $\binom{1}{b}$ transportiert.



nicht-charakt. Γ
$\left(\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = 1\cdot\nu_1 + b\cdot\nu_x \neq 0\right)$

Beweisschritte: (1) Reduktion auf $\Gamma = \{x_n = 0\}$

- Wähle r, Ψ, Φ analytisch mit $\Psi = \Phi^{-1}$, $\Phi(\Gamma \cap B_r(x_0)) \subset \{x_n = 0\}$, $\Phi(x_0) = 0$
- $v(x) = u(\Psi(x))$, $u(x) = v(\Phi(x))$
- v erfüllt quasilineare pDgl.

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha v + b_0 = 0 \qquad (*)$$

mit b_α, b_0 analytisch und

- $b_{(0,\dots,0,k)} \neq 0$ auf $\{x_n = 0\}$, denn

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}(D\Phi_n)^\alpha + \text{Terme ohne } \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha u + a_0 = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D\Phi_n)^\alpha \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k} + \text{Terme ohne } \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}$$

$$\Rightarrow b_{(0,\dots,0,k)} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D\Phi_n)^\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ D\Phi_n \text{ parallel zu } \nu}}{=} \text{const.} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu^\alpha \neq 0$$

$\Rightarrow$ noch zu zeigen: v existiert & ist analytisch um 0.

(2) Ermittle partielle Ableitungen von u auf Γ (bzw. v auf $\{x_n = 0\}$)

- $v = h_0 = g\circ\Psi, \dots, \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x_n^{k-1}} = h_{k-1}$ auf $\{x_n = 0\}$, $h_0, \dots, h_{k-1}$ analytisch
- 1. Ordn.: tangential: $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial h_0}{\partial x_i}$, $i \neq n$

  normal $\frac{\partial v}{\partial x_n} = h_1$
- 2. Ordn.: $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 h_0}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j \neq n$

  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_n} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i}$, $i \neq n$

  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} = h_2$
- $j$te Ordn. ($j<k$): $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|-\alpha_n} h_{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha'}}$ ~~ich~~ mit $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$
- $k$te Ordn.: analog zu $j<k$. $\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \underset{\text{pDgl.}}{=} -\frac{1}{b_{(0,\dots,0,k)}}\left[\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha\neq(0,\dots,0,k)}} b_\alpha D^\alpha u + b_0\right] =: h_k$
- höhere Ordn.: analog zu k, nur benutze $\frac{\partial^{\alpha_n-k}}{\partial x_n^{\alpha_n-k}}$ $(*)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$k$ Normalenableitungen auf nichtcharakteristischer Hyperfläche legen alle partiellen Ableitungen auf der Fläche fest}}$