of which the first term converges to zero due to the weak convergence of u_k and the second due to Hölder's inequality and the uniform convergence. Letting $\varepsilon \to 0$ yields the result.

$\square$

Parabolische pDgln

Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{32}$$

beschreibt die zeitliche Entwicklung einer diffundierenden Größe (z. B. Wärme).
Temperatur: $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ (in einem Stück Material Ω zur Zeit $(0,T)$)
Leitfähigkeit: $a > 0$ (Materialparameter)
Wärmekapazität: $\kappa > 0$ (Materialparameter)
Wärmefluss: $F = -a\nabla u$ (in Richtung des negativen Temperaturgradienten)
Nettofluss: $-\int_{\partial V} F \cdot \nu \,\mathrm{d}x$ nach $V \subset \Omega$
Wärmeänderung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \kappa u \,\mathrm{d}x$ in V
Wärmeänderung = Nettofluss $\Longrightarrow$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \kappa u \,\mathrm{d}x + \int_{\partial V} F \cdot \nu \,\mathrm{d}x = \int_V \kappa u_t + \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x = \int_V \kappa u_t - a\Delta u \,\mathrm{d}x,$$

und (32) folgt für $\kappa = a$, da V beliebig ist.

Parabolische Gleichungen sind eng mit elliptischen verwandt, daher folgen wir etwa den elliptischen Methoden. Diesmal beginnen wir jedoch mit der Fundamentallösung, da Mittelwertformeln und Maximumsprinzipien dann einfacher folgen.

Suche nach einer einfachen, radialsymmetrischen Lösung, z. B. der Form

$$u(t,x) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta} r)$$

mit $r = |x|$. Mit $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r$ und $y = t^{-\beta} r$ ergibt sich

$$-\alpha t^{-\alpha-1} v(y) - \beta t^{-\alpha-1} y v'(y) - t^{-\alpha-2\beta} v''(y) + \tfrac{n-1}{y} t^{-\alpha-2\beta} v'(y) = 0.$$

Wähle $\beta = \frac{1}{2}$. Mit $\alpha = \frac{n}{2}$ wird dies zu

$$0 = [y^{n-1} v' + \tfrac{1}{2} y^n v]' = [v y^{n-1}(\log v + \tfrac{y^2}{4})']',$$

d. h. eine Lösung ist $v = c\exp(-\frac{y^2}{4})$.

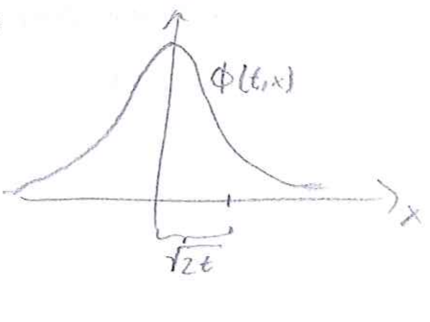
Definition 83 (Fundamentallösung). *Die Funktion*

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

löst (32) *auf* $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}^n$ *und heißt* Fundamentallösung *der Wärmeleitungsgleichung.*

Bemerkung 84. *Zur Zeit $t > 0$ ist die Fundamentallösung offensichtlich eine n-dimensionale Normalverteilung/Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{2t}$.*

$n = 1$:

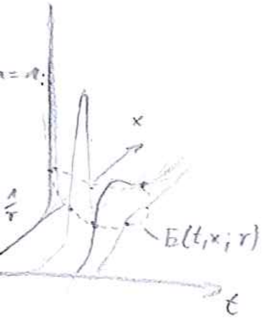


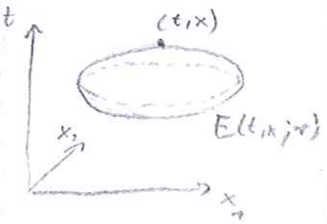
$$\text{Polarkoordinaten}$$

Beweis. $n=1$: $\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} dx\,dy = \int_{r=0}^{\infty} 2\pi r \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr = \left[-e^{-\frac{r^2}{4t}}\right]_{r=0}^{\infty} = 1$

$n>1$: $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x_i|^2}{4t}} dx_i = 1$

□





Definiere:
- $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$
- $\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T = \{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega$
- *Wärmeball* für $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (ein Levelset der Fundamentallösung)

$$E(t,x;r) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \le t,\ \Phi(t-s, x-y) \ge \tfrac{1}{r^n}\right\}.$$

Theorem 85 (Mittelwertformel). *$u \in C^1((0,T]; C^2(\Omega;\mathbb{R}))$ löse (32) in Ω_T, dann gilt*

$$u(t,x) = \overbrace{\frac{1}{4r^n} \int_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}s}^{=:U(r)} \tag{33}$$

für jedes $E(x,t;r) \subset \Omega_T$. (Beachte: Formel integriert nur über Vergangenheit!)

Beweis. OBdA $t=0$, $x=0$. $U(r) = \frac{1}{4}\int_{E(0,0;1)} u(r^2\tilde{s}, r\tilde{y}) \frac{|0-\tilde{y}|^2}{(0-\tilde{s})^2} d\tilde{y}\, d\tilde{s}$.

$U'(r) = \frac{1}{4}\int_{E(0,0;1)} 2rs\, u_t(r^2 s, ry) \frac{y^2}{s^2} + y\cdot u_x(r^2 s, ry) \frac{y^2}{s^2}\, dy\,ds = \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(0,0;r)} \nabla u(s,y)\cdot y \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s}\, dy\,ds = A + B$.

Sei $\Psi = \log(r^n \Phi(-s,y)) = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r$; wegen $\Phi(-s,y) = r^{-n}$ auf $\partial E(0,0;r)$ ist dort $\Psi = 0$.

$B = \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(0,0;r)} 4u_s\, y\cdot\nabla\Psi\, dy\,ds \underset{\text{part. Int.}}{=} -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0;r)} \Psi n u_s + \Psi y\cdot\nabla u_s\, dy\,ds \underset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0;r)} -\Psi n u_s + \underbrace{\Psi_s}_{\substack{\parallel \\ -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}}} y\cdot\nabla u\, dy\,ds$

$= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0;r)} -\Psi n \Delta u - \frac{n}{2s} y\cdot\nabla u\, dy\,ds - A = \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0,0;r)} n\nabla\Psi\cdot\nabla u - \frac{n}{2s} y\cdot\nabla u\, dy\,ds - A = -A$

$\Rightarrow U'(r) = 0 \Rightarrow U(r) = \lim_{\rho\to 0} U(\rho) = u(0,0) \underbrace{\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{4\rho^n} \int_{E(0,0;\rho)} \frac{|y|^2}{s^2} dy\,ds}_{= \frac{1}{4}\int_{E(0,0;1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy\,ds = 1}$

□

Theorem 86 (Starkes Maximumsprinzip). *$u \in C^1((0,T]; C^2(\Omega;\mathbb{R})) \cap C(\Omega_T)$ löse (32) in Ω_T, dann gilt*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Ist $u(t,x) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$ für $(t,x) \in \Omega_T$, so ist u konstant auf Ω_t (falls Ω zusammenhängend ist) *(Analog für Minima durch Ersetzen von u mit $-u$.)*

Wie kann dies physikalisch interpretiert werden?