nicht auf Γ_T

Beweis. Sei $M = u(x,t)$ ein Maximum. Es ist $M \overset{\text{Thm 85}}{=} \frac{1}{4r^n} \int_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{|t-s|^2} \,dy\,ds \leq M$, da $\int_{E(t,x;r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \,dy\,ds = 1$. Gleichheit $\Leftrightarrow u \equiv M$ auf $E(t,x;r)$. Um jeden Punkt (s,y) von $E(t,x;r)$ kann wieder ein Wärmeball gezeichnet werden, auf dem $u \equiv M$
$\Rightarrow$ so kann Ω_t mit Wärmebällen überdeckt werden, auf denen u jeweils gleich M ist.

□

Bemerkung 87 (Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit). *$u \in C^1((0,T]; C^2(\Omega;\mathbb{R})) \cap C(\Omega_T)$ löse das Anfangs-Randwert-Problem*

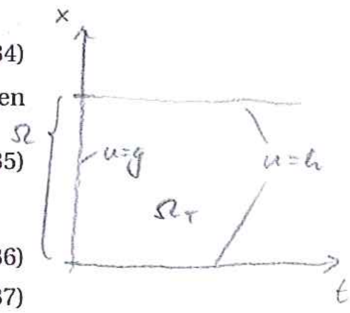
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega_T \\ u = 0 & \text{auf } [0,T] \times \partial\Omega \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

für $g \geq 0$. Aus dem Maximumsprinzip folgt

$$(\exists x \in \Omega : g(x) > 0) \quad \Rightarrow \quad u > 0 \text{ auf } \Omega_T,$$

d. h. die Anfangswert-Information ist unendlich schnell überall hingeflossen.

Inhomogene Wäremeleitung



$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \tag{34}$$

hat einen Quellterm f. Adäquate Randbedingungen für parabolische Gleichungen sind eine Anfangsbedingung

$$u = g \text{ für } t = 0 \tag{35}$$

und eine Dirichlet- oder Neumann-Randbedingung

$$u = h \text{ auf } \partial\Omega \text{ oder} \tag{36}$$

$$\partial u / \partial \nu = h \text{ auf } \partial\Omega. \tag{37}$$

Theorem 88 (Eindeutigkeit). *Sei $g \in C(\Omega)$, $h \in C([0,T] \times \partial\Omega)$, dann ist eine Lösung $u \in C^1((0,T]; C^2(\Omega;\mathbb{R})) \cap C(\Omega_T)$ von (34)-(36) eindeutig.*

Beweis. Folgt aus starkem Maximumsprinzip für $u - \tilde{u}$, wenn $u, \tilde{u}$ zwei Lösungen sind. □

Theorem 89 (Fundamentallösung). *Es gilt*

$$\begin{cases} \mathscr{L}[\Phi] := \Phi_t - \Delta\Phi = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \Phi \to 0 \text{ für } |x| \to \infty & \\ \Phi(0,x) = \delta(x) & \end{cases}$$

in dem Sinn, dass für jedes $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x) f(x) \,dx = f(0).$$

Beweis. Nebenrechnung:

$$\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx}_{=:A_t}\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]\times[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\,dx\,dy$$

$$\le \int_{r=\frac{1}{2}\sqrt[4]{t}}^{\infty} 2\pi r \frac{1}{4\pi t} e^{-r^2/4t}\,dr = \left[-e^{-r^2/4t}\right]_{r=\frac{1}{2}\sqrt[4]{t}}^{\infty} = e^{-1/16\sqrt{t}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x) f(x)\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} \Phi(t,x) f(x)\,dx}_{\text{betragsmäßig } \le A_t^n \max_{\mathbb{R}^n}|f| \xrightarrow[t\to 0]{} 0} + \underbrace{\int_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} \Phi(t,x) f(x)\,dx}_{\text{liegt zwischen } \left(\min_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} f\right)(1-A_t) \text{ und } \left(\max_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} f\right)(1-A_t);\ \text{beides} \xrightarrow[t\to 0]{} f(0)}$$

□

Bemerkung 90. *Alternativ (und vielleicht näher zu unserer Vorgehensweise für elliptische Gleichungen) kann* Φ *aufgefasst werden als Lösung zu*

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = \delta & \mathit{auf}\, \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ \Phi(0,x) = 0. \quad \overset{\phi\to 0}{} \text{ für } |x|\to\infty \end{cases}$$

Beweis. Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta\Phi) f\,dx = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\setminus[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} \begin{pmatrix}\partial_t\\ \nabla\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Phi\\ -\nabla\Phi\end{pmatrix} f\,dt\,dx + \int_{[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} (\Phi_t - \Delta\Phi) f\,dt\,dx$

$$= \int_{\partial([0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0))} \begin{pmatrix}\Phi\\ -\nabla\Phi\end{pmatrix}\cdot\nu\, f\,dt\,dx - \int_{[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} \Phi f_t - \nabla\Phi\cdot\nabla f\,dt\,dx = \underbrace{\int_{\partial([0,s^{3/2}]\times B_s(0))} \begin{pmatrix}\Phi\\ -\nabla\Phi\end{pmatrix}\cdot\nu\, f + \Phi\begin{pmatrix}0\\ \nabla f\end{pmatrix}\cdot\nu\,dt\,dx}_{=:A} - \underbrace{\int_{[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} \Phi f_t + \Phi\Delta f\,dt\,dx}_{\text{betragsmäßig } \le \int_0^{s^{3/2}} \underbrace{\int_{B_s(0)} \Phi\,dx}_{\le 1}\,dt\cdot\text{const} \xrightarrow[s\to 0]{} 0}$$

$$A = \underbrace{\int_{B_s(0)} \Phi(s^{3/2},x) f(s^{3/2},x)\,dx}_{\xrightarrow[s\to 0]{} f(0,0)} - \underbrace{\int_0^{s^{3/2}} \int_{\partial B_s(0)} \partial_\nu\Phi f - \Phi\partial_\nu f\,dx\,dt}_{\le \text{const.}\cdot \underbrace{|\partial B_s(0)|}_{\sim s^{n-1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n}\left(e^{-s^2/4t} + \frac{s}{2t}e^{-s^2/4t}\right)}_{\le \text{const.}\,\frac{1}{s^{3n/4}} e^{-\sqrt{s}/4}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{s}}\right)} \xrightarrow[s\to 0]{} 0}$$

(↑ betragsmäßig)

□

Im selben Sinn wie zuvor, betrachte nun die Lösung des zu (34)-(36) *adjungierten Problems* (eine Diffusion rückwärts in der Zeit)

$$\begin{cases} \mathscr{L}^*[G^{(s,y)}] := -G_t^{(s,y)} - \Delta G^{(s,y)} = 0 & \text{auf } (0,s)\times\Omega \\ G^{(s,y)}(t,x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ G^{(s,y)}(t,x) = \delta(x-y) & \text{zu } t = s \end{cases} \tag{38}$$

Motivation: Wenn wir $G^{(s,y)}$ für alle (s,y) finden, gilt (informell; formaler Beweis wie bei elliptischen Differentialgleichungen)

$$\int_{\Omega_s} (G^{(s,y)}\mathscr{L}[u] - u\mathscr{L}^*[G^{(s,y)}])\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\Omega_s} \partial_t(G^{(s,y)}u) + \nabla(uG_x^{(s,y)} - G^{(s,y)}u_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{[0,s]\times\partial\Omega} u\partial_\nu G^{(s,y)} - G^{(s,y)}\partial_\nu u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega G^{(s,y)}u|_{t=s} - G^{(s,y)}u|_{t=0}\,\mathrm{d}x$$