Beweis. Nebenrechnung:

$$\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx}_{=:A_t}\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]\times[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\,dx\,dy$$

$$\le \int_{r=\frac{1}{2}\sqrt[4]{t}}^{\infty} 2\pi r \frac{1}{4\pi t} e^{-r^2/4t}\,dr = \Big[-e^{-r^2/4t}\Big]_{r=\frac{1}{2}\sqrt[4]{t}}^{\infty} = e^{-1/16\sqrt{t}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x) f(x)\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} \Phi(t,x) f(x)\,dx}_{\text{betragsmäßig } \le A_t^n \max_{\mathbb{R}^n}|f| \xrightarrow[t\to 0]{} 0} + \underbrace{\int_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} \Phi(t,x) f(x)\,dx}_{\text{liegt zwischen } \left(\min_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} f\right)(1-A_t) \text{ und } \left(\max_{[-\sqrt[4]{t},\sqrt[4]{t}]^n} f\right)(1-A_t);\ \text{beides} \xrightarrow[t\to 0]{} f(0)}$$

□

Bemerkung 90. *Alternativ (und vielleicht näher zu unserer Vorgehensweise für elliptische Gleichungen) kann* Φ *aufgefasst werden als Lösung zu*

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = \delta & \mathit{auf}\,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ \Phi(0,x) = 0. & \end{cases}$$

$\Phi \to 0$ für $|x| \to \infty$

Beweis. Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta\Phi) f\,dx = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\setminus[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} \underbrace{\begin{pmatrix}\partial_t\\ \nabla\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Phi\\ -\nabla\Phi\end{pmatrix}}_{=0} f\,dt\,dx + \int_{[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} (\Phi_t - \Delta\Phi) f\,dt\,dx$

$$= \int_{\partial([0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0))} \begin{pmatrix}\Phi\\ -\nabla\Phi\end{pmatrix}\cdot\nu\, f\,dt\,dx - \int_{[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} \Phi f_t - \nabla\Phi\cdot\nabla f\,dt\,dx = \underbrace{\int_{\partial([0,s^{3/2}]\times B_s(0))} \begin{pmatrix}\Phi\\ -\nabla\Phi\end{pmatrix}\cdot\nu\, f + \Phi\begin{pmatrix}0\\ \nabla f\end{pmatrix}\cdot\nu\,dt\,dx}_{=:A} - \underbrace{\int_{[0,s^{\frac{3}{2}}]\times B_s(0)} \Phi f_t + \Phi\Delta f\,dt\,dx}_{\text{betragsmäßig } \le \int_0^{s^{3/2}} \underbrace{\int_{B_s(0)} \Phi\,dx}_{\le 1}\,dt\cdot\text{const} \xrightarrow[s\to 0]{} 0}$$

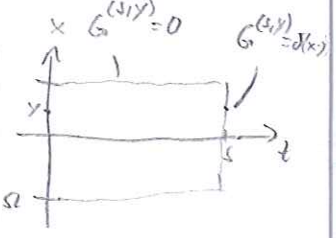
$$A = \underbrace{\int_{B_s(0)} \Phi(s^{3/2},x) f(s^{3/2},x)\,dx}_{\xrightarrow[s\to 0]{} f(0,0)} - \underbrace{\int_0^{s^{3/2}}\int_{\partial B_s(0)} \partial_\nu\Phi f - \Phi\partial_\nu f\,dx\,dt}_{\le \text{const.}\cdot\underbrace{|\partial B_s(0)|}_{\sim s^{n-1}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n}\left(e^{-s^2/4t} + \frac{s}{2t}e^{-s^2/4t}\right)}_{\le \text{const.}\frac{1}{s^{3n/4}} e^{-\sqrt{s}/4}\left(1+\frac{2}{2\sqrt{s}}\right)} \xrightarrow[s\to 0]{} 0}$$

betragsmäßig

□

für festes (s,y)

Im selben Sinn wie zuvor, betrachte nun die Lösung des zu (34)-(36) *adjungierten Problems* (eine Diffusion rückwärts in der Zeit)



$$\begin{cases} \mathscr{L}^*[G^{(s,y)}] := -G_t^{(s,y)} - \Delta G^{(s,y)} = 0 & \text{auf } (0,s)\times\Omega \\ G^{(s,y)}(t,x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ G^{(s,y)}(t,x) = \delta(x-y) & \text{zu } t = s \end{cases} \tag{38}$$

Motivation: Wenn wir $G^{(s,y)}$ für alle (s,y) finden, gilt (informell; formaler Beweis wie bei elliptischen Differentialgleichungen)

$$\int_{\Omega_s} (G^{(s,y)}\mathscr{L}[u] - u\mathscr{L}^*[G^{(s,y)}])\,dx\,dt = \int_{\Omega_s} \partial_t(G^{(s,y)}u) + \nabla\cdot(uG_x^{(s,y)} - G^{(s,y)}u_x)\,dx\,dt = \int_{\Omega_s} \begin{pmatrix}\partial_t\\ \nabla\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}G^{(s,y)}u\\ uG_x^{(s,y)} - G^{(s,y)}u_x\end{pmatrix} dx\,dt$$

$$= \int_{[0,s]\times\partial\Omega} u\partial_\nu G^{(s,y)} - G^{(s,y)}\partial_\nu u\,dx\,dt + \int_\Omega G^{(s,y)}u|_{t=s} - G^{(s,y)}u|_{t=0}\,dx$$

und somit

$$u(s,y) = \int_{\Omega_s} G^{(s,y)} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{\{0\}\times\Omega} G^{(s,y)} g \, \mathrm{d}x - \int_{[0,s]\times\partial\Omega} h \, \partial_\nu G^{(s,y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,$$

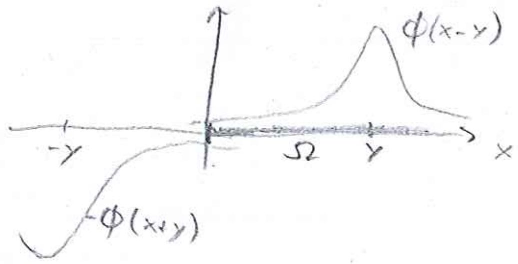
eine *Greensche Darstellung* der Lösung.

Beispiel 91 (Greensche Funktion für Halbraum). $G^{(s,y)}$ *für* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ *kann wieder mit der* method of images *gefunden werden:*

$$G^{(s,y)}(t,x) = \Phi(s-t, x-y) - \Phi(s-t, x+y)$$

erfüllt (38).

für festes s, t:



Hyperbolic PDEs

Wave equation

Schwache Lsgen zu parabolischen Dgln 2. Ordn.

Erinnerung: • $H_0^1(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f|^2 dx < \infty$, schw. Abl. Df existiert, $\int_\Omega |Df|^2 dx$, $f|_{\partial\Omega} = 0 \}$

• Banachraum = normierter, vollständiger (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert) Vektorraum

• Dualraum X^* zu Banachraum $X = \{ f: X \to \mathbb{R} \mid f$ ist linear, $\|f\|_{X^*} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} f(x) < \infty \}$

Def.: $H^{-1}(\Omega)$ bezeichnet den Dualraum zu $H_0^1(\Omega)$.
Für $f \in H^{-1}(\Omega)$ schreiben wir auch $\langle f, v \rangle$ statt $f(v)$.
$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1}} \langle f, u \rangle .$$

Thm ($H^{-1}(\Omega)$): (i) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$, dann gibt es Fktn $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$ mit
$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f^0 v \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i v_{x_i} \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (*)$$
(ii) $$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf_{f^i \text{ erfüllen } (*)} \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}$$
(iii) $$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u v \, dx = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

Bew: (i) $H_0^1(\Omega)$ ist mit Skalarprodukt $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + Du \cdot Dv \, dx$ ein Hilbertraum.

$\underset{\text{Rieszscher Darstellungssatz}}{\Longrightarrow}$ jedes $f \in H^{-1}(\Omega)$ kann dargestellt werden durch ein $u_f \in H_0^1(\Omega)$,
d.h. $\langle f, v \rangle = (u_f, v)_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ es folgt (i) mit $f^0 = u_f$, $f^i = (u_f)_{x_i}$

(ii) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ mit $\langle f, v \rangle = \int_\Omega g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} \, dx$ für $g^0, \dots, g^n \in L^2(\Omega)$

Es gilt
$$\int_\Omega g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} \, dx \underset{\text{Hölder}}{\le} \|g^0\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \|g^i\|_{L^2} \|v_{x_i}\|_{L^2} \underset{\vec{a} \cdot \vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}| \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}}{\le} \sqrt{\sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2}^2} \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L^2}^2}$$
$$= \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx} \; \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad (**)$$

Nun
$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1} \langle f, u \rangle = \sup_{\|u\|_{H_0^1} \le 1} \int_\Omega g^0 u + \sum_{i=1}^n g^i u_{x_i} \, dx \underset{(**)}{\le} \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx}$$

und
$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \ge \left\langle f, \frac{u_f}{\|u_f\|_{H_0^1}} \right\rangle = \frac{\int_\Omega f^0 u + \sum_{i=1}^n f^i u_{x_i} \, dx}{\sqrt{\int_\Omega u_f^2 + |Du_f|^2 dx}} = \frac{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}{\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}} = \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}$$

(iii) folgt aus (i) $\square$

Def.: • $L^p((0,T); X) := \{ u: (0,T) \to X \mid u$ ist stark messbar (d.h. es existiert eine f.ü. gegen u konvergente Folge ~~stückweise~~ von Treppenfunktionen) & $\|u\|_{L^p((0,T);X)} < \infty \}$, wobei X Banachraum

mit
$$\|u\|_{L^p((0,T);X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty$$
$$\|u\|_{L^\infty((0,T);X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|u(t)\|$$

• $C([0,T]; X) := \{ u: [0,T] \to X \mid u$ stetig, $\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\| < \infty \}$