Schwache Lsgen zu parabolischen Dgln 2. Ordn.

Erinnerung: • $H_0^1(\Omega) = \{ f:\Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f|^2 dx < \infty$, schw. Abl. Df existiert, $\int_\Omega |Df|^2 dx$, $f|_{\partial\Omega} = 0 \}$

• Banachraum = normierter, vollständiger (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert) Vektorraum

• Dualraum X^* zu Banachraum $X = \{ f: X \to \mathbb{R} \mid f$ ist linear, $\|f\|_{X^*} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} f(x) < \infty \}$

Def.: $H^{-1}(\Omega)$ bezeichnet den Dualraum zu $H_0^1(\Omega)$.
Für $f \in H^{-1}(\Omega)$ schreiben wir auch $\langle f, v \rangle$ statt $f(v)$.

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1}} \langle f, u \rangle .$$

Thm ($H^{-1}(\Omega)$): (i) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$, dann gibt es Fktn $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$ mit

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f^0 v \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i v_{x_i} \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (*)$$

(ii) $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf_{f^i \text{ erfüllt } (*)} \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}$

(iii) $(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u v \, dx = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$

Bew: (i) $H_0^1(\Omega)$ ist mit Skalarprodukt $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + Du \cdot Dv \, dx$ ein Hilbertraum.

$\xRightarrow[\text{Darstellungssatz}]{\text{Rieszscher}}$ jedes $f \in H^{-1}(\Omega)$ kann dargestellt werden durch ein $u_f \in H_0^1(\Omega)$,
d.h. $\langle f, v \rangle = (u_f, v)_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ es folgt (i) mit $f^0 = u_f$, $f^i = (u_f)_{x_i}$

(ii) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ mit $\langle f, v \rangle = \int_\Omega g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} dx$ für $g^0, \dots, g^n \in L^2(\Omega)$

Es gilt $\int_\Omega g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} dx \underset{\text{Hölder}}{\le} \|g^0\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \|g^i\|_{L^2} \|v_{x_i}\|_{L^2} \underset{\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}| \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}}{\le} \sqrt{\sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2}^2} \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L^2}^2}$

$$= \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx} \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad (**)$$

Nun $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1} \langle f, u \rangle = \sup_{\|u\|_{H_0^1} \le 1} \int_\Omega g^0 u + \sum_{i=1}^n g^i u_{x_i} dx \underset{(**)}{\le} \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx}$

und $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \ge \langle f, \frac{u_f}{\|u_f\|_{H_0^1}} \rangle = \dfrac{\int_\Omega f^0 u_f + \sum_{i=1}^n f^i (u_f)_{x_i} dx}{\sqrt{\int_\Omega u_f^2 + |Du_f|^2 dx}} = \dfrac{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}{\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}} = \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx}$

(iii) folgt aus (i) □

Def: • $L^p((0,T); \underset{\text{Banachraum}}{X}) := \{ u:(0,T) \to X \mid u$ ist stark messbar (d.h. es existiert eine f.ü. gegen u konvergente Folge ~~stückweise~~ von Treppenfunktionen) & $\|u\|_{L^p((0,T);X)} < \infty \}$

mit $\|u\|_{L^p((0,T);X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$

$\|u\|_{L^\infty((0,T);X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|u(t)\|$

• $C([0,T];X) := \{ u:[0,T] \to X \mid u$ stetig, $\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\| < \infty \}$

Def: Sei $u \in L^1((0,T);X)$. $v \in L^1((0,T);X)$ heißt schwache Ableitung von u, $u' = v$,

wenn $$\int_0^T \phi'(t)\,u(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)\,v(t)\,dt \quad \forall \phi \in C_c^\infty((0,T);\mathbb{R}).$$

Man kann zeigen: $u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ & $u' \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$ impliziert
(Evans, Kap. 5.9)

- $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$
- $\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t 2\langle u'(t),u(t)\rangle\,dt$

(bzw. „$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2} = \frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^2\,dx = \int_\Omega 2\,u'(t)\,u(t)\,dx$ ")

Betrachte nun
$$\left\{\begin{array}{ll} u_t + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u = g & \text{auf } \{0\}\times\Omega \end{array}\right\} \quad \text{mit } f \in L^2(\Omega_T),\ g \in L^2(\Omega) \qquad (A)$$

& $Lu = -\mathrm{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu$, $A, b, c \in L^\infty(\Omega_T)$, A symm. posdef. mit kleinstem Eigenwert λ.

Idee für schwache Lsg.:
- Fasse u auf als Funktion $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ (analog $f : [0,T] \to L^2(\Omega)$)
- Definiere Bilinearform $B_t[u,v] := \int_\Omega \nabla u \cdot A\nabla v + b\cdot\nabla u\, v + cuv\,dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega)$
  $\left(= \int_\Omega Lu \cdot v\,dx\right)$
- Multipliziere $u_t + Lu = f$ mit $v \in H_0^1(\Omega)$ und integriere partiell
  $\Rightarrow (u_t(t),v)_{L^2(\Omega)} + B_t[u(t),v] = (f(t),v)_{L^2(\Omega)}$
- außerdem $u_t = g^0 + \sum_{i=1}^n g^i_{x_i}$
  mit $g^0 = f - \cancel{\sum_{i=1}^n f_i}\, b\cdot\nabla u - cu$, $g^i = \sum_{i=1}^n A_{ij}u_{x_i}$, d.h.
  $\|u_t\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \sqrt{\sum_{i=0}^n \|g^i\|^2_{L^2}} \le C\left(\|u\|^*_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$

Def (schw. Lsg.): $u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ mit $u' \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$ heißt schwache Lsg von (A),
wenn $\langle u',v\rangle + B_t[u,v] = (f,v)_{L^2}$ für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$ und f.a. $t \in [0,T]$
sowie $u(0) \underset{\uparrow}{=} g$.
macht Sinn, da $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$

Galerkin-Approximation

Sei Ω Lipschitz. $L^2(\Omega)$ & $H_0^1(\Omega)$ sind Hilberträume. Man kann zeigen (Evans Kap. 6.5.1), dass glatte Funktionen $w_k \in H_0^1(\Omega)$ existieren, $k = 1, 2, \dots$, sodass

(i) $w_1, w_2, \dots$ bilden eine orthogonale Basis von $H_0^1(\Omega)$

(ii) $w_1, w_2, \dots$ bilden eine orthonormale Basis von $L^2(\Omega)$

Für festes $m \in \mathbb{N}$ approximieren wir nun eine schw. Lsg. in $\mathrm{span}(w_1,\dots,w_m)$, d.h. wir suchen
$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_k^m(t)\,w_k$$
mit Koeffizienten $d_k^m : [0,T] \to \mathbb{R}$ sodass
$$\left.\begin{array}{ll} (u_m', w_k)_{L^2} + B_t[u_m, w_k] = (f, w_k)_{L^2} & \forall t \in [0,T],\ k = 1,\dots,m \\ \underbrace{(u_m(0), w_k)_{L^2}}_{d_m^k(0)} = (g, w_k) & \forall k \end{array}\right\} \quad (B)$$

Thm: (Existenz der Galerkin-Approx.) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutige Lsg. $u_m = \sum_{k=1}^m d_k^m w_k$ von (B).

Bew: Sei $B_t[w_\ell, w_k] = e_{k\ell}(t)$, $D_m(t) = \begin{pmatrix} d_m^1(t) \\ \vdots \\ d_m^m(t) \end{pmatrix}$, $E(t) = (e_{k\ell}^{(t)})_{k,\ell=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $F(t) = \begin{pmatrix} (f(t), w_1)_{L^2} \\ \vdots \\ (f(t), w_m)_{L^2} \end{pmatrix}$.

(B) $\iff D_m'(t) + E(t) D_m(t) = F(t)$ bzw. $D_m'(t) = -E(t) D_m(t) + F(t)$ mit $D_m(0) = \begin{pmatrix} (g, w_1)_{L^2} \\ \vdots \\ (g, w_m)_{L^2} \end{pmatrix}$.

Beachte: rechte Seite ist für jedes t Lipschitzstetig in D_m

$\underset{\substack{\text{ein tiefer Satz} \\ \text{für gewöhnliche Dgln}}}{\Longrightarrow}$ es existiert eindeutige Lsg. $D_m(t)$. □

Wie bei den ell. pDgln. wollen wir annehmen $\exists\, \lambda, \Lambda, \gamma > 0$:

$\xi^T A(t,x) \xi \geq \lambda |\xi|^2$

$|\xi^T A\, \zeta| \leq \Lambda |\xi| |\zeta|$

$\lambda^{-2} |b(t,x)|^2 + \lambda^{-1} |c(t,x)|^2 \leq \gamma^2$, $c(t,x) \geq 0$

Thm (Energieabschätzung): $\exists\, C_1 > 0$ unabh. von m, sodass

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m\|_{L^2((0,T); H_0^1(\Omega))} + \|u_m'\|_{L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))} \leq C_1 \left(\|f\|_{L^2((0,T); L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Bew: Multipliziere (B) mit d_k^m und summiere $\sum_{k=1}^m$

$\Rightarrow (u_m', u_m)_{L^2} + B_t[u_m, u_m] = (f, u_m)_{L^2}$

Wir hatten gezeigt (Thm. 71 bzw. Hausaufg. 9): $\beta \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B_t[u_m, u_m] + \gamma \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$ für Konstanten $\beta, \gamma > 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}}{2}}_{= \langle u_m', u_m \rangle} + \beta \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \underbrace{\langle u_m', u_m \rangle + B_t[u_m, u_m]}_{= (f, u_m)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \underbrace{f u_m}_{\leq \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2} u_m^2} dx} + \gamma \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma + \tfrac{1}{2}) \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (C_1)$$

Mit $\eta(t) := \|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\xi(t) := \frac{1}{2} \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ ergibt sich

$$\eta'(t) \leq \xi(t) + (\gamma + \tfrac{1}{2}) \eta(t)$$

$$\underset{\substack{\text{Gronwall Lemma,} \\ \text{siehe unten}}}{\Longrightarrow} \eta(t) \leq e^{(\gamma + \frac{1}{2}) t} \Big(\underbrace{\eta(0)}_{= (u_m(0), u_m(0))_{L^2} = \sum_{k=1}^m |d_k^m(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty |d_k^m(0)|^2 = \|g\|^2_{L^2}} + \underbrace{\int_0^t \xi(s)\, ds}_{= \frac{1}{2} \|f\|^2_{L^2((0,T); L^2(\Omega))}} \Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{t\in[0,T]} \|u_m\|_{L^2} \leq C_1 \sqrt{\|g\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2((0,T); L^2(\Omega))}} \leq \tilde{C}_1 \left(\|g\|_{L^2} + \|f\|_{L^2((0,T); L^2(\Omega))} \right)}$$

Integriere nun (C_1) von 0 bis T $\Rightarrow$ $\frac{\|u_m(T)\|^2_{L^2} - \|u_m(0)\|^2_{L^2}}{2} + \beta \|u_m\|^2_{L^2((0,T); H_0^1(\Omega))} \leq \frac{\|f\|^2_{L^2((0,T); L^2(\Omega))}}{2} + (\gamma + \frac{1}{2}) \underbrace{\int_0^T \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} dt}_{\leq T \max_{t\in[0,T]} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}}$

$$\Rightarrow \boxed{\|u_m\|^2_{L^2((0,T); H_0^1(\Omega))} \leq C_1 \left(\|f\|^2_{L^2((0,T); L^2(\Omega))} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \right)}$$

Nun sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig mit $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$

$$\langle u_m', v \rangle = (u_m', v)_{L^2} \underset{w_k \text{ orthonormale Basis}}{=} \Big(u_m', \sum_{k=1}^\infty (v, w_k) w_k\Big)_{L^2} \underset{u_m' \in \operatorname{span}(w_1, \dots, w_m)}{=} \Big(u_m', \overbrace{\sum_{k=1}^m (v, w_k) w_k}^{=: v_m}\Big)_{L^2}$$

$$\underset{(B)}{=} -B_t[u_m, v_m] + (f, v_m)_{L^2} \leq C_1 \left(\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \underbrace{\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}}_{\leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1}$$

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{H^{-1}(\Omega)} \le C' \left(\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^T \|u_m'\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \le 2C' \left(\|u_m\|^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} + \|f\|^2_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}\right)} \quad \square$$

Lemma (Gronwall): ~~Let $\eta(\cdot) \ge 0$ be absolutely continuous (the integral of sth.~~
Sei $\eta(t) \ge 0$ absolut stetig (d.h. $\eta(t) = \int_{t_0}^t \dots ds$) mit $\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$ f.ü. für $\phi, \psi \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}} |\phi| + |\psi| \, dt < \infty$. Dann gilt

$$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds\right]$$

Bew: $\frac{d}{ds}\left(\eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\right) = e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \underbrace{\left(\eta'(s) - \eta(s)\phi(s)\right)}_{\le \psi(s)}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{integriere von 0 bis } t}}{\Rightarrow} \eta(t) e^{-\int_0^t \phi(s)ds} \le \eta(0) + \int_0^t \underbrace{\psi(s) e^{-\int_0^s \phi(r)dr}}_{\le \psi(s)} ds \quad \square$$

Thm (Existenz schw. Lsgen) (A) hat eine schw. Lsg.

Bew: 1) • u_m & u_m' sind wegen Energieabsch. gleichm. beschränkt in $X := L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ bzw. $L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$

• X ist Hilbertraum mit Skalarprod. $(u,v) = \int_0^T \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx dt$

$\underset{\text{Rieszscher Darstellungssatz}}{\Rightarrow}$ jedes Element $f \in X^*$ kann mit einem $u_f \in X$ identifiziert werden mit $\|f\|_{X^*} = \|u_f\|_X$

$\Rightarrow X \overset{\text{isometrisch isomorph}}{\cong} X^* \Rightarrow X^* \cong X^{**} \Rightarrow X$ ist reflexiv

• $L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$ ist auch reflexiv (gleiches Argument, da $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^* \cong H_0^1(\Omega)$)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} u_m \xrightarrow{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} u & \text{für Teilfolge} \\ u_m' \xrightarrow{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))} \hat{w} & \text{für Teilfolge} \end{array}}$$

Weiterhin $\boxed{\hat{w} = u'}$, denn sei $\phi \in C_c^\infty((0,T);\mathbb{R})$, $w \in H_0^1(\Omega)$, dann ist

$$\underbrace{\left\langle \int_0^T u_m \phi' dt, w \right\rangle} = \underbrace{\left\langle -\int_0^T u_m' \phi \, dt, w \right\rangle}$$

$$= \int_0^T \langle u_m, \phi' w\rangle dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_0^T \langle u, \phi' w\rangle dt = \left\langle \int_0^T u\phi' dt, w\right\rangle \quad = -\int_0^T \langle u_m', \phi w\rangle dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_0^T \langle \hat{w}, \phi w\rangle dt = \left\langle -\int_0^T \hat{w}\phi \, dt, w\right\rangle$$

$$\Rightarrow \int_0^T u\phi' dt = -\int_0^T \hat{w}\phi \, dt$$

2) Sei $v(t) = \sum_{k=1}^N d_k(t) w_k$ für ein $N \in \mathbb{N}$, d_k glatt, $N < m$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{multipliziere mit } d_k\text{, summiere, integriere}}}{(B) \Rightarrow} \int_0^T \langle u_m', v\rangle dt + \int_0^T B_t[u_m, v] dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt \quad (*)$$

$$\underset{m\to\infty}{\Rightarrow} \int_0^T \langle u', v\rangle dt + \int_0^T B_t[u, v] dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt \quad (**)$$

Dies gilt für alle $v \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, da sich diese durch $\sum_{k=1}^N d_k(t) w_k$ approximieren lassen, d.h. $\int_0^T d(t)\left(\langle u', v\rangle + B_t[u,v] - (f,v)_{L^2}\right) dt = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$, $d(t)$ messbar

$$\Rightarrow \boxed{\langle u', v\rangle + B_t[u,v] = (f,v)_{L^2}} \quad \text{für f.a. } t \in [0,T]$$

3) Sei $v \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$ mit $v(T) = 0$; $(*)$ & $(**)$ liefern

$$\int_0^T -\langle u_m, v'\rangle dt + \int_0^T B_t[u_m, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt + (u_m(0), v(0))$$

$$\int_0^T -\langle u, v'\rangle dt + \int_0^T B_t[u_m, v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt + (u(0), v(0))$$

erste Gl. geht für $m \to \infty$ gegen $\int_0^T -\langle u, v'\rangle + B_t[u,v] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2} dt + (g, v(0)) \Rightarrow u(0) = g$. $\square$