(3) Zeige Konvergenz der Taylorentwicklung von u um x_0 (v um 0)
Dies geht einfacher bei 1.-Ordnungs-systemen.

- OBdA, $h_0 = \dots = h_{k-1} = 0$ (subtrahiere einfach eine geeignete analytische Fkt. von v)
- transformiere in 1. Ordn.-syst.: definiere $w = \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x_n^{k-1}}\right): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{B_j}_{\in\mathbb{R}^{m\times m}}(w, x)\, w_{x_j} + \underbrace{C}_{\in\mathbb{R}^m}(w, x) \\ w = 0 \text{ auf } \{x_n = 0\} \end{cases} \quad (\ast)$$

$w^1_{x_n}, \dots, w^{m-1}_{x_n}$ können durch $(w_{x_j})_{j=1,\dots,n-1}$ ausgedrückt werden, $w^m_{x_n} = \frac{-1}{b_{(0,\dots,0,k)}}\left[\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha v + h_0\right]$

mit B_j, c analytisch, d.h. $B_j(z, x) = \sum_{\gamma,\delta} B_{j\gamma\delta} z^\gamma x^\delta$, $c(z, x) = \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma\delta} z^\gamma x^\delta$
mit einem Konvergenzradius R (d.h. $|x|^2 + |z|^2 < R^2$)

- oBdA sind B_j, c unabhängig von x_n (ansonsten füge Komponente w^{m+1} zu w hinzu mit $w^{m+1} \equiv x_n$, d.h. $w^{m+1}_{x_n} = 1$ als zusätzl. ~~Spalte~~ Zeile in $(\ast)$)
- Potenzreihenansatz: $w = \sum_\alpha w_\alpha x^\alpha$
- drücke w_α aus durch $B_{j\gamma\delta}, c_{\gamma\delta}$:
  - $\alpha_n = 0$: $w_\alpha = \frac{D^\alpha w(0)}{\alpha!} = 0$, da $w = 0$ auf $\{x_n = 0\}$
  - $\alpha_n = 1$: ∂_i Dgl $(\ast)$ $\Rightarrow$ $w^k_{x_n x_i} = \sum_{j=1}^{n-1}\left[B_j(w,x)\, w_{x_j x_i} + B_{j,x_i} w_{x_j} + \sum_{p=1}^m B_{j,w^p} w^p_{x_i} w_{x_j}\right] + c_{x_i} + \sum_{p=1}^m c_{w^p} w^p_{x_i} \underset{\uparrow\, w_{x_i} = 0 \text{ auf } \Gamma}{=} c_{x_i}$ für $i \neq n$

$$\Rightarrow w_\alpha = \frac{D^\alpha w(0)}{\alpha!} = \frac{D^{\alpha'} c(0,0)}{\alpha!} \quad \text{mit } \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$$

  - allgem. α: $D^\alpha w = D^{\alpha'} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} w = D^{\alpha'} \frac{\partial^{\alpha_n - 1}}{\partial x_n^{\alpha_n - 1}} w_{x_n} \underset{\uparrow\,\text{setze } (\ast) \text{ ein}}{=} \text{Polynom}_\alpha(\dots, D_z^\gamma D_x^\delta B_j, \dots, D_z^\gamma D_x^\delta c, \dots, D^\beta w, \dots)$

$$= P_\alpha(\dots, B_{j\gamma\delta}, \dots, c_{\gamma\delta}, \dots, w_\beta, \dots) \text{ für ein Polynom}$$

$P_\alpha = \begin{pmatrix} P_\alpha^1 \\ \vdots \\ P_\alpha^m \end{pmatrix}$ mit nicht-negativen Koeffizienten und $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ für alle Multiindizes β in den Argumenten

$$\Rightarrow w_\alpha = \frac{D^\alpha w}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha!} P_\alpha(\dots)$$

- Wähle $K > 0$ groß genug, $s < R/\sqrt{m+n}$ so dass $|B_{j\gamma\delta}|, |c_{\gamma\delta}| \underset{\uparrow\, \alpha = (\gamma,\delta)}{\leq} \frac{K|\alpha|!}{\alpha!\, s^{|\alpha|}}$
(dies ist möglich, da für $\sqrt{z^2 + x^2} < R$ gilt $|B_{j\gamma\delta} z^\gamma x^\delta|, |c_{\gamma\delta} z^\gamma x^\delta| \leq K$ für ein $K > 0$

$$\Rightarrow |B_{j\gamma\delta}|, |c_{\gamma\delta}| \leq \frac{K}{z^\gamma x^\delta} \leq \frac{K}{s^{|\alpha|}} \leq \frac{K|\alpha|!}{\alpha!\, s^{|\alpha|}})$$

Betrachte $w^*_{x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} B_j^*(w^*, x)\, w^*_{x_j} + c^*(w^*, x)$, $w^* = 0$ auf $\{x_n = 0\}$

für
$$B_j^* = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_{m+n}=0}} \frac{K|\alpha|!}{\alpha!\, s^{|\alpha|}} (z,x)^\alpha \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \frac{Ks}{s - (x_1 + \dots + x_{n-1}) - (z_1 + \dots + z_m)} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$c^* = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_{m+n}=0}} \frac{K|\alpha|!}{\alpha!\, s^{|\alpha|}} (z,x)^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{Ks}{s - (x_1 + \dots + x_{n-1}) - (z_1 + \dots + z_m)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
analytisch mit Konvergenzradius $\frac{s}{\sqrt{m+n}}$

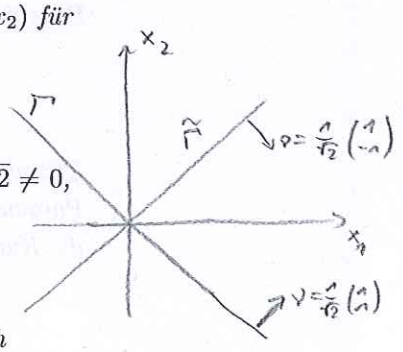
Dies hat Lsg. $w^*(x) = \left[\frac{1}{mn}\left(s - (x_1 + \dots + x_{n-1})\right) - \sqrt{\left(s - (x_1 + \dots + x_{n-1})\right)^2 - 2mnKsx_n}\,\right] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

- w^* ist analytisch für $|x| < r$, r klein genug, d.h. $w^* = \sum_\alpha w^*_\alpha x^\alpha$.
Außerdem
$$|w_\alpha^k| = \frac{1}{\alpha!} P_\alpha^k(\dots, B_{j\gamma\delta}, \dots, c_{\gamma\delta}, \dots, w_\beta, \dots)$$
$$\leq \frac{1}{\alpha!} P_\alpha^k(\dots, |B_{j\gamma\delta}|, \dots, |c_{\gamma\delta}|, \dots, |w_\beta|, \dots) \quad \text{da Koeff. nicht-negativ}$$
$$\leq \frac{1}{\alpha!} P_\alpha^k(\dots, B^*_{j\gamma\delta}, \dots, c^*_{\gamma\delta}, \dots, w^*_\beta, \dots) \quad \text{per Induktion, da } \beta_n \leq \alpha_n - 1$$
$$= w_\alpha^{*k}$$

$\Rightarrow$ w^* majorisiert $w(x) = \sum_\alpha w_\alpha x^\alpha$

$\Rightarrow$ auch $\sum_\alpha w_\alpha x^\alpha$ konvergiert nahe bei 0. $\square$

Beispiel 1. *$u_{x_1} + u_{x_2} = 1$ hat allgemeine Lösung $u = \frac{x_1+x_2}{2} + F(x_1 - x_2)$ für beliebiges $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*



- $\left\{\begin{smallmatrix} u_{x_1}+u_{x_2}=1 \\ u=0 \ auf\ \Gamma=\{x_1=-x_2\}\end{smallmatrix}\right\}$
  impliziert $F(2x_1) = 0\, \forall x_1$, daher $F \equiv 0$ (eindeutige Lösung)
  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = a_{(1,0)}\nu_1^1\nu_2^0 + a_{(0,1)}\nu_1^0\nu_2^1 = \nu_1 + \nu_2 = \sqrt{2} \neq 0,$
  d. h. Γ ist nicht-charakteristisch
- $\left\{\begin{smallmatrix} u_{x_1}+u_{x_2}=1 \\ u=0 \ auf\ \widetilde{\Gamma}=\{x_1=x_2\}\end{smallmatrix}\right\}$.
  impliziert $x_1 + F(0) = 0\, \forall x_1$, daher unlösbar (keine Lösung)
  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$, $\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = \nu_1 + \nu_2 = 0$, *d. h. $\widetilde{\Gamma}$ ist charakteristisch*
- $\left\{\begin{smallmatrix} u_{x_1}+u_{x_2}=1 \\ u=x_1 \ auf\ \widetilde{\Gamma}=\{x_1=x_2\}\end{smallmatrix}\right\}$
  impliziert $x_1 + F(0) = x_1\, \forall x_1$, daher $F(0) = 0$ (unendlich viele Lösungen)
  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$, $\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha \nu^\alpha = 0$, *d. h. $\widetilde{\Gamma}$ ist charakteristisch*

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

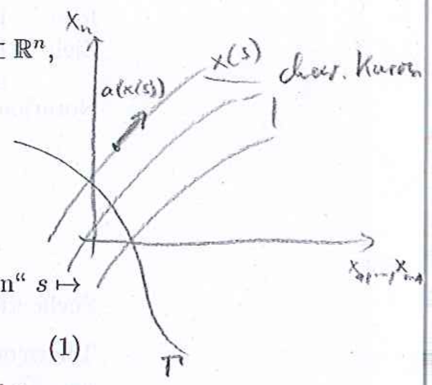
Motivation: Linearer Fall

Betrachte

$$a(x) \cdot \nabla u(x) + a_0(x) = 0$$

mit Randdaten auf einer glatten $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = g(x) \quad \text{auf } \Gamma\,.$$



Die Richtungsableitung von u in Richtung a ist

$$a(x) \cdot \nabla u(x) = -a_0(x)\,,$$

d. h. wir wissen, wie sich u ändert entlang der „charakteristischen Kurven“ $s \mapsto x(s)$ mit

$$\dot{x}(s) := \tfrac{\partial x}{\partial s} = a(x(s))\,. \tag{1}$$

Sei Γ parametrisiert durch $x_0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, x_0(y) \in \Gamma$. Zu $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir s, y finden, sodass $\hat{x} = x(s)$ für eine Lösung $x(s)$ von (1) mit $x(0) = x_0(y)$, d. h. wir reparametrisieren $\mathbb{R}^n$ durch eine Funktion $\hat{x} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, (y, s) \mapsto \hat{x}(y, s)$. Es folgt

$$u(\hat{x}(y, s)) = u(x(0)) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial \tau} u(x(\tau))\, \mathrm{d}\tau = g(x(0)) - \int_0^s a_0(x(\tau))\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Wir erhalten $u(x) = (u \circ \hat{x}) \circ \hat{x}^{-1}(x)$

Bemerkung 2. *Damit u auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist, muss $\hat{x}$ invertierbar sein. Für lokale Invertierbarkeit ist $\det D\hat{x} \neq 0$ hinreichend. Auf Γ ist $\det D\hat{x}(y, 0) = \det(x_0'(y)|a(x_0(y)))$, d. h. wir brauchen $a(x_0(y)) \notin \operatorname{span}(x_0'(y))$. Die Spalten von $x_0'(y)$ spannen den Tangentialraum an Γ auf, somit brauchen wir $a \cdot \nu \neq 0$ für die Normale ν and Γ. Dies ist genau die nicht-charakteristisch-Bedingung aus Cauchy–Kovalevskaya.*