Beweis. 1. Nach Lemma 6 existiert $\hat{x}^{-1}$ auf V sowie $z(y,0) = g(x_0(y)), p(y,0)$ mit $F(p(y,0), z(y,0), \hat{x}(y,0)) = 0$ und $x_0'(y)p(0) - \nabla_y g(x_0(y)) = 0$. Löse Charpits Gleichungen mit diesen Anfangswerten $\implies \quad z(y,s), p(y,s)$.

2. Zeige $f(y,s) := F(p(y,s), z(y,s), \hat{x}(y,s)) = 0$.
   Es gilt $f(y,0) = 0$ und $\dot{f}(y,s) = F_p \cdot \dot{p} + F_z \dot{z} + F_x \cdot \dot{x} = F_p \cdot (-F_x - F_z p) + F_z(F_p \cdot p) + F_x \cdot F_p = 0$.

3. Zeige $p(\overset{\hat{x}^{-1}}{\cancel{x}}) = \nabla u(x)$ für $u(x) = z(\hat{x}^{-1}(x))$.

   - (4) und (5) implizieren $\dot{z}(y,s) = p(y,s) \cdot \dot{\hat{x}}(y,s)$.
   - $z_y(y,s) = p^T(y,s)\hat{x}_y(y,s)$, denn $r(s) := z_y(y,s) - p^T(y,s)\hat{x}_y(y,s)$ erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

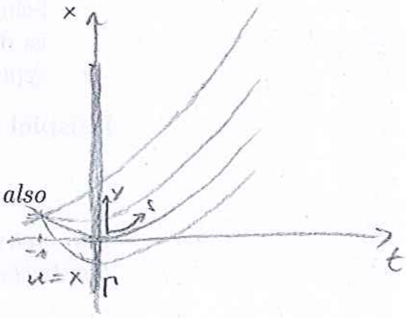
$$
\begin{aligned}
\dot{r}(s) &= \dot{z}_y(y,s) - \dot{p}^T(y,s)\hat{x}_y(y,s) - p^T(y,s)\dot{\hat{x}}_y(y,s) \\
&= p_y^T \dot{\hat{x}} + p^T \dot{\hat{x}}_y - \dot{p}^T \hat{x}_y - p^T \dot{\hat{x}}_y \\
&\overset{(4)\text{-}(6)}{=} p_y^T F_p - (-pF_z - F_x)^T \hat{x}_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y} F(p(y,s), z(y,s), \hat{x}(y,s)) + F_z(p \cdot \hat{x}_y - z_y) \\
&= -F_z r
\end{aligned}
$$

   mit Anfangswert $r(0) = \frac{\partial}{\partial y} g(x_0(y)) - x_0'(y)p(y,0) = 0$.
   - $u_x = z_s s_x + z_y y_x = p \cdot \dot{\hat{x}} s_x + p^T \hat{x}_y y_x = p^T(\dot{\hat{x}} s_x + \hat{x}_y y_x) = p^T \hat{x}_x = p^T$.

$\square$

Beispiel 9. *Löse das Cauchy-Problem*

$$
\begin{cases}
u_t + uu_x = 1 & \textit{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\
u = x & \textit{auf } \Gamma = \{t = 0\}\,.
\end{cases}
$$



Charakteristische Kurven sind gegeben durch $\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} (t,x) \\ z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,z) \\ p_1 + zp_2 \\ -p_2 p \end{pmatrix}$, *also*

$$
\begin{pmatrix} (t,x) \\ z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t(0)+s, x(0)+z(0)s + \frac{p_1(0)+z(0)p_2(0)}{2} s^2) \\ p_1(0)s + z(0)(1+p_2(0)s) \\ \frac{p}{1+p_2(0)s} \end{pmatrix}.
$$

Parametrisiere Γ *durch* $y \mapsto (0,y)$. *Dies liefert Anfangswerte* $(t(0), x(0)) = (0,y)$ *und* $z(0) = y$; *Lösen von (7) liefert* $p(0) = \binom{1-y}{1}$. *Insgesamt ergibt sich*

$$
\begin{pmatrix} (t,x) \\ z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s, y + ys + \frac{1}{2}s^2) \\ s+y \\ \frac{1}{1+s}\binom{1-y}{1} \end{pmatrix}.
$$

Hieraus folgt $(s,y) = (t, \frac{x - t^2/2}{1+t})$ *und somit schließlich*

$$
u(t,x) = z(t, \tfrac{x-t^2/2}{1+t}) = t + \tfrac{x-t^2/2}{1+t}\,.
$$

Bemerkung 10. *Für quasilineare Differentialgleichungen*

$$
b(u(x),x) \cdot \nabla u(x) + c(u(x),x) = 0
$$

können die charakteristischen Gleichungen (4)-(6) *vereinfacht werden:* $b(z(s), x(s)) \cdot p(s) + c(z(s), x(s)) = 0$ *impliziert*

$$\dot{x}(s) = b(z(s), x(s)), \tag{8}$$
$$\dot{z}(s) = -c(z(s), x(s)), \tag{9}$$
$$\dot{p}(s) = -(b_z \cdot p + c_z)p - b_x p - c_x, \tag{10}$$

worin bereits die ersten beiden Gleichungen x und z bestimmen und (10) *somit ignoriert werden kann.*

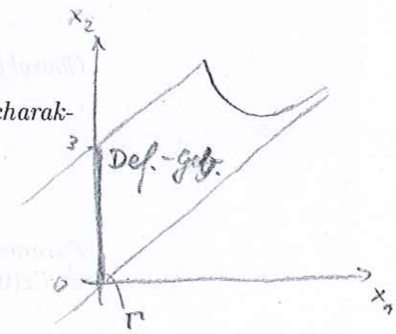
Definitionsgebiet

Das Gebiet, auf dem die Lösung eines partiellen Differentialgleichungs-Problems wohldefiniert ist, wird oft *Definitionsgebiet* genannt. Für Probleme erster Ordnung ist das Definitionsgebiet beschränkt durch verschiedene Umstände:

- Die charakteristischen Kurven $x(s)$, die die Hyperfläche Γ mit Cauchy-Daten schneiden, durchziehen nicht den gesamten $\mathbb{R}^n$. Nur der von solchen charakteristischen Kurven erreichte Teil des $\mathbb{R}^n$ kann zum Definitionsgebiet gehören.
- Entlang einer charakteristischen Kurve kann die Lösung $z(s)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung aufhören zu existieren.
- Die charakteristischen Kurven $x(s)$ können sich schneiden. Da zu jedem $x(s)$ auch ein Funktionswert $z(s)$ der Lösung gehört, würden an einem Schnittpunkt mehrere Funktionswerte vorliegen. An den Schnittpunkten ist die Parametrisierung $\hat{x}$ des $\mathbb{R}^n$ nicht mehr wohldefiniert, d. h. wir haben typischerweise $\det D\hat{x} = 0$.

Beispiel 11. *Betrachte das Cauchy-Problem*

$$u_{x_1} + u_{x_2} = u^3, \quad u = x_2 \text{ auf } \Gamma = \{x_1 = 0, 0 < x_2 < 3\}.$$



Parametrisiere Γ durch $x_0(y) = (0, y)$, $0 < y < 3$. Die (vereinfachten) charakteristischen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial s}\binom{x}{z} = \binom{(1,1)}{z^3}$$

mit Anfangswerten $x(0) = (0, y)$, $z(0) = y$ haben die Lösung

$$\binom{x}{z} = \binom{(s, s+y)}{y/\sqrt{1-2y^2 s}}.$$

Das Definitionsgebiet liegt zwischen den charakteristischen Kurven durch den Rand von Γ, $x(s) = (s, s)$ und $x(s) = (s, 3+s)$, und endet auf jeder charakteristischen Kurve, wenn $z \to \infty$, d. h. für $s = \frac{1}{2y^2}$. Insgesamt ergibt sich das Definitionsgebiet

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3 > x_2 > x_1, \ x_2 < x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2x_1}}\}.$$

Beispiel 12. *Betrachte das Cauchy-Problem*

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(t, x) = \sin x \text{ auf } \Gamma = \{0\} \times (0, 2\pi).$$