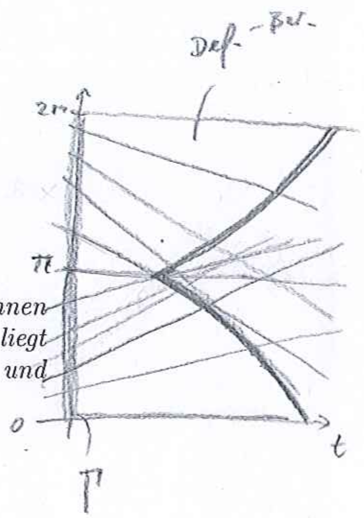
Die Lösung der charakteristischen Gleichungen liefert

$$\begin{pmatrix} (t,x) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s, y + s\sin y) \\ \sin y \end{pmatrix} .$$

Entlang der Kurve mit $0 = \det D\hat{x} = \det(\partial(t,x)/\partial(y,s)) = -1 - s\cos y$ *beginnen die charakteristischen Kurven, sich zu schneiden. Das Definitionsgebiet liegt zwischen den randständigen charakteristischen Kurven,* $x = 0$ *und* $x = 2\pi$, *und der Kurve* $\{(t(y,s), x(y,s)) \mid s = -\frac{1}{\cos y}\}$,

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2\pi \,, t < -\tfrac{1}{\cos y} \text{ für } x = y - \tan y \} .$$



Einschub: Satz von Gauß

Wir möchten letztendlich auch nicht-glatte Funktionen u als (verallgemeinerte) Lösungen zulassen. Hierzu nutzen wir Integration, um unerwünschte Ableitungen zu eliminieren. Die Grundidee in 1D ist folgende: Gegeben

$$u'(x) = f(x, u(x)) \text{ auf } \Omega = (a,b) ,$$

multipliziere beide Seiten mit einer glatten Funktion ψ und integriere partiell,

$$u(b)\psi(b) - u(a)\psi(a) - \int_a^b \psi' u \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x, u(x)) \,\mathrm{d}x .$$

Diese Gleichung macht auch für nicht differenzierbares u Sinn. Für nD benötigen wir den folgenden Satz:

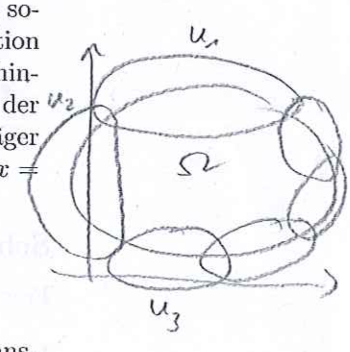
Theorem 13 (Satz von Gauß). *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen mit stückweise stetig differenzierbarem Rand. Ist u stetig differenzierbar, gilt*

$$\int_\Omega u_{x_i}(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x) \,\mathrm{d}x$$

für die nach außen zeigende Einheitsnormale ν auf $\partial\Omega$.

Beweis. 1. Lokalisierung: Überdecke $\partial\Omega$ durch offene Mengen $U_1, \dots, U_l$, sodass $\partial\Omega \cap U_j$ der Graph einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist und $\Omega \cap U_j$ auf einer Seite des Graphen liegt. Füge U_0 mit $\overline{U_0} \subset \Omega$ hinzu, sodass $U_0, \dots, U_l$ ganz $\overline{\Omega}$ überdecken. Wähle hierzu eine Partition der Eins, d. h. unendlich oft differenzierbare Funktionen $\eta_0, \dots, \eta_l$ mit Träger in $U_0, \dots, U_l$ und $\sum_{j=0}^l \eta_j = 1$. Es bleibt zu zeigen $\sum_{j=0}^l \int_\Omega (\eta_j u)_{x_i} \,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^l \int_{\partial\Omega} \eta_j u \nu_i \,\mathrm{d}x$ bzw.

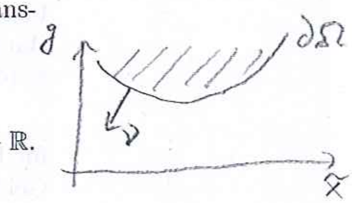
$$\int_\Omega \nabla(\eta_j u) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \eta_j u \nu \,\mathrm{d}x .$$



2. Koordinatentransformation: Nach einer orthogonalen Koordinatentransformation dürfen wir annehmen

$$U_j \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid x_n > g(\tilde{x})\}$$

für $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ und eine stückweise glatte Funktion $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Die Normale an $\partial\Omega \cap U_j$ ist dann gegeben durch



$$\nu(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(\tilde{x})|^2}} \begin{pmatrix} \nabla g(\tilde{x}) \\ -1 \end{pmatrix} .$$

3. Partielle Integration: Mit $v(\tilde{x},h) := (\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h)$ ist

$$\partial_n v(\tilde{x},h) = \partial_n(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h)\,,$$
$$\partial_i v(\tilde{x},h) = \partial_i(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h) + \partial_i g(\tilde{x})\partial_n(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h)$$

$\partial_i \mathrel{\hat=} \frac{\partial}{\partial x_i}$

und somit

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\eta_j u)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \nabla(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}) + h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty (\nabla v - \partial_n v\left(\begin{smallmatrix}\nabla g\\ 0\end{smallmatrix}\right))(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i v(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}h\right) e_i - \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_0^\infty \partial_n v(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}h\right)\left(\begin{smallmatrix}\nabla g(\tilde{x})\\ -1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{d}\tilde{x}\,.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration bzgl. x_i für $i < n$ ergibt sich aufgrund des kompakten Trägers von v

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i v\,\mathrm{d}\tilde{x} = 0$$

und durch partielle Integration bzgl. h

$$\int_0^\infty \partial_n v(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}h = -v(\tilde{x},0) = -(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x}))\,.$$

□

Bemerkung 14. *Der Satz hat verschiedene Varianten:*

- $\int_\Omega \nabla u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int_\Omega \mathrm{div} b(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} b(x)\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}x$ *für stetig differenzierbares* $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $\int_\Omega uv_{x_i} + vu_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,\mathrm{d}x$ *für* u, v *stetig differenzierbar.*
- $\int_\Omega u\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\nu\,\mathrm{d}x - \int_\Omega v\nabla u\,\mathrm{d}x$ ...
- *Der Satz gilt auch für Lipschitz-Rand* $\partial\Omega$ *und schwach differenzierbare Funktionen.*

Schwache Lösungen

Frage: Wie können auch nicht-glatte Funktionen u als (verallgemeinerte) Lösungen aufgefasst werden?

Idee: Nutze partielle Integration, um Ableitungen loszuwerden.

Häufig kann die partielle Differentialgleichung in *Erhaltungsform* oder Divergenzform geschrieben werden,

$$\mathrm{div} G(x, u(x)) = R(x, u(x)) \tag{11}$$

für Funktionen $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wollen (11) auf einem Gebiet Ω lösen für Cauchy-Daten

$$u = g \text{ auf } \Gamma \subset \partial\Omega.$$