3. Partielle Integration: Mit $v(\tilde{x},h) := (\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x})+h)$ ist

$$\begin{aligned}\partial_n v(\tilde{x},h) &= \partial_n(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x})+h),\\ \partial_i v(\tilde{x},h) &= \partial_i(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x})+h) + \partial_i g(\tilde{x})\partial_n(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x})+h)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\eta_j u)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \nabla(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x})+h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\tilde{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty (\nabla v - \partial_n v \left(\begin{smallmatrix}\nabla g\\ 0\end{smallmatrix}\right))(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\tilde{x}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i v(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}h\right)e_i - \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_0^\infty \partial_n v(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}h\right)\left(\begin{smallmatrix}\nabla g(\tilde{x})\\ -1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{d}\tilde{x}.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration bzgl. x_i für $i < n$ ergibt sich aufgrund des kompakten Trägers von v

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i v\,\mathrm{d}\tilde{x} = 0$$

und durch partielle Integration bzgl. h

$$\int_0^\infty \partial_n v(\tilde{x},h)\,\mathrm{d}h = -v(\tilde{x},0) = -(\eta_j u)(\tilde{x}, g(\tilde{x})).$$

□

Bemerkung 14. *Der Satz hat verschiedene Varianten:*

- $\int_\Omega \nabla u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int_\Omega \mathrm{div} b(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} b(x)\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}x$ *für stetig differenzierbares* $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $\int_\Omega u v_{x_i} + v u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,\mathrm{d}x$ *für* u, v *stetig differenzierbar.*
- $\int_\Omega u\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\nu\,\mathrm{d}x - \int_\Omega v\nabla u\,\mathrm{d}x$ ...
- *Der Satz gilt auch für Lipschitz-Rand* $\partial\Omega$ *und schwach differenzierbare Funktionen.*

Schwache Lösungen

Frage: Wie können auch nicht-glatte Funktionen u als (verallgemeinerte) Lösungen aufgefasst werden?

Idee: Nutze partielle Integration, um Ableitungen loszuwerden.

Häufig kann die partielle Differentialgleichung in *Erhaltungsform* oder *Divergenzform* geschrieben werden,

$$\mathrm{div} G(x, u(x)) = R(x, u(x)) \tag{11}$$

für Funktionen $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wollen (11) auf einem Gebiet Ω lösen für Cauchy-Daten

$$u = g \text{ auf } \Gamma \subset \partial\Omega.$$

Beispiel 15. $a(x)u_{x_1} + uu_{x_2} = c(x,u)$ *ist äquivalent zu* $(au)_{x_1} + (\frac{u^2}{2})_{x_2} = c(x,u) + a_{x_1}u$ *und kann in Erhaltungsform geschrieben werden für* $G(x,u) = \left(\begin{smallmatrix}au\\ u^2/2\end{smallmatrix}\right)$, $R(x,u) = c(x,u) + a_{x_1}u$.

Wir multiplizieren (11) mit einer sogenannten *Testfunktion*

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \psi \text{ ist glatt, } \psi = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \Gamma,$$

und integrieren partiell,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \psi(x)\big(\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x))\big)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\partial\Omega} \psi(x) G(x,u(x)) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\psi(x)\cdot G(x,u(x)) + \psi(x)R(x,u(x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_\Gamma \psi(x) G(x,g(x)) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\psi(x)\cdot G(x,u(x)) + \psi(x)R(x,u(x))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung macht auch für nicht-differenzierbares u Sinn.

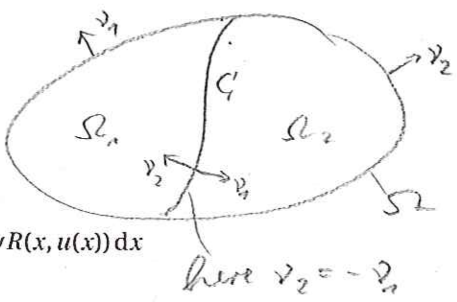
Definition 16 (Schwache Lösung). *Eine messbare, beschränkte Funktion $u(x)$ auf Ω heißt* schwache Lösung *von* (11), *wenn sie*

$$0 = \int_\Gamma \psi(x) G(x,g(x)) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\psi(x)\cdot G(x,u(x)) + \psi(x)R(x,u(x))\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

für alle Testfunktionen ψ erfüllt.

Unstetige Lösungen und Schocks

Seien
- $C \subset \Omega$ (stückweise) glatte Hyperfläche, die Ω in Ω_1 und Ω_2 teilt,
- u schwache Lösung von (11), die auf Ω_1, Ω_2 stetig differenzierbar ist,
- ν_i äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega_i$, $i = 1,2$,
- $[f]^+_-$ = Sprung einer Funktion f über C von Ω_1 nach Ω_2.



Für alle Testfunktionen ψ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Gamma \psi G(x,g(x))\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\Omega_1} \nabla\psi\cdot G(x,u(x)) + \psi R(x,u(x))\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_2} \nabla\psi\cdot G(x,u(x)) + \psi R(x,u(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Gamma \psi G(x,g(x))\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega_1} \psi G(x,u(x))\cdot\nu_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} \psi\big(\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x))\big)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega_2} \psi G(x,u(x))\cdot\nu_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} \psi\big(\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x))\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_C \psi [G(x,u(x))]^+_- \cdot \nu_1(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

da $\operatorname{div} G(x,u(x)) - R(x,u(x)) = 0$ in Ω_1, Ω_2. Wir erhalten

$$[G(x,u(x))]^+_- \cdot \nu(x) = 0 \tag{13}$$

für die Normale ν an C. Eine Unstetigkeit von u bzw. G, ein sogenannter *Schock*, kann also nur entlang einer Fläche C normal zu $[G]^+_-$ auftreten.

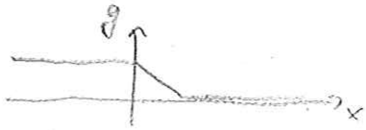
In 2D kann die Kurve C lokal als Graph einer Funktion $x_2(x_1)$ (bzw. $x_1(x_2)$) geschrieben werden; ein Tangentialvektor ist somit $\binom{1}{\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1}$, ein Normalvektor $\binom{\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1}{-1}$, und (13) wird zur sogenannten *Rankine–Hugoniot Bedingung* für einen Schock,

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{[G_2]_-^+}{[G_1]_-^+}. \tag{14}$$

Bemerkung 17. *Für semilineare Gleichungen* $0 = b(x)\cdot\nabla u(x) + c(u(x),x)$ *wird dies zu* $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{b_2[u]_-^+}{b_1[u]_-^+} = \frac{b_1}{b_2}$, *d. h. der Schock liegt entlang einer charakteristischen Kurve.*

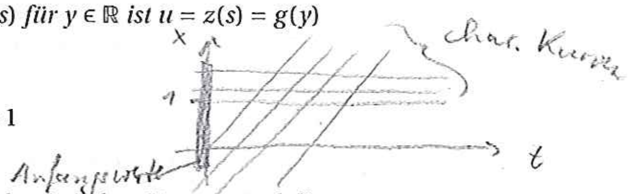
Beispiel 18. *Betrachte das Cauchy-Problem*

$$u_t + uu_x = 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \qquad u(0,x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{für } 1 \le x. \end{cases}$$



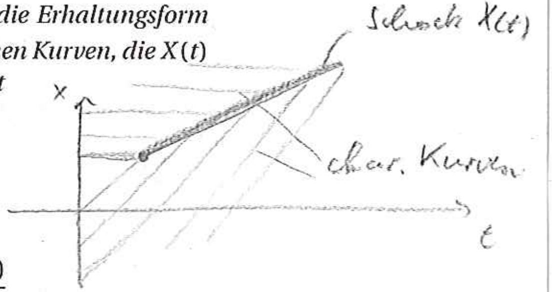
Entlang der charakteristischen Kurven $s \mapsto (s, y + g(y)s)$ *für* $y \in \mathbb{R}$ *ist* $u = z(s) = g(y)$ *konstant, somit*

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{für } t \le x \le 1 \\ 0 & \text{für } 1 \le x \end{cases}$$



solange $t < 1$. *In* $(t,x) = (1,1)$ *schneiden sich die charakteristischen Kurven, und die Lösung mit Hilfe Charpits Gleichungen bricht zusammen. An dieser Stelle setzen wir einen Schock entlang einer Kurve* $x = X(t)$ *ein und betrachten die Erhaltungsform* $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$. *Sei* $(0, y_\pm(t))$ *der Anfangspunkt der charakteristischen Kurven, die* $X(t)$ *zur Zeit* t *von links (–) und von rechts (+) schneiden. Es gilt somit*

$$X(t) = y_-(t) + g(y_-(t))t = y_+(t) + g(y_+(t))t$$



Weiterhin gilt die Rankine–Hugoniot Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2} = \frac{g(y_+(t)) + g(y_-(t))}{2}$$

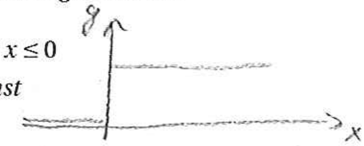
und $X(1) = 1$. *Eine Lösung dieser Gleichungen ist gegeben durch* $X(t) = \frac{1+t}{2}$, $y_-(t) = \frac{1-t}{2}$, $y_+(t) = \frac{1+t}{2}$ *(die Charakteristiken von links und rechts haben* $u_- = 1$, $u_+ = 0$*), folglich ist*

$$u(t,x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{für } x \le t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{für } t \le x \le 1 \\ 0 & \text{für } 1 \le x \end{matrix} \right\} \text{ für } t < 1 \text{ und } u(t,x) = \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ für } x \le \frac{1+t}{2} \\ 0 \text{ für } \frac{1+t}{2} \le x \end{matrix} \right\} \text{ für } t \ge 1$$

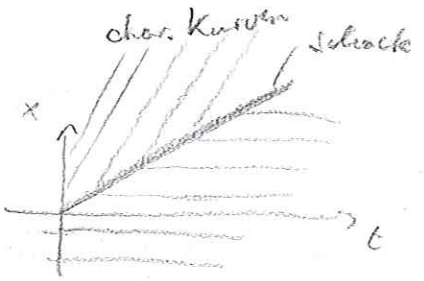
eine schwache Lösung des Problems.

Bemerkung 19. *Schwache Lösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Betrachte z. B.*

$$u_t + uu_x = 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \qquad u(0,x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



mit den schwachen Lösungen

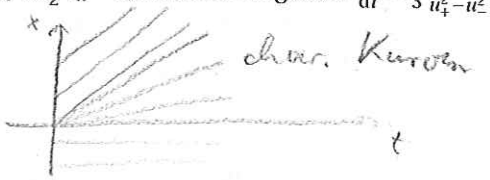


- $u(t,x) = \begin{cases} 0 & \textit{für}\, x \le t/2 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$

  (Schock zu Erhaltungsform $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$*; Rankine–Hugoniot:* $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}$*),*

- $u(t,x) = \begin{cases} 0 & \textit{für}\, x \le 2t/3 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$

  (Schock zu Erhaltungsform $(\frac{u^2}{2})_t + (\frac{u^3}{2})_x = 0$*; Rankine–Hugoniot:* $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{u_+^3 - u_-^3}{u_+^2 - u_-^2} = \frac{2}{3}\frac{u_+^2 + u_- u_+ + u_-^2}{u_+ + u_-}$*),*



- $u(t,x) = \begin{cases} 0 & \textit{für}\, x \le 0 \\ x/t & \textit{für}\, 0 < x < t \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$

  (Verdünnungswelle).

Welche Erhaltungsform korrekt ist, hängt vom modellierten physikalischen Problem ab. Auch ob ein Schock oder stattdessen eine Verdünnungswelle korrekt sind, hängt vom modellierten Problem ab. Man kann für eine vorgegebene Erhaltungsform eine eindeutige Lösung selektieren durch Hinzunahme einer zusätzlichen Bedingungen, z. B.

1. *Entropiebedingung: Wir legen eine bestimmte Funktion von* $f(u)$ *fest, die über den Schock zunehmen soll, d. h.* $[f(u)]_-^+ \ge 0$*. Die Wahl* $f(u) = u$ *verbietet obige Schocks.*

2. *Viskosität: Wir betrachten* $0 = F(\nabla u, u, x)$ *als Grenzfall für* $\varepsilon \to 0$ *von* $\varepsilon \Delta u = F(\nabla u, u, x)$*, welches eine eindeutige Lösung besitzt.*

3. *Kausalität: Ist eine Variable die Zeit, so fließt physikalisch Information entlang der charakteristischen Kurven in Richtung wachsender Zeit. Es soll Information in den Schock hinein und nicht aus ihm heraus fließen (dies verbietet obige Schocks).*

Viscosity solutions

Consider the nonlinear first-order problem

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \text{ in } \Omega \tag{15}$$

with boundary conditions on $\partial\Omega$, where $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continuous and H is convex in ∇u. (15) is also called a Hamilton–Jacobi equation, and we changed the notation from F to H since this is conventionally used in this context.

"Solutions" are typically
- neither unique
- nor differentiable everywhere

Beispiel 20. *The* eikonal equation

$$0 = H(x, u, p) = |p| - 1$$

is often used to compute the distance $u(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$ *from a given set* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$*. However, already for* $n = 1$ *and boundary data* $u = 0$ *on* $\Gamma = \{0, 1\}$ *there is no continuously differentiable solution* u*, but many functions* u *satisfying* (15) *almost everywhere.*