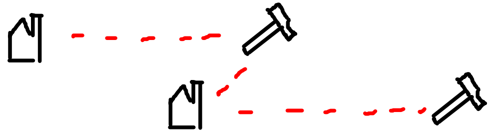
Ursprüngliche Problemstellung

Monge (1783): 

geg.: · Verteilung von Eisenminen
· Verteilung von Fabriken

Wie verteilt/transportiert man kostengünstig Erz von Minen zu Fabriken?

Monge-Formulierung: Eisenminendichte $f_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

Fabrikdichte $f_2 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

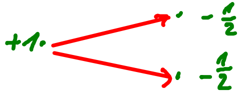
Kosten $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

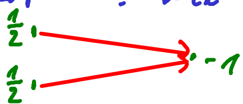
$c(x,y)$ = Kosten pro Masseeinheit für Transport von x nach y

Bedingung $\int_{\mathbb{R}^n} f_1 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_2 \, dx$ (keine Masse über)

> Suche Transport $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\int_A f_1 \, dx = \int_{T(A)} f_2 \, dx \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n$ messbar
>
> sodass $C(T) = \int_{\mathbb{R}^n} c(x, T(x)) \, f_1(x) \, dx$ minimal!

Probleme der Formulierung: Existiert T? Wie regulär ist es? Massensplitting?

<u>Bsp.</u>: 

oder 

$\Longrightarrow$ es existiert kein T ...

Maße

(beschreiben Anfangs- & Endmasseverteilung)

Def: · Eine Menge P von Teilmengen einer Menge Ω heißt <u>σ-Algebra</u>, falls

(1) $\Omega \in P$ (2) $A \in P \Rightarrow \Omega \setminus A \in P$ (3) $A_i \in P \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in P$

· Elemente von P $\equiv$ <u>messbare Mengen</u>

· Die <u>Borel-Algebra</u> eines topologischen Raumes Ω ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. (z.B. Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^n$)

· Ein <u>Maß</u> ist eine Abbildung $\mu : P \to [0,\infty]$ mit ($\mu(A) =$ Masse in A)

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ (2) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ für paarweise disjunkte A_i

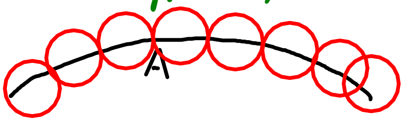
· Ein <u>signiertes Maß</u> ist eine Abbildung $\nu : P \to (-\infty,\infty]$ mit (1) & (2) absolut konvergent

Bsp: · <u>Dirac-Maß</u> $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

· <u>Lebesgue-Maß</u> $\mathcal{L}([a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]) = (b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$

· <u>Hausdorff-Maß</u> $\mathcal{H}^m(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\operatorname{diam} B_i}{2}\right)^m \,\middle|\, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ \operatorname{diam} B_i < \varepsilon \right\}$

ω_m: Volumen des m-dimensionalen Einheitsballs



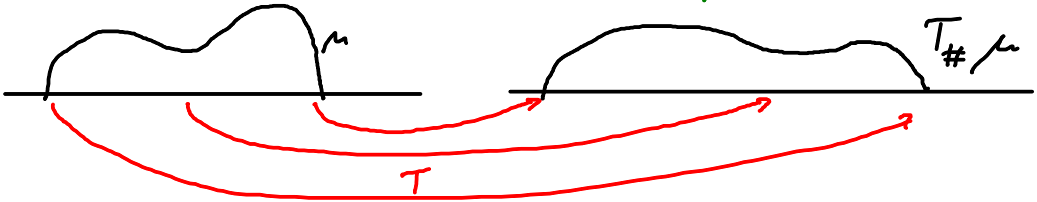
$\mathcal{H}^1(A) =$ Länge von A

Transformationen von Maßen

Def: Seien $(\Omega, \mathcal{P})$ & $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}})$ Maßräume, μ (signiertes) Maß auf $(\Omega, \mathcal{P})$ und $B \in \mathcal{P}$.

- Die Restriktion von μ auf B ist $\mu \llcorner B : \mathcal{P} \to (-\infty, \infty]$, $\mu \llcorner B(A) = \mu(A \cap B)$.
- $T : \Omega \to \tilde{\Omega}$ heißt messbar, wenn $T^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{P} \quad \forall\, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}$.
- Der Pushforward von μ unter T ist $T_\# \mu : \mathcal{P} \to (-\infty, \infty]$, $T_\# \mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

Bsp:

- 

- $\mathrm{proj}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$; $\qquad \mathrm{proj}_{i\#}\, \mu(A) = \mu(\mathbb{R}^{i-1} \times A \times \mathbb{R}^{n-i})$
- $\mathrm{proj}_i(y_1, \dots, y_n) = y_i$; $\qquad \underbrace{\mathrm{proj}_{i\#}\, \mu(A)}_{\text{„ites Marginal von } \mu \text{“}} = \mu(Y_1 \times \dots \times A \times \dots Y_n)$

- $$\int_A f \circ T \, d\mu = \int_{T(A)} f \, dT_\# \mu$$

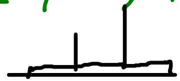
Bem: Für messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kann man das Lebesgue-Integral $\int_\Omega f \, d\mu$ definieren.

Zerlegung von Maßen

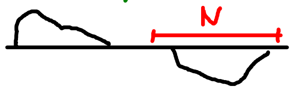
Def: · Ein Maß heißt σ-endlich, falls $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ für eine Folge $A_i \subset \Omega$ mit $|\mu(A_i)| < \infty$

· $\nu : \mathcal{P} \to (-\infty,\infty]$ heißt absolut stetig bzgl. $\mu : \mathcal{P} \to (-\infty,\infty]$, $\nu \ll \mu$, falls $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

· ν & μ heißen singulär, $\nu \perp \mu$, falls $\exists\, A \in \mathcal{P} : \mu(A) = 0,\ \nu(\Omega \setminus A) = 0$

$\delta_x \perp \mathcal{L}$,  $\ll$ 

Thm (Hahnscher Zerlegungssatz): Für ein signiertes Maß $\mu : \mathcal{P} \to (-\infty,\infty]$ auf $(\Omega,\mathcal{P})$ existiert $N \in \mathcal{P}$ sodass für alle $A \in \mathcal{P}$ gilt $\begin{cases} A \subset N & \Rightarrow \mu(A) \leq 0 \\ A \subset \Omega \setminus N & \Rightarrow \mu(A) \geq 0 \end{cases}$



Thm (Radon-Nikodym): Ist μ σ-endliches & ν signiertes Maß auf $(\Omega,\mathcal{P})$, $\nu \ll \mu$, so existiert eine Dichte-Funktion, d.h. ein messbares $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ $\forall A \in \mathcal{P}$.

Man schreibt $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. z.B. ν = Masseverteilung in Monge-Formulierung $\Rightarrow \nu \ll \mathcal{L}$ mit $f = \frac{d\nu}{d\mathcal{L}}$

Thm (Lebesgue): Ist μ σ-endliches & ν signiertes Maß auf $(\Omega,\mathcal{P})$, so existiert eine eindeutige Zerlegung $\nu = \tau + \pi$ mit $\tau \ll \mu$, $\pi \perp \mu$.

Dualität von Maßen

<u>Def</u>: · Sei μ signiertes Maß auf Ω mit Hahn-Zerlegung $N, \Omega\setminus N$, $\mu^+ = \mu \llcorner (\Omega\setminus N)$, $\mu^- = \mu \llcorner N$. $|\mu| = \mu^+ - \mu^-$ heißt <u>Variation(smaß)</u> von μ.

· $|\mu|(\Omega) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \;\middle|\; A_i \subset \Omega \text{ messbar \& paarweise disjunkt} \right\}$ heißt <u>totale Variation</u>.

· Ein Maß μ auf dem metrischen Raum Ω heißt <u>regulär</u>, falls für alle messbaren $A \subset \Omega$ gilt $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(U) \mid U \supset A \text{ offen}\}$.

<u>Def</u>: · Sei X ein normierter Vektorraum. $X^* = \{y : X \to \mathbb{R} \mid y \text{ ist linear \& beschränkt, d.h. } \exists C>0\, \forall x\in X: |y(x)| \le C\|x\|_X\}$ mit der Norm $\|y\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |y(x)|$ heißt <u>Dualraum</u> zu X.

· $y_i \in X^*$ <u>konvergiert schwach-*</u> gegen $y \in X^*$, $y_i \xrightarrow{*} y$, wenn $y_i(x) \to y(x)$ $\forall x \in X$.

<u>Thm</u> (Rieszscher Darstellungssatz): Sei Ω kompakter metrischer Raum (z.B. $[0,1]^n$).

· Mit der Norm $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ ist $rca(\Omega) = \{\mu \text{ reguläres signiertes Maß auf } \Omega \mid |\mu|(\Omega) < \infty\}$ ein Banachraum.

„regular countably additive", Radonmaße

· $rca(\Omega) = (C(\Omega))^*$. $\mu(f) = \int_\Omega f\, d\mu$

<u>Thm</u> (Banach-Alaoglu): Jede Folge $\mu_i \in rca(\Omega)$ (Ω kompakt, metrisch) mit $\|\mu_i\| \le C$ $\forall i$ für ein $C>0$ besitzt eine schwach-* konvergente Teilfolge.

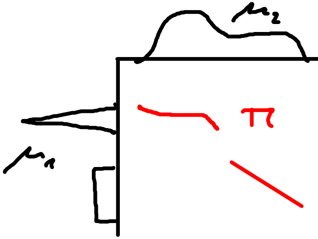
Kantorovich-Formulierung

kompakt, metrisch

Geg.: Anfangs- & Endmasseverteilung $\mu_1, \mu_2 \in rca(\Omega)$, $\mu_1, \mu_2 \geq 0$, $\|\mu_1\| = \|\mu_2\|$

$$\boxed{C(\mu_1,\mu_2) = \inf\left\{ \int_{\Omega\times\Omega} c(x,y)\, d\pi(x,y) \;\middle|\; \pi \in rca(\Omega\times\Omega),\ \pi \geq 0,\ proj_{i\#}\pi = \mu_i,\ i = 1,2 \right\}}$$

- $\pi(x,y) \equiv$ Masse, die von x nach y transportiert wird
- $proj_{1\#}\pi(A) = \pi(A\times\Omega)$ = Masse, die von A wegtransportiert wird $= \mu_1(A)$
- erlaubt Massensplitting



Thm (Existenz): Sei $c \in C(\Omega\times\Omega)$, $c \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Ein optimales π existiert.

Bew.: · Betrachte Minimalfolge $\pi_1, \pi_2, \ldots \in rca(\Omega\times\Omega)$ mit $proj_{i\#}\pi_j = \mu_i$ und

$$\int_{\Omega\times\Omega} c(x,y)\, d\pi_j(x,y) \longrightarrow C(\mu_1,\mu_2)$$

· $\|\pi_j\| = \pi_j(\Omega\times\Omega) = \int_{\Omega\times\Omega} 1 \, d\pi_j(x,y) = \int_{\Omega\times\Omega} 1 \circ proj_1(x,y)\, d\pi_j(x,y) = \int_\Omega 1\, d\mu_1 = \|\mu_1\| < \infty$

$\Rightarrow \pi_j \xrightarrow{*} \pi \in rca(\Omega\times\Omega)$ für eine Teilfolge

· $\int_{\Omega\times\Omega} c\, d\pi = \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} c\, d\pi_j$, $proj_{i\#}\pi_j \xrightarrow{*} proj_{i\#}\pi$, $\pi \geq 0$ $\square$