Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 1 , Abgabe: Freitag, 26.10.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 1: (3+2* Punkte)
Ein Investor hat **5000 DM** zur Verfügung, die er in zwei Objekte investieren kann. Mit $x_i \ (i = 1, 2)$ sei der Anteil (in **1000 DM**), den er in Objekt i investiert, bezeichnet.

Objekt 1 bzw. 2 erbringt einen jährlichen Gewinn von 20% bzw. 16%. Das Risiko bei Investition in Objekt 1 und 2 wird durch die Varianz des Gewinns gemessen und beträgt $2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2$. Der Investor möchte seinen Gewinn maximieren und sein Risiko minimieren. Mit einem Wichtungsfaktor $\alpha > 0$ löst er das Optimierungsproblem

$$\text{minimiere} \quad \alpha(2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2) - 20x_1 - 16x_2 \ .$$

(a) Berechnen Sie für alle $\alpha > 0$ die optimale Lösung $x(\alpha) \in \mathbb{R}^2$.

(b)* Für welche $\alpha > 0$ erfüllt die optimale Lösung $x(\alpha)$ die Bedingungen $x_1 + x_2 \leq 5$ und $x_1,\, x_2 \geq 0$?

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Die Landau-Theorie der Phasenübergänge kann benutzt werden, um die Zustandsform (fest oder flüssig) von Kristallen zu bestimmen. Hierbei wird eine dem Kristall zugeordnete **Energiefunktion** minimiert, d.h. man betrachtet das Optimierungsproblem

$$\underset{s \in \mathbb{R}}{\text{minimiere}} \quad F(s,T) = \tfrac{1}{2}Ts^2 - \tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{4}s^4 \ .$$

Dabei ist $T \in \mathbb{R}$ ein Parameter, welcher die Temperatur repräsentiert.

(a) Überprüfen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen 1'ter Ordnung für alle Parameter $T \in \mathbb{R}$ und

(b) werten Sie die hinreichenden Optimalitätsbedingungen 2'ter Ordnung aus.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Ein Fabrikant stellt zwei Sorten Whisky her. Der Gewinn pro Flasche bei Sorte A beträgt 3 DM, bei Sorte B 2 DM.

Der Flaschenlieferant kann pro Woche für Sorte A 300, für Sorte B 700 Flaschen liefern. Die Produktionskapazität bei Beschränkung auf eine Sorte beträgt bei Sorte A 500 Flaschen pro Woche, bei Sorte B 1000 Flaschen pro Woche.

Unser Whiskyfabrikant hat von der staatlichen Aufsichtsbehörde eine Konzession für die Herstellung von 800 Flaschen Whisky pro Woche bekommen, und er will seinen Gewinn maximieren.

Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem und lösen Sie es graphisch.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 2 , Abgabe: Freitag, 2.11.2001, 9.00 Uhr

Übungstermine: (neue Briefkastennummern!)

Gruppe 1:	Mo.	15.00 - 17.00 Uhr	SRC	BK	24	G. Vossen
Gruppe 2:	Mo.	17.00 - 19.00 Uhr	SR7	BK	25	F. Feddemann
Gruppe 3:	Di.	11.00 - 13.00 Uhr	SR2 (nicht SR3!)	BK	26	K. Theißen

Die Klausur findet am Mittwoch, dem 13.2.2002, von 15:30 Uhr bis 18:30 Uhr im M1 statt.

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Lösen Sie die folgenden beiden LP's mit Mischungsbedingungen auf grafischem Wege, indem Sie eine Variable eliminieren.

(a)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & z(x) = 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 3\,, \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\,, \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0\,. \end{array} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & z(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & \geq & 2\,, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 2\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\,, \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0\,. \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Aus 2 Nahrungsmitteln x und y soll eine Diät z hergestellt werden. Die Diätnahrung soll die Vitamine A, B und C in den Mindestmengen 150, 270 bzw. 200 Einheiten enthalten. Außerdem soll die Nahrung nicht mehr als 600 Kal. Nährwert, aber mindestens 3.5 % Eiweiß enthalten.
Die Anteile dieser Stoffe in x und y sind in der folgenden Tabelle gegeben.

	x	y	z
Vitamin A	2	0.5	150 Mindestmenge
Vitamin B	1	3	270 Mindestmenge
Vitamin C	2	1.5	200 Mindestmenge
Nährwert	3	4	600 Höchstmenge
Eiweiß	5.0%	2.5 %	3.5% Mindestmenge

Das Nahrungsmittel x ist fünfmal so teuer wie y.
Wie müssen x und y gemischt werden, damit z möglichst billig ist? Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem und lösen Sie die Aufgabe grafisch.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Sie sollen einen Schichtplan erstellen. Schichtbeginn ist alle 4 Stunden beginnend ab 8.00 Uhr, jede Schicht dauert 8 Stunden. Die nachfolgende Anzahl von Mitarbeitern muss jeweils mindestens anwesend sein:

8.00	–	12.00	10	20.00	–	24.00	10
12.00	–	16.00	15	0.00	–	4.00	3
16.00	–	20.00	8	4.00	–	8.00	1

(a) Die Gesamtzahl der Mitarbeiter ist zu minimieren. Formulieren Sie das dazugehörige LP.

(b) Da Sie bei den Lohnnebenkosten etwas sparen können, stellen Sie 5 Teilzeitmitarbeiter ein, die regelmäßig eine halbe Schicht arbeiten und um 8.00 Uhr, 12.00 Uhr oder 20.00 Uhr ihre Tätigkeit aufnehmen. Die Gesamtkosten pro Stunde für die Teilzeitarbeiter liegen um 10 Prozent unter den Kosten pro Stunde für Vollzeitkräfte. Zu minimieren sind die Gesamtkosten. Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem.

Aufgabe 7: (6 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die konvexe Hülle $\mathrm{co}(K)$ einer Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ ist gegeben durch

$$\mathrm{co}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in K \ , \ \ \alpha_i \geq 0 \ , \ \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \ k \in \mathbb{N} \right\} \ .$$

(ii) Ist $K \subset \mathbf{R}^n$ konvex und $x \in \overset{\circ}{K}$, $y \in \overline{K}$, so gilt

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in \overset{\circ}{K} \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha < 1 \ .$$

(iii) Für eine konvexe Menge K mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ gilt $\mathrm{int}\, \overline{K} = \mathrm{int} K$.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 3 , Abgabe: Freitag, 9.11.2001, 9.00 Uhr

Korrektur: Die Klausur findet am Donnerstag, dem 14.2.2002, von 11:30 Uhr bis 14:30 Uhr im M1 statt.

Aufgabe 8: (2+3 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen über konvexe Kegel:

(a) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn gilt

$$\alpha K + \beta K \subset K \quad \text{für alle} \quad \alpha, \beta \geq 0 \,.$$

(b) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel und $x \in K$, so ist die konische Hülle von K bzgl. x gegeben durch

$$K(x) = K + \mathbb{R}x = \{y + \alpha x \mid y \in K \;,\;\; \alpha \in \mathbb{R}\} \,.$$

Für $K = \mathbb{R}^n_-$ gilt insbesondere

$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_i \leq 0 \;,\;\; \text{falls} \quad x_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n\} \,.$$

Aufgabe 9: (3+3 Punkte)

(a) Seien K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere konvexe Mengen mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass K_1 und K_2 trennbar sind.

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie $K_1 - K_2 = \{y - x \mid y \in K_1, \; x \in K_2\}$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \; \|x - y\| < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius $r > 0$. Für $y \notin B_r(x)$ gibt es dann nach dem Trennungssatz einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$, mit

$$\lambda y \leq \lambda z \qquad \forall \; z \in B_r(x) \,.$$

Zeigen Sie, dass gilt $\lambda y < \lambda x$.

Aufgabe 10: (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge.

Zeigen Sie: Ist $\overline{x} \in C$ eine lokale Minimalstelle des Problems

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{für} \quad x \in C \;,$$

so gilt die Variationsungleichung

$$(V) \qquad f'(\overline{x})v \geq 0 \quad \text{für alle} \;\; v \in C(\overline{x}) \;,$$

wobei $C(\overline{x})$ die konische Hülle von C bzgl. $\overline{x}$ ist. Mit welcher Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann mit (V) der Trennungssatz (A.6) bewiesen werden?

<u>Hinweis:</u> Es gilt $\overline{x} + \alpha(y - \overline{x}) \in C$ für alle $y \in C$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 4 , Abgabe: Freitag, 16.11.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 11: (5 Punkte)
Beweisen Sie den **Satz von CARATHEODORY**: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu $x \in co(K)$ bereits $n+1$ Punkte $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ und Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \geq 0$, mit

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \ , \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \ .$$

Hinweise: Zu $x \in co(K)$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in K$, $\alpha_i \geq 0$, mit

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m \ , \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1 \ .$$

Sei $m > n+1$ und betrachten Sie die linear abhängigen Punkte $y_k := x_k - x_m$, $k = 1, \ldots, m-1$. Stellen Sie dann x als konvexe Kombination von $m-1$ Punkten der x_k dar.

Aufgabe 12: (2 Punkte)
Zeigen Sie: Es gibt keine Lösung des LGS ($x \in \mathbb{R}^3$, $x \geq 0$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -10 \\ 2 & -8 & -14 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (\text{in } \mathbb{R}^+) \, .$$

Aufgabe 13: (2 Punkte)
Sei $a_i > 0, i = 1, \ldots, n$. Bestimmen Sie sämtliche Ecken von

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \qquad x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Eine Firma stellt Gefriertruhen und Kühlschränke her. Bei der Herstellung muss folgendes beachtet werden:

a.) Die Abteilung, die die Gehäuse herstellt, kann in einem Monat höchstens 1000 Gehäuse fertigstellen.

b.) Die Montageabteilung für Gefriertruhen kann in einem Monat höchstens 600 Gefriertruhen montieren.

c.) Die Montageabteilung für Kühlschränke kann in einem Monat höchstens 800 Kühlschränke montieren.

d.) Die Abteilung für die elektrische Installation kann in einem Monat höchstens 800 Gefriertruhen oder 1200 Kühlschränke oder eine entsprechende lineare Kombination im Monat herstellen.

Der Gewinn bei einer Gefriertruhe beträgt 180 EUR, bei einem Kühlschrank 135 EUR. Formulieren Sie das zugehörige LP als Standardproblem. Bestimmen Sie sämtliche Ecken der zulässigen Menge und berechnen Sie die optimale Ecke.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 5 , Abgabe: Freitag, 23.11.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 15: (3 Punkte)
Zeigen Sie: Der Punkt $x = (0,4,1,0,6)^T$ ist eine Lösung des LP

$$\text{minimiere} \quad (0,-1,4,0,-2)\,x$$

$$\text{unter} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

Aufgabe 16: (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass das LP

$$\text{maximiere} \quad (1,3,-10,2,-4)\,x$$

$$\text{unter} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 & -15 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0,$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 17: (3 Punkte)
Man gebe ein Beispiel an, in dem eine entartete Basis-Lösung optimal ist, ohne dass die Bedingung $r_N \leq 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$–Matrix. Für die Basis $B = (i_1, \ldots, i_m)$ gelte $A_B = I$ und $a_{i_p j_s} \neq 0$ für ein $i_p \in B$, $j_s \in N$.
Erzeugen Sie mittels elementarer Zeilenoperationen den Einheitsvektor e_{i_p} in Spalte j_s. Wie lauten die Elemente der neuen Matrix $A' = (a'_{ij})$? Machen Sie sich die Transformationen anhand der Basis $B = (1, \ldots, m)$ klar.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 6 , Abgabe: Freitag, 30.11.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Lösen Sie mit dem Simplex-Verfahren das folgende LP:

$$\begin{array}{lrcl} \text{maximiere} & z(x) = 4x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 14x_4 + 7x_5 & & \\ \text{unter} & 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 7\,, \\ & x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 & \leq & 12\,, \\ & x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq & 15\,, \\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 & \geq & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Ein Betrieb stellt vier Güter P_1, P_2, P_3, P_4 her. Der Gewinn pro Mengeneinheit ist in Gewinneinheit:

Gut	P_1	P_2	P_3	P_4
Gewinn	12	8	10	1

Für die Produktion stehen pro Tag 50 Maschinenstunden und 120 Arbeitskraftstunden zur Verfügung. Für die einzelnen Produkte werden benötigt:

	Maschinenstunden	Arbeitskraftstunden
P_1	1	3
P_2	2	1
P_3	1	2
P_4	1	1

Formulieren Sie das zugehörige LP. Wie muss der Betrieb produzieren, um den Gewinn zu maximieren? Geben Sie den maximalen Gewinn an. Bestehen Überkapazitäten bei optimaler Produktion?

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Berechnen Sie mit der Zweiphasenmethode die Lösung des LP's:

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimiere} & z(x) = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & & \\ \text{unter} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 2\,, \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 1\,, \\ & x_i & \geq & 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \end{array}$$

Aufgabe 22: (3 Punkte)
Prüfen Sie nach, ob das folgende System eine Lösung besitzt.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & \leq & 60, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 & = & 12, \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 10, \\ 2x_1 & + & 2x_3 & & & & & \geq & 30, \\ & & & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Aufgabe 23: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 7.12.2001, 9.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm zum Simplex-Verfahren. Testen Sie die Korrektheit Ihres Programmes an dem LP aus Aufgabe 19. Lösen Sie das folgende LP, bei dem die Herstellung von 8 Produkten aus 11 Rohstoffen optimiert wird:

$$\max \quad \{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} c &= (15, 15, 20, 30, 20, 40, 25, 18) \\ b &= (150, 250, 100, 300, 200, 400, 500, 550, 350, 385, 200)^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 2 & 0 & 0 & 1.5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1.2 & 1 & 0.5 & 0.4 & 3 & 3 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & 1.5 & 1 & 1.5 & 3.2 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5 & 1 & 1.4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 2 & 1.5 & 4 & 0 & 2 \\ 1.5 & 1.2 & 1.1 & 1.3 & 2 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1.5 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0.5 & 2 & 2.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2 & 1.5 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die optimale Lösung mit Ihrem Programm und lassen Sie das optimale Tableau ausdrucken. Der optimale Zielfunktionswert ist $z_0 = 6861.64$.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 7 , Abgabe: Freitag, 7.12.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 24: (3 Punkte)
Gegeben seien eine in einem Intervall stetige Funktion $y = f(x)$ und N diskrete Abzissen x_k, $k = 1, \ldots, N$. Gesucht ist ein Polynom $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, welches die Funktion $y = f(x)$ in dem Sinne möglichst gut approximiert, dass der maximale Betrag der *Residuen* $r_k := P_n(x_k) - f(x_k)$, $k = 1, \ldots, N$, minimal wird (TSCHEBYCHEV - Approximation).
Formulieren Sie dieses Problem als ein geeignetes lineares Optimierungsproblem.
Hinweis: Welche Ungleichungen gelten für $R := \max\{|r_k| \mid k = 1, ..., N\}$?

Aufgabe 25: (4+3 Punkte)
Gegeben sei das folgende LP mit den beiden freien Variablen x_1, x_2:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{maximiere} & \multicolumn{9}{l}{z(x) = -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4} \\
\text{unter} & 3x_1 & + & 3x_2 & - & 12x_3 & + & 6x_4 & \geq & 12\,, \\
 & -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & \leq & 6\,, \\
 & & & 2x_2 & & & & -2x_4 & = & -2\,, \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0\,, \\
 & & & & & & & x_3, x_4 & \geq & 0\,.
\end{array}$$

(a) Eliminieren Sie die Variablen x_1, x_2 und berechnen Sie die Lösung

   (1) auf graphischem Wege.

   (2) mit der Zweiphasen-Methode.

(b) Substituieren Sie $x_i = u_i - v_i$, $u_i = x_i^+$, $v_i = x_i^-$ $(i = 1, 2)$ und lösen Sie das resultierende LP mit der Zweiphasen-Methode.

Aufgabe 26: (2 Punkte)
Mit den Bezeichnungen von § 6 seien die Basen $B = (1, \ldots, m)$, $\overline{B} = (1, \ldots, p-1, s, p+1, \ldots, m)$ gegeben. Für die $(m \times m)$–Matrix S mit

$$Se_i = e_i \quad (i \neq p)\,, \quad S\tilde{a}^s = e_p$$

zeige man

$$A_{\overline{B}}^{-1} = S A_B^{-1}\,.$$

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Lösen Sie mit Hilfe des revidierten Simplexverfahrens das Problem

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximiere} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 12\,, \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12\,, \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10\,, \\
 & x_i & \geq & 0 & , & i & = & 1,2,3\,.
\end{array}$$

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 8 , Abgabe: Freitag, 14.12.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 28: (2+2+2 Punkte)

(a) Gegeben seien $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $(m_i \times n)$–Matrizen A_i $(i = 1, 2)$ und eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, n\}$. Bestimmen Sie das duale Problem (P^*) zum Primalproblem (P):

$$\min\{cx \mid A_1 x \geq b_1 \ , \quad A_2 x = b_2 \ , \ x_i \geq 0 \ \text{für} \ i \in I\} \ .$$

(b) Bestimmen Sie das duale Problem zum LP:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{Maximiere} & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & \\ \text{unter} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4\,, \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3\,, \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & \geq & 2\,, \\ & & & & & x_1, x_3 & \geq & 0\,. \end{array}$$

(c) Bestimmen Sie (P^*) zum Primalproblem

$$\min\{x_1 - 2x_2 + 2x_3 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \ , \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\} \ ,$$

und lösen Sie (P) und (P^*).

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Eine Aufgabenstellung aus der statistischen Schätztheorie führt auf das folgende LP:

$$\begin{array}{rl} \text{maximiere} & z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq \beta\,, \\ & 0 \leq x_j \leq 1\,, \quad j = 1, \dots, n\,. \end{array}$$

Hierbei seien $p_j > 0$ und $q_j > 0$ Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \ , \qquad \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p_n}{q_n} \ .$$

Die Zahl $\beta > 0$ sei hinreichend klein.

(a) Stellen Sie das zum obigen Problem duale Problem auf in der Variablen $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Zeigen Sie, dass für den Index

$$k := \min\{j \in \{1, \dots, n\} \mid q_{j+1} + q_{j+2} + \dots + q_n \leq \beta\}$$

die optimalen Lösungen des obigen LP und des dualen LP gegeben sind durch:

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , \; j < k \\ (\beta - q_{k+1} - \cdots - q_n)/q_k & , \; j = k \\ 1 & , \; j > k \end{array} \right\} ,$$

$$\lambda_j = \left\{ \begin{array}{ll} p_k/q_k & , \; j = 0 \\ 0 & , \; 1 \le j \le k \\ q_j \left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k} \right) & , \; j > k \end{array} \right\} .$$

Aufgabe 30: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 21.12.2001, 9.00 Uhr)
Benutzen Sie Ihr Programm zum Simplex-Verfahren und berechnen Sie die Lösung der beiden folgenden LP's mit der Zweiphasenmethode:

(a)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Minimiere} & \multicolumn{7}{l}{2x_1 + 4x_2 + 5x_3} \\ \text{unter} & 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \ge & 40\,, \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \ge & 30\,, \\ & x_1 & + & & & 4x_3 & \ge & 20, \\ & & & x_1, & x_2, & x_3 & \ge & 0\,. \end{array}$$

Führen Sie Schlupfvariablen x_4, x_5, x_6 ein. Die optimale Lösung lautet: $x_1 = 140/11$, $x_3 = 20/11$, $x_5 = 10/11$, $x_2 = x_4 = x_6 = 0$.

(b) Eine Öl-Raffinerie möchte aus Roh-Öl verschiedene Produkte herstellen und dabei die Produktionskosten (in US$)

$$z(x) = 16.5x_1 + 5.25x_3 + 5.25x_4 + 3x_{13} \;, \quad x \in \mathbb{R}^{16}$$

minimieren unter den folgenden Restriktionen ($x \ge 0$)

(1) Höchstgrenze für Roh-Öl:

$$x_1 \le 750\,000$$

(2) Massen-Bilanz der Komponenten:

$$\begin{array}{lclclclcl} 0.178x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0\,, \\ 0.048x_1 & - & x_4 & - & x_5 & - & x_6 & = & 0\,, \\ 0.069x_1 & - & x_7 & - & x_8 & - & x_9 & = & 0\,, \\ 0.184x_1 & - & x_{10} & - & x_{11} & - & x_{12} & = & 0\,, \\ 0.241x_1 & - & x_{13} & - & x_{14} & & & = & 0\,, \\ 0.266x_1 & - & x_{15} & - & x_{16} & & & = & 0\,. \end{array}$$

(3) Produktions-Anforderungen:

$$\begin{array}{rcr} x_2 + 0.865x_3 + 0.85x_4 + 0.373x_{13} & = & 124\,400\,, \\ x_5 + x_7 + x_{10} & = & 18\,800\,, \\ x_8 + x_{11} + x_{16} & = & 90\,700\,, \\ x_6 + x_9 + x_{12} + 0.331x_{13} + x_{14} + x_{15} & = & 291\,600\,. \end{array}$$

(4) Qualitäts-Anforderungen:

$$\begin{array}{rcl} 15x_2 - 6.75x_3 - 8.5x_4 - 5.97x_{13} & \le & 0\,, \\ 10x_8 + 10x_{11} - 90x_{16} & \le & 0\,, \\ -25.7x_6 - 25.7x_9 - 16.1x_{12} - 4.4x_{13} - 5.1x_{14} & \le & 0\,. \end{array}$$

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 9 , Abgabe: Freitag, 21.12.2001, 9.00 Uhr

Aufgabe 31: (3 Punkte)
Berechnen Sie mit dem dualen Simplex-Verfahren die Lösung des LP's

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{minimiere} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 42\,, \\ & -4x_1 & + & 8x_3 & \geq & -7\,, \\ & 3x_2 & - & 2x_3 & \geq & 105\,, \\ & & & x & \geq & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 32: (5 Punkte)
Der Nikolaus hat Lakritzstangen der Länge 40 cm auf Lager. Zur Bescherung benötigt er

mindestens	4000	Lakritzstangen der Länge	18 cm,
mindestens	5000	Lakritzstangen der Länge	16 cm,
mindestens	3000	Lakritzstangen der Länge	12 cm .

Wie muss der Nikolaus die 40 cm langen Lakritzstangen zuschneiden, damit der Abfall möglichst gering wird?
Hinweis: Es gibt 6 Strategien (Begründung!), die 40 cm langen Stangen zuzuschneiden. Setzen Sie $x = (x_1, \ldots, x_6)^T$, wobei x_i die Anzahl der Stangen ist, die nach Strategie i zugeschnitten werden. Lösen Sie das Problem mit dem dualen Simplex-Verfahren.

Aufgabe 33: (5 Punkte)
Lösen Sie das LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{minimiere} & & & 4x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & & \\ \text{unter} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 3\,, \\ & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & \geq & 2\,, \\ & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

folgendermaßen:

(1) Bestimmen Sie das duale LP und lösen Sie es graphisch.

(2) Bestimmen Sie mittels der dualen Lösung diejenigen *primalen* Variablen, welche den Wert Null in der optimalen Lösung haben.
Hinweis: Komplementarität, Sätze (7.7), (7.8).

(3) Berechnen Sie die optimale primale Lösung.

Aufgabe 34: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 11.01.2002, 9.00 Uhr)
Programmieren Sie das duale Simplex-Verfahren (7.12). Testen Sie Ihr Programm an den folgenden beiden LP‘s:

(a) Fünf Metallteile sollen aus einheitlichen Blechtafeln geschnitten werden. Hierzu gibt es 10 Schnittpläne. Das Problem, bei vorgegebener Mindestzahl für jedes der fünf Metallteile möglichst wenig Blechtafeln zu verbrauchen, führt auf das folgende LP:

$$\min \quad \{cx \quad | \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0\}$$

mit

$$\begin{aligned} c &= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) \in \mathbb{R}^{10}\,, \\ b &= (600,350,475,700,850)^T \in \mathbb{R}^5\,, \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der optimale Zielfunktionswert beträgt: $z_0 \approx 241.0896$.

(b) Beim Einsatz verschiedener Technologien zur Herstellung zweier Produkte sollen die Kosten minimiert werden:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr} \text{minimiere} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 7x_5 & + & 5x_6 & & \\ \text{unter} & & & & & & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 6x_5 & + & 8x_6 & \leq & 35\,, \\ & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & + & 8x_5 & + & 9x_6 & \leq & 30\,, \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & 5x_6 & \leq & 35\,, \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 7x_5 & + & 9x_6 & \leq & 30\,, \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq & 5\,, \\ & & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \geq & 2\,, \\ & & & & & & & & & & & x & \geq & 0\,. \end{array}$$

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 10 , Abgabe: Freitag, 11.01.2002, 9.00 Uhr

Aufgabe 35: (6 Punkte)
Bei der Lösung des Problems

$$(P) \qquad \min\{cx \mid Ax \geq b, \quad x \geq 0\}, \quad c \geq 0$$

mit dem dualen Simplex-Verfahren löst man

$$(P_1) \qquad \min\{cx \mid -Ax + y = -b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

vom “dualen Standpunkt”. Die optimale Lösung sei nicht entartet.
Zeigen Sie: Die optimale Lösung λ des dualen Problems

$$(P^*) \qquad \max\{\lambda b \mid \lambda A \leq c, \quad \lambda \geq 0\}$$

erhält man aus dem optimalen Tableau folgendermaßen:

(a) y_j Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = 0$,

(b) y_j Nicht-Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = -r_{k_j}$, r_{k_j} ist der unter y_j stehende Koeffizient.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zwischen der Lösung $\tilde{\lambda}$ des dualen Problems von (P_1) und der Lösung λ von (P^*) die Beziehung $\lambda = -\tilde{\lambda}$ gilt.

(c) Überprüfen Sie die Aussage in (a) und (b) an der Lösung des LP's

$$\min\{x_1 + x_2 \mid 2x_1 + x_2 \geq 12, \;\; 5x_1 + 8x_2 \geq 74, \;\; x_1 + 6x_2 \geq 28, \quad x \geq 0\}.$$

Aufgabe 36: (5 Punkte)
Lösen Sie das LP

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
\text{Maximiere} & & 6x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & & \\
\text{unter} & & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & \leq & 6, \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & \geq & 1, \\
& - & 2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & \geq & 4, \\
& & & & x_2 & + & 2x_3 & & & + & 2x_5 & = & 11, \\
& & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 6, \\
& & & & & & & & & & x & \geq & 0,
\end{array}$$

mit der Dreiphasenmethode. Der optimale Wert ist $z_0 = 22$.

Aufgabe 37: (3 Punkte)
Sei $w : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ die Optimalwert-Funktion des parametrischen LP's

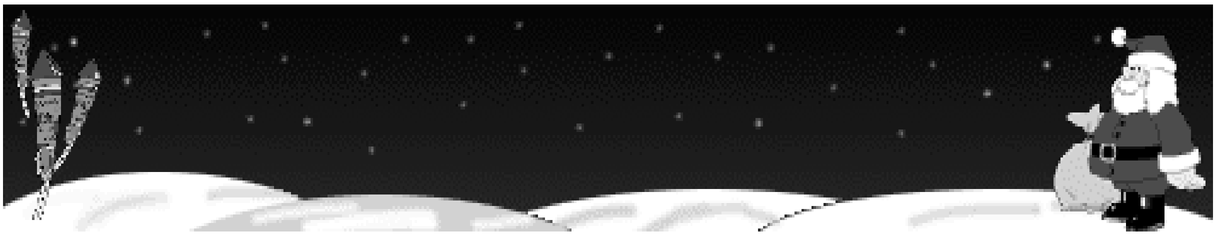
$$P(t) \qquad \min\{c(t)x \mid Ax = b\,,\;\; x \geq 0\}\,, \quad t \in \mathbb{R}^k,$$

mit einer affin-linearen Funktion $c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Die zulässige Menge $\mathcal{X} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\; x \geq 0 \,\}$ sei nicht leer. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $D = \{t \in \mathbb{R}^k \mid w(t) \in \mathbb{R}\}$ ist konvex.

(b) Die Funktion $w : D \to \mathbb{R}$ ist konkav.

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie das duale Problem.



Wir wünschen allen Teilnehmern ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Rutsch ins neue Jahr !

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 11 , Abgabe: Freitag, 18.01.2002, 9.00 Uhr

Aufgabe 38: (4+4 Punkte)
Das Produktionsmodell

$$\begin{array}{llrcrcrcr} \text{maximiere} & z = & 6x_1 & + & 14x_2 & + & 13x_3 & & \\ \text{unter} & & 0.5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 24\,, \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 60\,, \\ & & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0\,, \end{array}$$

hat die optimale Lösung $x_1 = 36,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 6$ mit Basis $B = (1,3)$.

(a) Bestimmen Sie die optimalen Lösungen zu dem parametrischen Zielfunktional

$$z = (6+t)x_1 + (14+2t)x_2 + (13+2t)x_3$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Optimalwert–Funktion $w : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

(b) Berechnen Sie die optimalen Lösungen zur parametrischen rechten Seite

$$b(t) = \begin{pmatrix} 24+t \\ 60-t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Optimalwert–Funktion $w : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 39: (3+3 Punkte)

(a) Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x_1, x_2) = -x_1^3 + 6ax_1x_2 - x_2^3\,.$$

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die lokalen Extrema von f.

(b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - 2x_1^3\,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

auf die Existenz lokaler Extremstellen. Skizzieren Sie die Höhenlinien

$$\{\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1x_2 - 2x_1^3 = a\,\} \quad \text{für} \quad a < 0,\ a = 0 \text{ und } a > 0.$$

Aufgabe 40: (5 Punkte)
Diskutieren Sie den Sensitivitätssatz (1.7) aus Kapitel II für folgende Funktionen:

(a) $f(x,p) = x^2 - px \quad (p \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x,p) = x^3 - px \quad (p \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x,p) = \frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad (0 < p < \frac{1}{4})$.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 12 , Abgabe: Freitag, 25.01.2002, 9.00 Uhr

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Einer Pyramide mit bekannter Unterkantenlänge a und Höhe h soll ein Quader maximalen Inhalts einbeschrieben werden (vgl. Bild 1).

a) Formulieren Sie das nichtlineare Optimierungsproblem mit Beschränkungen.

b) Geben Sie die optimale Lösung an.

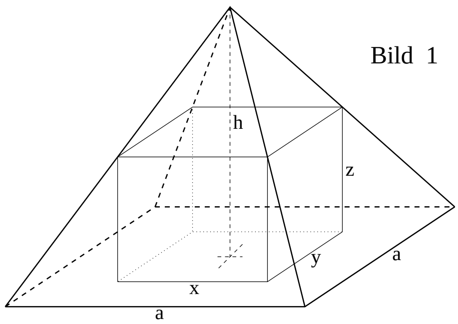


Bild 1

Hinweis: Betrachten Sie den Querschnitt und vermeiden Sie den Satz von Pythagoras.

Aufgabe 42: (3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion

$$f(x) = x_1 \cdot x_2$$

unter der Nebenbedingung $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(x)$ in Bezug auf $g(x) = 0$. Berechnen Sie den Lagrange-Multiplikator λ im Satz von KUHN-TUCKER in allen Minima und Maxima.

Aufgabe 43: (3 Punkte)
Eine Blechdose in Zylinderform (Radius r und Höhe h) mit $1\,\ell$ Volumen soll so hergestellt werden, dass dabei möglichst wenig Blech verbraucht wird.
Formulieren Sie das zugehörige zweidimensionale Optimierungsproblem in den Variablen r und h und berechnen Sie die Lösung der KUHN-TUCKER-Bedingungen.

Aufgabe 44: (3 Punkte)
Für eine Menge $S \in \mathbf{R}^n$ und $\overline{x} \in S$ sei $T(S, \overline{x})$ der in (3.1) definierte Tangentialkegel. Zeigen Sie, dass $T(S, \overline{x})$ ein abgeschlossener Kegel mit Spitze im Ursprung ist.

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 13 , Abgabe: Freitag, 01.02.2002, 9.00 Uhr

Aufgabe 45: (2 Punkte)
Sei A eine symmetrische $(n \times n)$–Matrix. Diskutieren Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x \mid x^T x = 1 \right\} .$$

Welche Bedeutung haben der LAGRANGE–Multiplikator $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und die optimale Lösung $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$? Überlegen Sie, dass $\bar{x}$ regulär ist.

Aufgabe 46: (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

$$\max \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i \;\mid\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \;,\;\; x_i \geq 0 \;,\;\; i = 1, \ldots, n \right\} = \left(\frac{1}{n} \right)^n .$$

(b) Beweisen Sie, dass das *geometrische Mittel* von n Zahlen kleiner gleich dem *arithmetischen Mittel* ist, d.h. für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$ gilt:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \;.$$

Aufgabe 47: (4 Punkte)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimiere} & x^2 + y^2 \\ \text{unter} & (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq \epsilon , \quad x + y \geq 2 , \end{array}$$

mit einem Parameter $\epsilon \in (0, 4)$.

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem auf graphischem Wege für alle $\epsilon \in (0, 4)$.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der Kuhn-Tucker-Bedingungen für $\epsilon \in (0, 4)$ und prüfen Sie jeweils die Regularität.

Aufgabe 48: (2+3+3 Punkte)
Ein "Allokationsproblem" führt auf ein separables Optimierungsproblem der Form

$$\min\{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b \;, \quad x_k \geq 0 \,\}$$

mit C^1-Funktionen $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und Konstanten $a_k > 0$, $b > 0$.

(a) Diskutieren Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen.

(b) Berechnen Sie die optimale Lösung $\bar{x} \in \mathbf{R}^n_+$ und den LAGRANGE–Multiplikator $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}$ für den Fall

$$f_k(x) = c_k x + \frac{d_k}{x} \,, \quad x > 0 \,, \quad c_k > 0 \,, \quad d_k > 0 \,.$$

Zeigen Sie dazu, dass $\bar{\lambda}$ die Nullstelle einer nichtlinearen Gleichung unter der Voraussetzung

$$b > \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{d_k}{c_k} \right)^{1/2}$$

ist. Bestimmen Sie $\bar{\lambda}$ explizit im Falle $c_k = c \cdot a_k \quad (k = 1, \ldots, n)\,,\ c > 0$.

(c) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $n = 3$ die optimale Lösung im Falle

$$f_k(x) = \ln \left(kx + \frac{1}{k} \right) \,, \quad x \geq 0 \,, \quad a_k = 1 \,, \quad b = 1 \,.$$

Übungen zur Vorlesung Optimierung I

Übungsblatt 14 , Abgabe: Freitag, 08.02.2002, 9.00 Uhr

Aufgabe 49: (4 Punkte)
Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein zulässiger Punkt für das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimiere} & f(x) \\ \text{unter} & g_i(x) \le 0\,, \quad i = 1, ..., k, \\ & g_i(x) = 0\,, \quad i = k+1, ..., m. \end{array}$$

Die Funktionen $f, g_1, ..., g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar in $\bar{x}$.
Sei $I(\bar{x}) = \{\, i \in \{1, ..., k\} \mid g_i(\bar{x}) = 0 \,\}$. Betrachten Sie das LP

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimiere} & f'(\bar{x})v\,, \qquad v \in \mathbb{R}^n, \\ \text{unter} & g_i'(\bar{x})v \le 0\,, \quad i \in I(\bar{x}), \\ & g_i'(\bar{x})v = 0\,, \quad i = k+1, ..., m. \end{array}$$

(a) Berechnen Sie das zu (LP) duale lineare Programm.

(b) Sei $\bar{x}$ eine reguläre lokale Minimalstelle des nichtlinearen Optimierungsproblems (P). Beweisen Sie in diesem Fall den Satz von Kuhn-Tucker mit dem Dualitätssatz der linearen Optimierung.

Aufgabe 50: (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders, den man in ein Ellipsoid

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\,, \quad a, b, c > 0\,,$$

legen kann. Die Seiten des Quaders seien parallel zu den Koordinatenachsen. Benutzen Sie die notwendigen Bedingungen von Kuhn-Tucker.

Aufgabe 51: (3 Punkte)
Diskutieren Sie die notwendigen Bedingungen von Kuhn-Tucker für das folgende Problem:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{minimiere} & 3x_1^2 & + & 2x_2^2 & + & 4x_3^2 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & - & 8 & = & 0\,, \\ & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 12 & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 52: (3 Punkte)
Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(5, 2)$ von der Parabel $P = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2x\,\}$. Stellen Sie das Problem grafisch dar und diskutieren Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen.