Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 1 : Abgabe, Montag, 19.04.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Für das Optimierungsproblem

$$\max\{x + 3y + 20z \mid x^2 + 3y^2 - 20z^2 + c^2 = 0\} \ , \quad c > 0 \ ,$$

bestimme man

(a) sämtliche Punkte (x, y, z, λ), die den Bedingungen von KUHN-TUCKER genügen.

(b) die globale Maximalstelle.

Aufgabe 2: (2+3+3 Punkte)
Ein "Allokationsproblem" führt auf ein separables Optimierungsproblem der Form

$$\min\{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b \ , \quad x_k \geq 0\}$$

mit C^1-Funktionen $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und Konstanten $a_k > 0,\ b > 0$.

(a) Diskutieren Sie die KUHN-TUCKER Bedingungen.

(b) Berechnen Sie die optimale Lösung $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+$ und den LAGRANGE - Multiplikator $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ für den Fall

$$f_k(x_k) = c_k x_k + \frac{d_k}{x_k} \ , \quad x > 0 \ , \quad c_k > 0 \ , \quad d_k > 0 \ .$$

Zeigen Sie dazu, daß $\overline{\lambda}$ die Nullstelle einer nichtlinearen Gleichung ist.

Bestimmen Sie $\overline{\lambda}$ explizit im Falle $c_k = c a_k \quad (k = 1, \ldots, n),\ c > 0$.

(c) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $n = 3$ die optimale Lösung im Falle

$$f_k(x) = \ell n \left(kx + \frac{1}{k} \right) \ , \quad x \geq 0 \ , \quad a_k = 1 \ , \quad b = 1 \ .$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Punkt $(\overline{x}, \overline{y}) = (1, 1)$ die (globale) Maximalstelle des folgenden Optimierungsproblems ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Maximiere} & x \cdot y \\ \text{unter} & x + y = 2 \ , \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq 0 \end{array}$$

<u>Hinweis:</u> Prüfen Sie die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung nach.

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 2 : Abgabe, Montag, 26.04.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Mit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ sei das Problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & f(x_1, \ldots, x_n) = \det(x_i^T x_j)_{i,j=1,\ldots,n} \\ \text{unter} & \\ & g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1^T x_1 - 1 \\ \vdots \\ x_n^T x_n - 1 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

zu lösen.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine globale Maximalstelle $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ des Problems mit (1) $f(\overline{x}) = 1$, (2) $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ ist ONS.

Hinweis: Berechnen Sie $f'(\overline{x})v + \lambda g'(\overline{x})v$ für $v \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$.

(b) Folgern Sie aus (a) die HADAMARD'sche Determinantenungleichung

$$|\det(x_i^T x_j)| \le \prod_{i=1}^{n} x_i^T x_i \qquad \text{für alle} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot n} \ .$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Man beweise die notwendigen Bedingungen 2. Ordnung in Satz 5.12(i) für Optimierungsprobleme mit Gleichungsrestriktionen $g(x) = 0$. Der Punkt $\overline{x}$ sei normal.
Hinweis: Die in Satz 3.11 angegebene Kurve $x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ mit

$$x(0) = \overline{x} \ , \quad \dot{x}(0) = v \in L(S, \overline{x})$$

ist eine C^2-Kurve. Berechnen Sie dann

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))|_{t=0}$$

unter Verwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Aufgabe 6: (2+3+3 Punkte)
Gegeben sei das parameterabhängige Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min \ \{f(x,\epsilon) \ \mid \ g(x,\epsilon) \le 0\}, & \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbf{R^2}, \quad \epsilon_1 > \mathbf{0} \quad , \\ f(x,\epsilon) = x_1 + \epsilon_2 x_2 \quad , & g(x,\epsilon) = x_1^2 + x_2^2 - \epsilon_1^2 \quad . \end{array}$$

(a) Berechnen Sie die optimale Lösung $x = x(\epsilon)$ und den zugehörigen Multiplikator $\lambda = \lambda(\epsilon)$.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien des optimalen Wertes $f(x(\epsilon), \epsilon) = const.$ und verifizieren Sie die Schattenpreisformel in (6.18)(ii).

(c) Geben Sie die Matrizen A_0 und B_0 in (6.18)(i) an und verifizieren Sie $(dx/d\epsilon, d\lambda/d\epsilon)^T = -A_0^{-1} B_0$ durch Einsetzen der Lösungen $x(\epsilon), \lambda(\epsilon)$ aus (a).

Hinweis:

$$A_0^{-1} = \frac{1}{2\epsilon_1^2} \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{\lambda} & -\frac{x_1 x_2}{\lambda} & x_1 \\ -\frac{x_1 x_2}{\lambda} & \frac{x_1^2}{\lambda} & x_2 \\ x_1 & x_2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 3 : Abgabe, Montag, 03.05.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 7: (3+5 Punkte)
Gegeben seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $k > 1$. Das Problem, eine kleinstmögliche Kugel zu finden, welche $a_1, \ldots, a_k$ enthält, führt auf das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}} \{ f(x,z) \mid g_i(x,z) \le 0, \quad i = 1, \ldots, k \} \quad ,$$
$$f(x,z) := z \quad ,$$
$$g_i(x,z) := \|x - a_i\|^2 - z, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Es sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

(a) Man überlege, daß eine optimale reguläre Lösung (x_0, z_0) existiert und bestimme die Bedingungen von KUHN/TUCKER in (x_0, z_0).

(b) Sei $R = \sqrt{z_0}$ der Radius der Kugel und

$$d = \max_{i,j=1,\ldots,k} \|a_i - a_j\|$$

der maximale Abstand. Man beweise die Abschätzung

$$d \ge R \left(\frac{2k}{k-1} \right)^{1/2} \quad .$$

Verbessern Sie die Abschätzung mit $q :=$ Anzahl der aktiven Indizes.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und unter Verwendung von $D_{ij} = \|a_i - a_j\|^2 = \|a_i - x_0 - (a_j - x_0)\|^2$ die Beziehungen:

$$2R^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i D_{ij} \lambda_j \quad ,$$

$$\sum_{i \ne j} \lambda_i D_{ij} \lambda_j \le d^2 \sum_{i \ne j} \lambda_i \lambda_j \quad ,$$

$$\sum_{i \ne j} \lambda_i \lambda_j = 1 - \sum_i \lambda_i^2 \le 1 - \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 8: (5 Punkte)
Gegeben sei das Störungsproblem (6.4)

$$(P_\epsilon) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ f(x,\epsilon) \mid g(x,\epsilon) \in K \}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^p \quad ,$$

mit C^1-Abbildungen f, g. Es existiere eine Umgebung $E \subset \mathbb{R}^p$ von $\epsilon = 0$ und eine C^1-Abbildung $x(\cdot) : E \to \mathbb{R}^n$ mit:

(1) $x(\epsilon)$ ist lokale Minimalstelle von (P_ϵ) für $\epsilon \in E$,

(2) für $\overline{x} = x(0)$ ist $\Lambda(\overline{x}) = \left\{ \overline{\lambda} \right\}$ einpunktig.

Man beweise die Schattenpreisformel

$$\frac{df(x(\epsilon),\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = L_\epsilon(\overline{x},\overline{\lambda},0) \quad .$$

(Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $F(\epsilon) = \overline{\lambda}(g(x(\epsilon),\epsilon) - g(\overline{x},0))$ in E.)

Wann sind für das gestörte LP

$$\min\{c(\varepsilon)x \mid Ax = b(\varepsilon), x \geq 0\}\ , \quad \varepsilon \in E \subset \mathbb{R}^p\ ,$$

die Voraussetzungen (1) und (2) erfüllt?

Aufgabe 9: (3 Punkte)
Sei $w : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ die Optimalwert-Funktion des parametrischen LP

$$P(t) \qquad \min\{c(t)x \mid Ax = b\ ,\ \ x \geq 0\}\ , \quad t \in \mathbb{R}^k,$$

mit einer affin-linearen Funktion $c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie:

(a) Die Menge $D = \{t \in \mathbb{R}^k \mid w(t) \in \mathbb{R}\}$ ist konvex.

(b) Die Funktion $w : D \to \mathbb{R}$ ist konkav.

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 4 : Abgabe, Montag, 10.05.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Ein Produktionsmodell führt auf das LP

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{maximiere} & 5x_1 & + & 4.5x_2 & + & 6x_3 & & \\ \text{unter} & 6x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & \leq & 60 \\ & 10x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & \leq & 150 \\ & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Die optimale Lösung ist $x_1 = 45/7,\ x_2 = 30/7,\ x_3 = 0,\ z_0 = 51\frac{3}{7}$ zur Basis $B = (1,2)$. Die zweite Produktionsbeschränkung werde parametrisiert durch

$$10x_1 + 20x_2 + 10x_3 \leq 150 + t\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Für welche Werte t ist die Basis $B = (1,2)$ optimal? Berechnen Sie $x_B(t)$.

Aufgabe 11: (4+4 Punkte)
Das Produktionsmodell

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{maximiere} & z = 6x_1 & + & 14x_2 & + & 13x_3 & & \\ \text{unter} & 0.5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 24 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 60 \\ & & & & & & & \\ & x_1\ , & & x_2\ , & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

hat die optimale Lösung $x_1 = 36,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6$ mit Basis $B = (1,3)$.

(a) Bestimmen Sie die optimalen Lösungen zu dem parametrischen Zielfunktional

$$z = (6+t)x_1 + (14+2t)x_2 + (13+2t)x_3$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Optimalwert - Funktion $w : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

(b) Berechnen Sie die optimalen Lösungen zur parametrischen rechten Seite

$$b(t) = \begin{pmatrix} 24+t \\ 60-t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Optimalwert - Funktion $w : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Für das LP

$$\min\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

diskutiere man die Kuhn-Tucker Bedingungen. Welche Bedeutung haben die Lagrange - Multiplikatoren? Für die Daten

$$c = (-2, 3, -1)\ , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

berechne man die Menge $\Lambda(\overline{x})$ der Lagrange - Multiplikatoren im optimalen Punkt $\overline{x} = (6,6,0)^T$.

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 5 : Abgabe, Montag, 17.05.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 13: (6 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Abbildungen und seien $K \subset \mathbb{R}^m$ und $C \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen.

(a) Zeigen Sie: Ist $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ eine lokale Minimalstelle des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{unter} & g(x) \in K\ , \quad x \in C\ , \end{array}$$

so gibt es einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$, mit

$$\begin{array}{rcll} [\lambda_0 f'(\overline{x}) + \lambda g'(\overline{x})](x - \overline{x}) & \geq & 0 & \text{für alle} \quad x \in C\ , \\ \lambda_0 \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda(-y) & \geq & 0 & \text{für alle} \quad y \in K(g(\overline{x}))\ . \end{array}$$

(b) Spezialisieren Sie diese Bedingungen für das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcl} \text{Minimiere} & f(x) & = & \frac{1}{2}x^T Dx + cx \\ \text{unter} & Ax & = & b\ , \quad x \geq 0\ , \end{array}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$ Matrix D, einem Zeilenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, einer $m \times n$ Matrix A mit rang $(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Beweisen Sie die Bedingungen

$$\begin{array}{rcl} x^T D + c + \lambda A & \geq & 0\ , \\ (\overline{x}^T D + c + \lambda A)\overline{x} & = & 0\ . \end{array}$$

Aufgabe 14: (5 Punkte)
Diskutieren Sie die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung für das quadratische Optimierungsproblem

$$\min \quad \left\{ \frac{1}{2}x^T Dx + cx \mid Ax = b \right\}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$ Matrix D, einem Zeilenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, einer $m \times n$ Matrix A mit rang $(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Drücken Sie die Bedingungen 2. Ordnung aus mit einer $n \times (n-m)$ Matrix N, welche eine Basis von Kern (A) bildet, d.h. die Bedingungen $AN = 0$ und rang $(N) = n - m$ erfüllt. Berechnen Sie dann die optimale Lösung $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ und den Lagrange - Multiplikator $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ explizit.

Aufgabe 15: (3+2 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Beweisen Sie die JENSEN'sche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$$

für alle $x_i \in D \quad (i = 1, \ldots, k)$ und $\alpha_i \geq 0$ mit $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

(b) Zeigen Sie, daß $f(x) = -\ell n(x)$ konvex auf $D = (0, \infty)$ ist. Folgern Sie daraus die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad \text{für} \quad x_i \geq 0\ , \quad \alpha_i \geq 0\ , \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\ .$$

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 6 : Abgabe, Montag, 07.06.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 16: (3+3+3 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und seien $f_i : D \to \mathbb{R}$ konvex für alle $j \in J$ mit einer beliebigen Indexmenge J.

Zeigen Sie, daß

$$f(x) := \sup_{j \in J} f_j(x) \text{ konvex ist .}$$

Hinweis: Überlegen Sie, daß epi $(f) = \bigcap\limits_{j \in J}$ epi (f_j).

(b) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, daß die Abstandsfunktion

$$d_C(x) := \inf \{\|y - x\| \mid y \in C\}$$

konvex ist.

(c) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine *beliebige* Teilmenge.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\varphi_S(x) := \frac{1}{2}\{\|x\|^2 - d_S(x)^2\}$$

konvex ist, wobei die Abstandsfunktion $d_S(x)$ wie in (b) definiert ist.

Hinweis: Entwickle $d_S(x)^2$ und benutze (a).

Aufgabe 17: (5 Punkte)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die BERNSTEIN-Polynome $B_n(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvex, wobei

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \qquad 0 \le x \le 1 .$$

Hinweis: Berechne $B_n''(f)$.

Folgerung: $\lim\limits_{n \to \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$, d.h. jede konvexe Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist ein gleichmäßiger Limes konvexer Polynome.

Aufgabe 18: (Programmieraufgabe) Das Gradientenverfahren zur Minimierung einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. zur Bestimmung von $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\overline{x}) = \min \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} ,$$

ist ein Iterationsverfahren der folgenden Form:

Start: $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Suchrichtung: $d^k = -\nabla f(x^k)$

Schrittweite: (Armijo - Regel) Sei $S = \{2^{-j} \mid j = 0, 1, 2 \ldots\}$. Wähle eine feste Zahl $0 < \mu < \frac{1}{2}$ und bestimme

$$\begin{aligned} \alpha_k = \max\{\alpha \in S \mid f(x^k + \alpha d^k) &\le f(x^k) + \alpha\mu f'(x^k) d^k \\ &= f(x^k) - \alpha\mu \nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)\} \end{aligned}$$

Abbruchkriterium: $\|\nabla f(x^k)\|_2 \le \text{eps}$ oder $k \ge k_0$.

Schreiben Sie ein Programm zum Gradientenverfahren. Berechnen Sie lokale Minimalstellen $\overline{x}$ zu den folgenden Testproblemen, wobei $\mu = 0.1$, eps $= 10^{-5}$ und $k_0 = 500$ gesetzt werden können.

Problem 1: $f(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \{\pm 5, \pm 0.1\}$.

Problem 2: $f(x) = x_1^2 + 25x_2^2$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $x^0 = (2, 2)^T$.

Problem 3: (Rosenbrock-Problem)

$$\begin{aligned} f(x) &= 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \ , \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \ , \\ \overline{x} &= (1, 1)^T \ , \quad x^0 = (-1.2, 1)^T \ . \end{aligned}$$

Problem 4:

$$f(x) = (x_1^2 + 12x_2 - 1)^2 + (49x_1^2 + 49x_2^2 + 84x_1 + 2324x_2 - 681)^2$$

Start: $x^0 = (1, 1)^T$, $f(x^0) = 3.3306 \cdot 10^6$

Lokale Minimalstellen:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (0.28581,\ 0.27936)^T \ , \quad f(\overline{x}) = 5.9225 \ ; \\ \overline{x} &= (-21.026653,\ -36.760090)^T, \quad f(\overline{x}) = 0 \ . \end{aligned}$$

Problem 5*: (Schätzen von Koeffizienten aus experimentellen Daten)

$$f(x) = 10^4 \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{b_i} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 a_i + x_3^2 a_i^2}{1 + x_4^2 a_i} - b_i \right)$$

Daten:

i	a_i	b_i
1	0.0	7.391
2	0.000428	11.18
3	0.00100	16.44
4	0.00161	16.20
5	0.00209	22.20
6	0.00348	24.02
7	0.00525	31.32

Start: $x^0 = (2.7, 90, 1500, 10)^T$, $f(x^0) = 2.905 \cdot 10^4$

Lösung: $\overline{x} = (2.714, 140.4, 1707, 31.51)^T$, $f(\overline{x}) = 318.572$

Abgabe von Aufgabe 18: Mo., 14.06.99, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 7 : Abgabe, Montag, 14.06.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 19: (4 Punkte)

(a) Seien $f_j \in \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ und $t_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, k)$. Für die konvexe (Beweis!) Funktion $f \in \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} t_j f_j(x)$$

berechne man das Subdifferential $\partial f(x)$.

(b) Seien $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ reelle Zahlen und $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, k$. Berechnen Sie für die konvexe Funktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} t_j |x - a_j|$$

das Subdifferential $\partial f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 20: (5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f \in \text{Conv}(D)$ und $x \in \text{int}(D)$. Beweisen Sie die Beziehung

$$f'(x; v) = \max\{\lambda v \mid \lambda \in \partial f(x)\} \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n\,,$$

wobei $\partial f(x)$ der Subgradient von f in x ist.
Hinweis: Zeigen Sie für $v \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

(1) $\qquad \lambda v \leq f'(x; v) \qquad \forall\, \lambda \in \partial f(x)\,.$

(2) $\qquad f'(x; v) \leq \lambda v \qquad$ für ein $\lambda \in \partial f(x)$.

Überlegen Sie zu (2), dass gilt

$$\text{int (epi } (f)) \cap \left\{ \begin{pmatrix} x + tv \\ f(x) + tf'(x; v) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \geq 0 \right\} = \emptyset\,.$$

Aufgabe 21: (5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in \text{Conv}(D)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad \min\{f(x) \mid x \in D\}\,.$$

(i) Jede lokale Minimalstelle $\overline{x} \in D$ von (P) ist eine globale Minimalstelle. Die Menge der optimalen Lösungen von (P) ist konvex.

(ii) Ist f streng (strikt) konvex, so hat (P) höchstens eine optimale Lösung.

(iii) $\overline{x} \in D$ ist genau dann eine optimale Lösung von (p), wenn gilt $0 \in \partial f(\overline{x})$.

Aufgabe 22: (Programmieraufgabe) Das konjugierte Gradientenverfahren zur Minimierung einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. zur Bestimmung von $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\overline{x}) = \min \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \} ,$$

ist ein Iterationsverfahren der folgenden Form (nach FLETCHER, REEVES):

Start: $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $d^0 := -\nabla f(x^0)$

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \ , \quad k = 0, 1, \ldots$

Suchrichtung: $d^k := -\nabla f(x^k) + \gamma_k d^{k-1}$, $\gamma_k := [\|\nabla f(x^k)\| / \|\nabla f(x^{k-1})\|]^2$ für $k = 1, 2, \ldots$.

Schrittweite: (ARMIJO - Regel) Sei $S = \{2^{-j} \mid j = 0, 1, 2 \ldots\}$. Wähle eine feste Zahl $0 < \mu < \frac{1}{2}$ und bestimme

$$\begin{aligned} \alpha_k = \max \{ \alpha \in S \mid f(x^k + \alpha d^k) &\leq f(x^k) + \alpha \mu f'(x^k) d^k \\ &= f(x^k) - \alpha \mu \nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k) \} \end{aligned}$$

Abbruchkriterium: $\|\nabla f(x^k)\|_2 \leq \text{eps}$ oder $k \geq k_0$.

Schreiben Sie ein Programm zum konjugierten Gradientenverfahren. Berechnen Sie lokale Minimalstellen $\overline{x}$ zu den folgenden Testproblemen, wobei $\mu \in [0.01, 0.05]$, eps $= 10^{-5}$ und $k_0 = 5000$ gesetzt werden können.

(1) Probleme 2, 3, 4 von Aufgabe 18.

(2) Berechnen Sie eine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ des folgenden Problems der Nichtlinearen Ausgleichsrechnung:

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i=1}^{6} (y_i - \varphi(t_i, x))^2$$

mit den Daten

$$\varphi(t, x) = x_1 + x_2 e^{x_3 \cdot t} ,$$

i	t_i	y_i
1	- 5	127
2	- 3	151
3	- 1	379
4	1	421
5	3	460
6	5	426

Start: $x^0 = (500, -160, -0.2)^T$

Lösung: $\overline{x} = (523.3, -156.9, -0.1997)^T$

Abgabe von Aufgabe 22: Mo., 28.06.99, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 8 : Abgabe, Montag, 21.06.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Für das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimiere} & f(x_1,x_2) & = & x_1^2 + x_2 \\ \text{unter} & g_1(x_1,x_2) & = & x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0 \\ & g_2(x_1,x_2) & = & x_1 + x_2 - 1 \le 0 \end{array}$$

berechne man einen Sattelpunkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^2_+$ der Lagrange - Funktion.

Aufgabe 24: (7 Punkte)
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $K \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexer Kegel, $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine K-konvexe Abbildung und

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in C,\ g(x) \in K\} .$$

Dem Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad \min\{f(x) \mid x \in S\}$$

wird das folgende Dualproblem zugeordnet:

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \varphi(\lambda) := \inf\limits_{x\in C}(f(x) + \lambda g(x)) \\ \text{auf} & R := \{\lambda \in (-K)^+ \mid \varphi(\lambda) > -\infty\} . \end{array}$$

(1) Zeigen Sie den schwachen Dualitätssatz: Es gilt

$$\varphi(\lambda) \le f(x) \qquad \text{für alle} \quad \lambda \in R\,, \quad x \in S\,.$$

(2) Zeigen Sie den starken Dualitätssatz: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent

(i) $(\overline{x},\overline{\lambda}) \in C \times (-K)^+$ ist ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.

(ii) $\overline{x} \in S$ ist Lösung von (P) und $\overline{\lambda} \in R$ ist Lösung von (D) und es gilt $\varphi(\overline{\lambda}) = f(\overline{x})$.

(c) Zum linearen Optimierungsproblem

(P) Minimiere $f(x) = Cx$
unter

$$\begin{array}{rcl} (Ax)_i & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{ \begin{array}{lcl} = b_i & , & i = 1,\dots,k \\ \le b_i & , & i = k+1,\dots,m \end{array} \right\} \\ x_j & \ge & 0 \quad \text{für } j = 1,\dots,r \le n \end{array}$$

berechne man die Funktion $\varphi(\lambda)$ und die zulässige Menge R des Dualproblems (D).