Prof. Dr. H. Maurer, Dipl.-Math. B. Christiansen WS 09/10

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 1, Abgabe: Freitag, 23.10.2009, 8.15 Uhr

---

**Wöchentliche Übungstermine:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1: | Di. | 10 Uhr | SR1 | Briefkasten | 101 | (Elisabeth Bauma) |
| Gruppe 2: | Di. | 12 Uhr | SR1 | Briefkasten | 102 | (Matthias Bruns) |
| Gruppe 3: | Di. | 16 Uhr | SR1 | Briefkasten | 103 | (Karin Niehues) |
| Gruppe 4: | Mi. | **10 Uhr** | **SR702** | Briefkasten | 104 | (Claudia Denecke) |

Die Teilnahme an einer Übungsgruppe setzt eine Anmeldung über das Kursbuchungssystem des Fachbereichs 10 voraus. Informationen hierzu sowie Aktuelles rund um die Vorlesung sind zu finden unter:

`http://wwwmath1.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Optimierung_WS09`

**Aufgabe 1:** (2+1+1 Punkte)
Gegeben seien die nichtleere und konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sowie die konvexe Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Jedes lokale Minimum von $f$ ist auch ein globales Minimum von $f$.

(b) Die Menge der (globalen) Minima ist konvex.

(c) Ist $f$ streng konvex, dann existiert höchstens ein (globales) Minimum.

**Aufgabe 2:** (1+1+1+2 Punkte)
<u>Hinweis:</u> Setzen Sie folgendes Resultat als bekannt voraus:

1. (Hess $f$)$(x)$ positiv semidefinit $\Rightarrow$ $f$ konvex.
2. (Hess $f$)$(x)$ positiv definit $\Rightarrow$ $f$ strikt konvex.

Gegeben sei eine quadratische Funktion der Gestalt

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sei $A$ *positiv definit*. Zeigen Sie, dass es nur einen stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $\nabla f(\bar{x}) = 0$) gibt und geben Sie diesen explizit an. Ist $\bar{x}$ in diesem Fall auch ein striktes globales Minimum von $f$?

(b) Seien $A$ *positiv semidefinit* (aber nicht positiv definit) und $b \in \text{Bild}(A)$. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall unendlich viele stationäre Punkte gibt, die auch Minima von $f$ sind. Untersuchen Sie den Fall $b \notin \text{Bild}(A)$.

*- bitte wenden -*

(c) Sei $A$ *indefinit* und invertierbar, d.h. $A$ habe sowohl positive als auch negative Eigenwerte, die alle ungleich Null sind. Zeigen Sie, dass es nur einen stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, der aber weder Minimum noch Maximum ist („Sattelpunkt“).

(d) Illustrieren Sie die vorangegangenen drei Fälle für $n = 2$ und $b = 0 \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie mit MATLAB jeweils die vier Höhenlinien $f(x) = t, \quad t = -1, 0, 1, 2$ für die Fälle

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Benötigter MATLAB-Befehl: `contour`. Rufen Sie bei Bedarf über `help contour` die Hilfefunktion auf.)

**Aufgabe 3:** (2+2 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema:

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 12x_1x_2 - 3x_2^2$.

(b) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2)$.

**Aufgabe 4:** (2+2+3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{(-x^2-4y^2)}.$$

(a) Stellen Sie $f$ im Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$ mit MATLAB graphisch dar.
(Hinweis: Benötigte MATLAB-Befehle: `meshgrid` und `mesh`)

(b) Stellen Sie die Höhenlinien (Niveaumengen) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = z\}$ für $z = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1$ im Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$ mit MATLAB dar.
(Hinweis: Benötigter MATLAB-Befehl: `contour`.)

(c) Berechnen Sie (per Hand) die lokalen Extrema von $f$, indem Sie alle stationären Punkte bestimmen und die Hesse-Matrix $(\text{Hess } f)(x)$ in diesen Punkten auf Definitheit untersuchen.

*Bitte bei (a) und (b) die Achsen* `(xlabel, ylabel,` *ggf.* `zlabel)` *und die Graphik* `(title)` *beschriften und die Ausdrucke der Plots abgeben.*

Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 2, Abgabe: Freitag, 30.10.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 5:** (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Maße einer zylindrischen Dose (Inhalt 1 Liter) mit Boden, aber ohne Deckel, so dass der Materialverbrauch minimiert wird. Dabei ist die Wanddicke so gering, dass sie zu vernachlässigen ist. Achten Sie bei der Rechnung auf physikalische Einheiten!

(b) Aus einer Ellipse mit Halbachsen $a$ und $b$ soll ein flächenmaximales Rechteck mit Halbkanten $x$ und $y$ ausgeschnitten werden. Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem auf und geben Sie den Flächeninhalt des gesuchten Rechtecks in Abhängigkeit von $a$ und $b$ an. Zeigen Sie die Optimalität Ihrer Lösung.

Hinweis: Es ist sinnvoll, das Rechteck achsenparallel in die Ellipse zu legen.

**Aufgabe 6:** (4 Punkte)
Ein Möbelfabrikant produziert zwei Arten von Schreibtischen (private und geschäftliche) und verkauft sie an ein Büromöbelgeschäft. Jeder Schreibtisch durchläuft 4 Phasen in der Produktion: Sägen, Zusammenfügen, Vorfertigen und Endfertigen. Die folgende Tabelle gibt an, wie lange die 4 Fertigungsphasen jeweils dauern, wie groß die Tageskapazität an Fertigungszeit jeder Phase ist und wieviel Profit jeder Schreibtisch bringt.

| Phase | Bedarf an Zeit (in Min.) | | Zeit verfügbar (in Std.) |
|---|---|---|---|
| | Private | Geschäftliche | |
| Sägen | 48 | 72 | 16 |
| Zusammenfügen | 120 | 180 | 30 |
| Vorfertigen | 40 | 120 | 16 |
| Endfertigen | 320 | 240 | 64 |
| Profit (in EUR) | 40 | 50 | |

Der Fabrikant möchte seinen Gesamtprofit maximieren. Dies führt auf das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Minimiere} & \multicolumn{5}{l}{z(x) = -40x_1 - 50x_2} \\
\text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 40, \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30, \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24, \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 48, \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Lösen Sie das Optimierungsproblem auf grafischem Wege.

**Aufgabe 7:** (4 Punkte)
Eine Firma stellt Gefriertruhen und Kühlschränke her. Bei der Herstellung muss folgendes beachtet werden:

(a) Die Firma, die die Gehäuse herstellt, kann in einem Monat höchstens 1000 Gehäuse fertigstellen.

(b) Die Montageabteilung für Gefriertruhen kann in einem Monat höchstens 600 Gefriertruhen montieren.

(c) Die Montageabteilung für Kühlschränke kann in einem Monat höchstens 800 Kühlschränke montieren.

(d) Die Abteilung für die elektrische Installation kann in einem Monat höchstens 800 Gefriertruhen oder 1200 Kühlschränke oder eine entsprechende lineare Kombination herstellen.

Der Gewinn bei einer Gefriertruhe beträgt 180 €, bei einem Kühlschrank 135 €.
Formulieren Sie das zugehörige LP als Standardproblem. Bestimmen Sie sämtliche Ecken der zulässigen Menge und berechnen Sie die optimale Ecke.

**Aufgabe 8:** (6 Punkte)
Lösen Sie die folgenden beiden LP's mit Mischungsbedingungen auf grafischem Wege. Geben Sie sämtliche Ecken mit den Werten der Schlupfvariablen an.

(a)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & z(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & \geq & 4, \\ 12x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & \geq & 6, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & z(x) = 34x_1 + 35x_2 + 5x_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 76, \\ 7x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & \leq & 176, \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & \leq & 152, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 52, \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 3, Abgabe: Freitag, 6.11.2009, 8.15 Uhr

---

**Wöchentliche Übungstermine (geändert!):**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1: | Di. | 12 Uhr | SR1 | Briefkasten | 102 | (Matthias Bruns) |
| Gruppe 2: | Di. | 16 Uhr | SR1 | Briefkasten | 103 | (Karin Niehues) |
| Gruppe 3: | Mi. | 10 Uhr | SR702 | Briefkasten | 104 | (Elisabeth Bauma) |

**Aufgabe 9:** (2+2+2 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die konvexe Hülle $\mathrm{co}(K)$ einer Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als die kleinste konvexe Menge, die $K$ enthält, d.h.

$$\mathrm{co}(K) := \bigcap \{M \subset \mathbb{R}^n \,|\, M \text{ konvex }, K \subset M\} \ .$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{co}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in K \ , \ \ \alpha_i \geq 0 \ , \ \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \ k \in \mathbb{N} \right\} \ .$$

(b) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x \in \overset{\circ}{K}$, $y \in \overline{K}$, so gilt

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in \overset{\circ}{K} \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha < 1 \ .$$

(c) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn gilt

$$\alpha K + \beta K \subset K \text{ für alle } \alpha, \beta \geq 0.$$

**Aufgabe 10:** (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge.

Zeigen Sie: Ist $\overline{x} \in K$ eine lokale Minimalstelle des Problems

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{für} \quad x \in K \ ,$$

so gilt die Variationsungleichung

$$(V) \qquad \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \ x \in K \ .$$

Mit welcher Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann mit $(V)$ der Trennungssatz (A.6) im Falle $y \notin \overline{K}$ bewiesen werden?

**Hinweis:** Es gilt $\overline{x} + \alpha(y - \overline{x}) \in K$ für alle $y \in K$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

**Aufgabe 11:** (4 Punkte)
Seien $K_1$, $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere konvexe Teilmengen mit $\operatorname{int}(K_1) \cap \operatorname{int}(K_2) = \emptyset$.

Zeigen Sie: Die Mengen $K_1$ und $K_2$ sind trennbar, das heißt, es gibt einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda x \leq \alpha \leq \lambda y$$

für alle $x \in K_1,\ y \in K_2$.

**Aufgabe 12:** (4 Punkte)
Überprüfen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & e^{\pi} & a & \ln(3) & 38 & 7 \\ 0.1 & \sqrt{2} & 1 & e^{-\pi} & 19 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

eine Lösung $x \geq 0$ besitzt.

**Hinweis:** Verwenden Sie das Lemma von Farkas.

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 4, Abgabe: Freitag, 13.11.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 13:** (2+2 Punkte)

(a) Sei $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, und $b > 0$. Bestimmen Sie sämtliche Ecken von

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \qquad x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(b) Lösen Sie das LP

$$\min \ \{ cx \mid Ax = b, \, x \geq 0 \}$$

mit

$$c = (2, -3, -7, 7), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 14:** (4 Punkte)
Gegeben sei das folgende LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Minimiere} & \multicolumn{7}{l}{z(x) = 2x_1 - 3x_2} \\ \text{unter} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3} & \geq & 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen mit den zugehörigen Matrizen $A_B$ und $A_N$ sowie den Vektoren $c_B$, $c_N$ und $r_N$. Bestimmen Sie dann die optimale Lösung.

**Aufgabe 15:** (2+2 Punkte)
Seien die $4 \times 5$-Matrix $T$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Menge $K = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Tx = b, \, x \geq 0\}$ ist konvex.

(a) Stellen Sie $K$ als konvexe Menge $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid T_0 x = b_0, \, x \geq 0\}$ dar, wobei der Rang der Matrix $T_0$ gleich ihrer Zeilenanzahl ist.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Ecken von $K_0$.

**Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, Abgabe: 20.11.2009, 8.15 Uhr)**
Berechnen Sie mit Hilfe der Modellierungssprache AMPL und dem Optimierungssolver IPOPT die Lösungen der Optimierungsprobleme aus den folgenden Übungsaufgaben:

(a) Aufgabe 5(a)

(b) Aufgabe 5(b) mit $a = 2$ und $b = 1$.

(c) Aufgabe 8(a)

(d) Aufgabe 8(b)

Ändern Sie dazu die kommentierte Beispieldatei „lp.mod“, die zur Lösung von Aufgabe 6 erstellt wurde, geeignet ab. Sie finden diese Datei und weitere Informationen zu AMPL/ IPOPT auf der Webseite zur Vorlesung.

**Richtlinien zur Abgabe der Programmieraufgaben:**

- Schicken Sie die Quellcode-Datei des von Ihnen geschriebenen Programms per eMail an den jeweiligen Übungsgruppenleiter. Die eMail-Adressen finden Sie auf der Webseite zur Vorlesung.
- Zusätzlich geben Sie bitte den Quellcode **und** die Ausgabe des Programms in gedruckter Form ab.
- Nur wenn ein Programm als Datei **und** in gedruckter Form vorliegt, kann es die maximale Punktzahl geben.
- Für Programmieraufgaben haben Sie grundsätzlich eine Woche länger Zeit als für schriftliche Aufgaben.
- Zur Erinnerung: Voraussetzung für den Scheinerwerb ist u.a. die **Bearbeitung** aller Programmieraufgaben. Diese müssen nicht korrekt gelöst, sondern vielmehr **sinnvoll** bearbeitet werden.

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 5, Abgabe: Freitag, 20.11.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 17:** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das LP

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & (1,3,-10,2,-4)\,x \\ \text{unter} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -10 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

keine Lösung besitzt.

**Aufgabe 18:** (4 Punkte)
Lösen Sie folgendes LP mit dem einfachen Simplexverfahren:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & z(x) = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 10, \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 10, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 10, \\ & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

Bestimmen Sie dabei zunächst die Basislösung zur Basis $B = (1,2,3)$ und überprüfen Sie, dass diese zulässig ist. Berechnen Sie dann das zugehörige Starttableau für das Simplexverfahren.

**Aufgabe 19:** (4 Punkte)
Ein Betrieb stellt vier Güter $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ her. Der Gewinn pro Mengeneinheit ist in Gewinneinheit:

| Gut | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Gewinn | 12 | 8 | 10 | 1 |

Für die Produktion stehen pro Tag 50 Maschinenstunden und 120 Arbeitskraftstunden zur Verfügung. Für die einzelnen Produkte werden benötigt:

| | Maschinenstunden | Arbeitskraftstunden |
|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | 3 |
| $P_2$ | 2 | 1 |
| $P_3$ | 1 | 2 |
| $P_4$ | 1 | 1 |

Formulieren Sie das zugehörige LP. Wie muss der Betrieb produzieren, um den Gewinn zu maximieren? Geben Sie den maximalen Gewinn an. Bestehen Überkapazitäten bei optimaler Produktion?

*Bitte denken Sie an die Abgabe der Programmieraufgabe.*

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 6, Abgabe: Freitag, 27.11.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)
Lösen Sie folgendes LP mit dem Simplex-Verfahren:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & z(x) = 2x_1 - x_2 + 8x_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & \leq & 3, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 2, \\ & & & & 2x_3 & \leq & 1, \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)
Lösen Sie folgendes LP mit der Zwei-Phasen-Methode:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 2, \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 1, \\ & & & & & x_1, x_2, & x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

**Aufgabe 22: (Programmieraufgabe, Abgabe: 4.12.2009, 8.15 Uhr)**
Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem, bei dem die Herstellung von 8 Produkten aus 11 Rohstoffen optimiert wird:

$$\max \quad \{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} c &= (15, 15, 20, 30, 20, 40, 25, 18) \\ b &= (150, 250, 100, 300, 200, 400, 500, 550, 350, 385, 200)^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 2 & 0 & 0 & 1.5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1.2 & 1 & 0.5 & 0.4 & 3 & 3 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & 1.5 & 1 & 1.5 & 3.2 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5 & 1 & 1.4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 2 & 1.5 & 4 & 0 & 2 \\ 1.5 & 1.2 & 1.1 & 1.3 & 2 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1.5 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0.5 & 2 & 2.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2 & 1.5 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Schreiben Sie ein Programm zum Simplex-Verfahren. Das Programm soll bei jedem Basistausch das Pivotelement und das daraus resultierende Tableau ausgeben. Berechnen Sie die optimale Lösung des LPs mit Ihrem Programm. Drucken Sie nur das optimale Tableau und die Indizes der verwendeten Pivotelemente aus.

(b) Schreiben Sie ein AMPL-Programm zur Lösung des LPs. Vergleichen Sie die optimale Lösung und den Zielfunktionswert mit den Ergebnissen Ihres Simplex-Programms.

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 7, Abgabe: Freitag, 4.12.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 23:** (4 Punkte)
Berechnen Sie mit der Zweiphasenmethode die Lösung des linearen Optimierungsproblems

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Minimiere} & z(x) = x_1 - x_2 & & & & & & \\
\text{unter} & -3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 8, \\
 & 5x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & \leq & -15, \\
 & -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5, \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

**Aufgabe 24:** (2 Punkte)
Mit den Bezeichnungen von § 6 seien die Basen $B = (1, \ldots, m)$, $\overline{B} = (1, \ldots, p-1, s, p+1, \ldots, m)$ gegeben. Für die $(m \times m)$–Matrix $S$ mit

$$Se_i = e_i \quad (i \neq p)\ , \quad S\tilde{a}^s = e_p$$

zeige man

$$A_{\overline{B}}^{-1} = SA_B^{-1}\ .$$

**Aufgabe 25:** (2+2+2 Punkte)

(a) Gegeben seien $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $(m_i \times n)$–Matrizen $A_i$ $(i = 1, 2)$ und eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Bestimmen Sie das duale Problem $(P^*)$ zum Primalproblem $(P)$:

$$\min\{cx \mid A_1 x \geq b_1\ ,\quad A_2 x = b_2\ ,\ x_i \geq 0 \ \text{für}\ i \in I\}\ .$$

(b) Bestimmen Sie das duale Problem zum LP:

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{Maximiere} & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & \\
\text{unter} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4\,, \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3\,, \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & \geq & 2\,, \\
 & & & & & x_1, x_3 & \geq & 0\,.
\end{array}$$

(c) Bestimmen Sie $(P^*)$ zum Primalproblem

$$(P) \qquad \min\{x_1 - 2x_2 + 2x_3 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

und lösen Sie $(P)$ und $(P^*)$.

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 8, Abgabe: Freitag, 11.12.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 26:** (3 Punkte)
Berechnen Sie mit dem dualen Simplex-Verfahren die Lösung des LP

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Minimiere} & 10x_1 & + & 15x_2 & + & 20x_3 \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2, \\ & -x_1 & + & 2x_3 & \geq & -3, \\ & 3x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5, \\ & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

**Aufgabe 27:** (5 Punkte)
Der Nikolaus hat Lakritzstangen der Länge 40 cm auf Lager. Zur Bescherung benötigt er

| | | | |
|---|---|---|---|
| mindestens | 4000 | Lakritzstangen der Länge | 18 cm, |
| mindestens | 5000 | Lakritzstangen der Länge | 16 cm, |
| mindestens | 3000 | Lakritzstangen der Länge | 12 cm . |

Wie muss der Nikolaus die 40 cm langen Lakritzstangen zuschneiden, damit der Abfall möglichst gering wird?
Hinweis: Es gibt sechs sinnvolle Strategien (Begründung!), die 40 cm langen Stangen zuzuschneiden. Setzen Sie $x = (x_1, \ldots, x_6)^T$, wobei $x_i$ die Anzahl der Stangen ist, die nach Strategie $i$ zugeschnitten werden. Lösen Sie das Problem mit dem dualen Simplex-Verfahren.

**Aufgabe 28:** (1+3 Punkte)
Eine Aufgabenstellung aus der statistischen Schätztheorie führt auf das folgende LP:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximiere} & z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq \beta, \\ & 0 \leq x_j \leq 1 , \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Hierbei seien $p_j > 0$ und $q_j > 0$ Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 , \qquad \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_n}{q_n}.$$

Die Zahl $\beta > 0$ sei hinreichend klein.

(a) Stellen Sie das zum obigen Problem duale Problem auf in der Variablen $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Zeigen Sie, dass für den Index

$$k := \min\{j \in \{1, \dots, n\} \mid q_{j+1} + q_{j+2} + \dots + q_n \leq \beta\}$$

die optimalen Lösungen des obigen LP und des dualen LP gegeben sind durch:

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , \; j < k \\ (\beta - q_{k+1} - \dots - q_n)/q_k & , \; j = k \\ 1 & , \; j > k \end{array} \right\},$$

$$\lambda_j = \left\{ \begin{array}{ll} p_k/q_k & , \; j = 0 \\ 0 & , \; 1 \leq j \leq k \\ q_j \left( \frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k} \right) & , \; j > k \end{array} \right\}.$$

**Aufgabe 29: (Programmieraufgabe, Abgabe: 18.12.2009, 8.15 Uhr)**
Lösen Sie mithilfe von AMPL/IPOPT das folgende LP:

Eine Öl-Raffinerie möchte aus Rohöl verschiedene Produkte herstellen und dabei die Produktionskosten (in US$)

$$z(x) = 16.5x_1 + 5.25x_3 + 5.25x_4 + 3x_{13}\,, \quad x \in \mathbb{R}^{16},$$

minimieren unter den folgenden Restriktionen ($x \geq 0$):

(1) Höchstgrenze für Rohöl:

$$x_1 \leq 750\,000.$$

(2) Massen-Bilanz der Komponenten:

$$\begin{array}{lllllllll} 0.178x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0\,, \\ 0.048x_1 & - & x_4 & - & x_5 & - & x_6 & = & 0\,, \\ 0.069x_1 & - & x_7 & - & x_8 & - & x_9 & = & 0\,, \\ 0.184x_1 & - & x_{10} & - & x_{11} & - & x_{12} & = & 0\,, \\ 0.241x_1 & - & x_{13} & - & x_{14} & & & = & 0\,, \\ 0.266x_1 & - & x_{15} & - & x_{16} & & & = & 0\,. \end{array}$$

(3) Produktions-Anforderungen:

$$\begin{array}{rcr} x_2 + 0.865x_3 + 0.85x_4 + 0.373x_{13} & = & 124\,400\,, \\ x_5 + x_7 + x_{10} & = & 18\,800\,, \\ x_8 + x_{11} + x_{16} & = & 90\,700\,, \\ x_6 + x_9 + x_{12} + 0.331x_{13} + x_{14} + x_{15} & = & 291\,600\,. \end{array}$$

(4) Qualitäts-Anforderungen:

$$\begin{array}{rcl} 15x_2 - 6.75x_3 - 8.5x_4 - 5.97x_{13} & \leq & 0\,, \\ 10x_8 + 10x_{11} - 90x_{16} & \leq & 0\,, \\ -25.7x_6 - 25.7x_9 - 16.1x_{12} - 4.4x_{13} - 5.1x_{14} & \leq & 0\,. \end{array}$$

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 9, Abgabe: Freitag, 18.12.2009, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 30:** (3 Punkte)
Berechnen Sie mit dem dualen Simplex-Verfahren die Lösung des LP's

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{minimiere} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 42\,, & & \\ & -4x_1 & + & 8x_3 & \geq & -7\,, & & \\ & 3x_2 & - & 2x_3 & \geq & 105\,, & & \\ & & & x & \geq & 0\,. & & \end{array}$$

**Aufgabe 31:** (2+2+2 Punkte)
Bei der Lösung des Problems

$$(P) \qquad \min\{cx \quad | \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0\}, \quad c \geq 0$$

mit dem dualen Simplex-Verfahren löst man

$$(P_1) \qquad \min\{cx \quad | \quad -Ax + y = -b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

vom "dualen Standpunkt". Die optimale Lösung sei nicht entartet.
Zeigen Sie: Die optimale Lösung $\lambda$ des dualen Problems

$$(P^*) \qquad \max\{\lambda b \quad | \quad \lambda A \leq c, \quad \lambda \geq 0\}$$

erhält man aus dem optimalen Tableau folgendermaßen:

(a) $y_j$ Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = 0$,

(b) $y_j$ Nicht-Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = -r_{N(j)}$, $r_{N(j)}$ ist der unter $y_j$ stehende Koeffizient.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zwischen der Lösung $\tilde{\lambda}$ des dualen Problems von $(P_1)$ und der Lösung $\lambda$ von $(P^*)$ die Beziehung $\lambda = -\tilde{\lambda}$ gilt.

(c) Überprüfen Sie die Aussage in (a) und (b) an der Lösung des LP's

$$\min\{x_1 + x_2 \mid 2x_1 + x_2 \geq 12, \ \ 5x_1 + 8x_2 \geq 74, \ \ x_1 + 6x_2 \geq 28, \quad x \geq 0\}\,.$$

**Aufgabe 32:** (5 Punkte)
Lösen Sie das LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{Maximiere} & & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{unter} & & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & & & \leq & 12, \\
 & & 2x_1 & & & & & + & 2x_4 & & & \geq & 2, \\
 & - & 4x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & \geq & 8, \\
 & & & & 2x_2 & + & 4x_3 & & & + & 4x_5 & = & 22, \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 12, \\
 & & & & & & & & & & x & \geq & 0,
\end{array}
$$

mit der Dreiphasenmethode. Der optimale Wert ist $z_0 = \frac{201}{4}$.

**Aufgabe 33: (Programmieraufgabe, Abgabe: 8.1.2010, 8.15 Uhr)**
Die **Himmelblau-Funktion**

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x_1, x_2) &\mapsto (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2
\end{aligned}
$$

ist eine beliebte Testfunktion, mit welcher oft die Effizienz von Optimierungsalgorithmen überprüft wird. Sie hat eine lokale Maximalstelle und vier lokale Minimalstellen, die zugleich auch globale Minimalstellen mit Funktionswert 0 sind.

(a) Fertigen Sie mittels MATLAB ein 3D-Schaubild der Oberfläche von $f$ auf dem Gebiet $[-5, 5] \times [-5, 5]$ an.
**Erinnerung:** MATLAB-Befehle `mesh` oder `surf`; ggf. über `doc mesh` bzw. `doc surf` die MATLAB-Hilfe aufrufen.

(b) Fertigen Sie mittels MATLAB ein Schaubild der Höhenlinien von $f$ auf dem Gebiet $[-5, 5] \times [-5, 5]$ an. Sinnvoll wären beispielsweise die Höhenlinien $f(x_1, x_2) = c$ für $c = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.
**Erinnerung:** MATLAB-Befehl `contour`.

(c) Schreiben Sie AMPL-Programme zur Bestimmung der Extremstellen von $f$. Verwenden Sie hierbei verschiedene Startschätzungen für die Optimierungsvariablen $x_1$ und $x_2$, indem Sie durch das `let`-Kommando diesen Variablen Anfangswerte zuweisen, z.B.

```
let x1 := -5;
let x2 := -5;
```

Wählen Sie zur Bestimmung der vier lokalen Minimalstellen als Startwerte die vier Ecken des Gebiets $[-5, 5] \times [-5, 5]$ und zur Bestimmung der lokalen Maximalstelle den Ursprung, vgl. Schaubild der Höhenlinien.

**Abgabe:** Bitte bei Aufgabenteil (a) und (b) die beschrifteten Schaubilder und bei Aufgabenteil (c) den AMPL-Quellcode sowie die numerischen Ergebnisse in Papierform abgeben.

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 10, Abgabe: Freitag, 8.1.2010, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 34:** (4 Punkte)
Gegeben seien die Menge $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}.$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f$ auf der Menge $U$ und überprüfen Sie für diese Punkte die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung.

**Aufgabe 35:** (6 Punkte)

(a) Diskutieren Sie den Sensitivitätssatz (1.8) für das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x, p) = x_1^2 + p x_2^2 - p x_1 x_2 + x_2$$

für alle $p \in \mathbb{R}$.

(b) In der LANDAU-Theorie der Phasenübergänge bei Kristallen minimiert man die freie Energie bei fester Temperatur $T$:

$$\min_{s \in \mathbb{R}} F(s, T) = \frac{1}{2} T s^2 - \frac{1}{3} s^3 + \frac{1}{4} s^4 \ .$$

Hierbei bezeichnet $s \in \mathbb{R}$ die Variable der Phase. Diskutieren Sie den Sensitivitätssatz (1.8) für $0 < T < \frac{1}{4}$.

**Aufgabe 36:** (6 Punkte)

(a) Seien $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $C^1$-Abbildungen mit $\det(g_x(x, y)) \neq 0$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Sei $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ optimal für das Optimierungsproblem

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k} \{f(x, y) \mid g(x, y) = 0\} \ .$$

Zeigen Sie: Es gibt einen Zeilenvektor $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, so dass die Multiplikatorenregel von LAGRANGE gilt:

$$(*) \quad f_x(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{\lambda} g_x(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \quad f_y(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{\lambda} g_y(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \ .$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz (1.7) über Implizite Funktionen an und betrachten Sie ein geeignetes Optimierungsproblem in der Variablen $y$.

(b) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \;\middle|\; xy = c \right\} , \quad c > 0 ,$$

grafisch und analytisch. Bestimmen Sie den Multiplikator $\overline{\lambda}$ in (*).

*****************************************************************

Wir wünschen Ihnen

ein frohes Weihnachtsfest

und alles Gute für das Jahr 2010!

H. Maurer B. Christiansen

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 11, Abgabe: Freitag, 15.1.2010, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 37:** (4 Punkte)
Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 \\ \text{unter} \quad & 4x_1 + 12x_2 = 120, \\ & 6x_2 + 12x_3 = 120. \end{aligned}$$

Lösen Sie das Problem

(a) durch Elimination von 2 Variablen,

(b) direkt mit dem Satz von Kuhn-Tucker.

**Aufgabe 38:** (3 Punkte)
Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(5, 2)$ von der Parabel

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2x \}.$$

Stellen Sie das Problem grafisch dar und diskutieren Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen.

**Aufgabe 39:** (4 Punkte)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \quad &= \quad -\frac{1}{2}\sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_2 \\ \text{unter} \quad & \quad x_1 \geq 0.1,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie alle Punkte $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ und Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^3$, die den KKT-Bedingungen genügen.

**Aufgabe 40: (Programmieraufgabe, Abgabe: 15.01.2010 (!), 8.15 Uhr)**
Lösen Sie die folgenden nichtlinearen Optimierungsprobleme mit AMPL/IPOPT. Geben Sie dabei die Lagrange-Multiplikatoren der Kuhn-Tucker-Bedingungen aus und wählen Sie ggfs. eine zulässige Startschätzung. Hinweise zur Ausgabe der Lagrange-Multiplikatoren und zur Eingabe einer Startschätzung finden Sie in der Datei *nlp.mod* auf der Homepage zur Vorlesung.

(a)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + \frac{0.04}{x_3} + \frac{x_4^2}{0.2} \\ \text{unter} \quad & \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + x_3 - 1 = 0, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Verwenden Sie als Startvektoren $x = (1,1,1,1)^T$ und $x = (0.8, 0.8, 0.1, 0.1)^T$.

(b)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ \text{unter} \quad & x^2 - y \leq 0, \\ & x + y - 2 \leq 0. \end{aligned}$$

# Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 12, Abgabe: Freitag, 22.1.2010, 8.15 Uhr

---

**Aufgabe 41:** (4 Punkte)

Sei $A$ eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min f(x) = \langle x, Ax \rangle$$

unter der Nebenbedingung $||x||_2^2 = 1$.

(a) Untersuchen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen.

(b) Welche Voraussetzung muss die Matrix $A$ erfüllen, damit die hinreichenden Optimalitätsbedingungen gelten?
Hinweis: Betrachten Sie eine Orthonormalbasis von $A$ aus Eigenvektoren.

**Aufgabe 42:** (4 Punkte)
Einer Pyramide mit bekannter Unterkantenlänge $a$ und Höhe $h$ soll ein Quader maximalen Inhalts einbeschrieben werden (vgl. Bild 1).

a) Formulieren Sie das nichtlineare Optimierungsproblem mit Beschränkungen.

b) Geben Sie die optimale Lösung an.

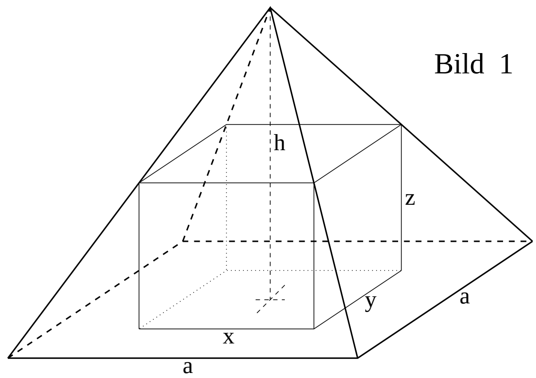


Bild 1

Hinweis: Betrachten Sie den Querschnitt der Pyramide und vermeiden Sie den Satz von Pythagoras.

**Aufgabe 43:** (4 Punkte)
Gegeben sei das folgende Minimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Maximiere} & x_1 & & \\ \text{unter} & x_2 - (1-x_1)^3 & \leq & 0, \\ & x_1 & \geq & 0, \\ & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

(b) Berechnen Sie den Tangentialkegel und den linearisierenden Kegel der zulässigen Menge im Punkt $\bar{x} = (1,0)^T$. Zeigen Sie, dass $\bar{x}$ nicht regulär ist und dass es kein $\lambda \in \mathbb{R}^3$ gibt, welches die KKT-Bedingungen erfüllt.

**Aufgabe 44:** (4 Punkte)

(a) Die Menge $S_\alpha$ sei gegeben durch

$$S_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_2 - x_1^\alpha \leq 0, \quad -x_2 - x_1^\alpha \leq 0\right\}, \quad \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \geq 1.$$

Skizzieren Sie $S_\alpha$ für $\alpha \geq 1$ und berechnen Sie den Tangentialkegel $T(S_\alpha, \bar{x})$ und den linearisierenden Kegel $L(S_\alpha, \bar{x})$ für $\bar{x} = (0,0)^T,\ \alpha \geq 1$.

(b) Seien $A$ eine symmetrische $(n,n)-$Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie für die Menge

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \frac{1}{2}x^T Ax + b^t x \geq \alpha\right\}$$

den linearisierenden Kegel $L(S, \overline{x})$ in einem Punkt $\overline{x} \in S$ an.