Vorlesungsmitschrift Optimierung

von Michael Schaefer

5. Februar 2008

Zusammenfassung

Bei dem vorliegenden Dokument handelt es sich um die von mir mit LaTeXgesetzte Version meiner Vorlesungsmitschriften aus der Vorlesung **Optimierung** im Wintersemester 2007/2008, gelesen von **Prof. Dr. Helmut Maurer** an der **Westfälischen Wilhelms-Universität Münster**. Ich tue dies, damit ich beim Wiederholen des Stoffs, aber insbesondere auch zur Vorbereitung der Klausur, nicht auf eine lose Blattsammlung von handgeschriebenen und mehr oder weniger lesbaren Zetteln angewiesen bin. Wer Fehler in diesem Dokument findet, den bitte ich, mir diese per E-Mail mitzuteilen:

michael.schaefer@uni-muenster.de

Wichtig: Da dieses Dokument ständigen Korrekturen unterliegt, bietet sich ein Ausdruck erst am Ende des Semesters an. **Den Stand des Dokumentes entnehme man bitte dem weiter oben angeführten Datum.**

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $D \subset X$ offen, $S \subset D \subset X$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ ist $x = (x_1, \ldots, x_n)^*$ die Optimierungsvariable. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet dann

$$\text{Minimiere } f(x) \text{ unter der Nebenbedingung } x \in S \tag{P}$$

Als Kurzschreibweise verwendet man $\min \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in S \right\}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Zielfunktion, die Menge S heißt zulässige Menge und jedes Element (jeder Punkt) $x \in S$ wird als zulässiger Punkt bzw. zulässiges Element bezeichnet.
Ein zulässiger Punkt $\bar{x} \in S$ heißt lokale Minimalstelle von (P), wenn es eine Umgebung U von $\bar{x}$ gibt mit

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \, \forall x \in S \cap U.$$

Weiterhin heißt $\bar{x} \in S$ globale Minimalstelle von (P), bzw. optimale Lösung von (P), wenn

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \, \forall x \in S.$$

$\bar{x} \in S$ heißt strike lokale (globale) Minimalstelle von (P), falls gilt

$$f(\bar{x}) < f(x) \, \forall x \in S \cap U, x \neq \bar{x} \quad (f(\bar{x}) < f(x) \, \forall x \in S, x \neq \bar{x}).$$

Der optimale Wert von (P) ist

$$\inf\,(\mathrm{P}) := \begin{cases} \inf \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in S \right\}, & S \neq \emptyset \\ \infty & S = \emptyset \end{cases}.$$

Wenn (P) eine optimale Lösung besitzt, dann schreibt man $\min\,(\mathrm{P})$ statt $\inf\,(\mathrm{P})$.
Die Maximierung einer Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ ist äquivalent zur Minimierung von $-g(x)$.

Allgemeine Ziele.

- Herleitung von notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen
- Numerische Verfahren
- Anwendungen

Typen von Optimierungsaufgaben. Die verschiedenen Typen hängen von den speziellen Eigenschaften von $f : D \to \mathbb{R}$ und $S \subset D \subset X$ ab.

(I) **Konvexe Optimierungsprobleme**. Sei $D \subset X$ eine konvexe Menge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex bzw. strikt konvex, wenn gilt

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \, \forall x, y \in D, \, 0 \leq \alpha \leq 1$$

bzw.

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \, \forall x, y \in D, \, 0 < \alpha < 1.$$

Beispiel. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ist konvex und in $x = 0$ nicht differenzierbar. Man betrachtet in solchen Fällen anstelle des Gradienten den sogenannten Subgradienten, in diesem Fall $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ konvex und S eine konvexe Menge, dann heißt das Optimierungsproblem (P) auch konvexes Optimierungsproblem. Als Spezialfall erhält man die lineare Optimierung.

(II) **Nichtlineare differenzierbare Optimierung**. In dieser Vorlesung betrachten wir immer $X = \mathbb{R}^n$ und damit $x = (x_1, \ldots, x_n)^*$. Im Fall $n = 2$ schreibt man oft $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ statt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Beispiele.

(1) Minimiere die Gesamtkosten bei der Produktion von x Einheiten des Gutes A und y Einheiten des Gutes B:

$$f(x, y) = x^2 - \frac{xy}{100} + \frac{y^2}{100^2}, \, x, y \leq 0.$$

(2) Bestimme die größte Fläche eines Rechtecks bei gegebenem Umfang: Maximiere $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $2x + 2y = u$ (const.) mit $x, y > 0$. Man erhält $D = \mathbb{R}^2_+$ und $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 2y = u\right\}$. Die Idee hierbei ist, eine Variable zu eliminieren: Es gilt $2x + 2y = u \Rightarrow y = \frac{1}{2}(u - 2x)$. Nun muss man die Funktion

$$F(x) = xy = x\frac{1}{2}(u - 2x)$$

maximieren. Aus der notwendigen Bedingung $F'(x) = 0$ erhält man die Lösung $x = y = \frac{u}{4}$. Eine Verallgemeinerung stellt das isoperimetrische Problem bzw. Problem der Königin Dido dar: Man maximiere bei gegebenem Umfang den Flächeninhalt einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Kurve. Die Lösung ist der Kreis.

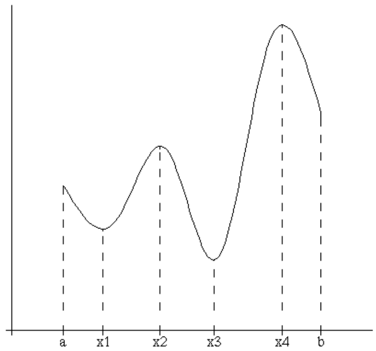
(3) Bestimme die Minima bzw. Maxima der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x) + \cos(y) - \cos(x + y)$$

unter $x, y \geq 0$, $x + y \leq 2\pi$. Dies ist ein "schwieriges" Testproblem zur globalen Optimierung.

(4) Man zeige: $\max\left\{\prod_{i=1}^n x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i = 1,\, x_i \geq 0\right\} = \left(\frac{1}{n}\right)^n$. $\bar{x} = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Lösung. Als Folgerung erhält man $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ für alle $x_1 \geq 0$.

(5) Sei $S = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $a \leq x \leq b$.



Die lokalen Minima lauten dann x_1, x_3 und b, die lokalen Maxima sind x_2, x_4 und a. Für $i = 1, \ldots, 4$ gilt $f'(x_i) = 0$, da die x_i im Inneren von S liegen. Für a und b gilt dies nicht, denn diese liegen auf dem Rand ∂S von S. Hier gilt $f'(a) \leq 0$ und $f'(b) \leq 0$ (Variationsungleichung).

(6) Allgemein sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R} \in C^2$ und $S \subset D$. Weiter sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von f mit $\bar{x} \in \mathring{S} =: \operatorname{int}(S)$. Dann hat man

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad f'(x) = \nabla f(x)^T$$

sowie

$$\nabla^2 f(x) = f''(x) = (\mathrm{Hess} f)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Man erhält wegen $\bar{x} \in \operatorname{int}(S)$ die notwendige Optimalitätsbedingung $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Ist $(\mathrm{Hess} f)(\bar{x})$ positiv definit, so ist dies eine hinreichende Optimalitätsbedingung, denn in diesem Fall gibt es $c > 0$ und $\alpha > 0$ mit

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + c\,||x - \bar{x}||^2$$

für alle $x \in ||x - \bar{x}|| \leq \alpha$.

(III) **Lineare Optimierungsprobleme (LP: Linear Programming)**. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = cx = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

mit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Zielmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ wird beschrieben druch Gleichungen und Ungleichungen.

Beispiel. Produziere x Tische und y Stühle. Maxmiere den Gewinn $f(x, y) = 6x + 8y$ unter $3x + 2y \leq 30$ (Holz) und $5x + 10y \leq 110$ (Arbeitsstunden) sowie $x, y \geq 0$.

(IV) **Infinite Optimierung und Optimale Steuerprozesse**. Sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banach-Raum und seien Y, Z weitere Banach-Räume. Sei $K \subset Y$ eine konvexe, abgeschlossene Menge und seien $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to Y$, $h : X \to Z$. Man betrachtet dann das Optimierungsproblem

$$\min \left\{ f(x) \,\middle|\, g(x) \in K, h(x) = 0 \right\}.$$

Optimale Steuerprozesse. Sei $X = C([0, T], \mathbb{R}^n) \times L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$, wobei man

$$C([0, T], \mathbb{R}^n) := \{x : [0, T] \to \mathbb{R}^n \text{ stetig } \}$$

als "Zustandstrajektorie" und

$$L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) := \{u : [0, T] \to \mathbb{R}^m \text{ messbar, wesentlich beschränkt}\}$$

als "Steuerfunktionen" bezeichnet. Man nimmt nun $S \subset X$ mit

$$S = \left\{ (x, u) \in X \,\middle|\, \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)), 0 \leq t \leq T, x(0) = x_o \in \mathbb{R}^n, u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, U \text{ konvex} \right\}.$$

Man minimiere nun das Zielfunktional

$$F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t))dt.$$

Dabei sind $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildungen.

Berühmtes Problem. Brachystochrone. Ziel ist die Bestimmung einer Kurve, so dass eine Massenkugel, die unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve fällt, einen vorbestimmten Punkt B in minimaler Zeit erreicht. Die gesuchte Kurve ist dann eine Zykloide.

(V) **Anwendungen der Optimierung.**

- Bildverarbeitung (Image Processing)
- Dynamische Prozesse in der Physik, Chemie und Ökonomie
- Operations Research: Logistik, Transportprobleme, kombinatorische Optimierung

I Lineare Optimierung

§ 1 Beispiele

§ 1.1 Produktionsmodelle

Gegeben seien Produkte $P_1, \ldots, P_n$ und Aktivitäten $A_1, \ldots, A_m$ (Rohstoffe, Arbeitsstunden,...). Das Produkt P_j enthalte a_{ij} Anteile der Aktivität A_i und mit c_j sei der Reingewinn pro Einheit von P_j bezeichnet. Weiter sei $x_j \in \mathbb{R}$ die Produktionsmenge (Anzahl) von P_j für $j = 1, \ldots, n$ und b_i die Menge der verfügbaren Aktivität A_i für $i = 1, \ldots, m$. Man erhält das lineare Optimierungsproblem (LP), den Gewinn

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \, \forall i = 1, \ldots, m, x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

zu maximieren.

Beispiel. Herstellung von Damen- und Herrenschuhen. Es gilt folgender Produktionsplan:

	Damen	Herren	verfügbar
Herstellungszeit	20	10	8000
Maschinenbedarf	4	5	2000
Lederbedarf	6	15	4500
Gewinn pro Einheit	16	32	

Produziert werden x_1 Damen- und x_2 Herrenschuhe. Das LP lautet dann,

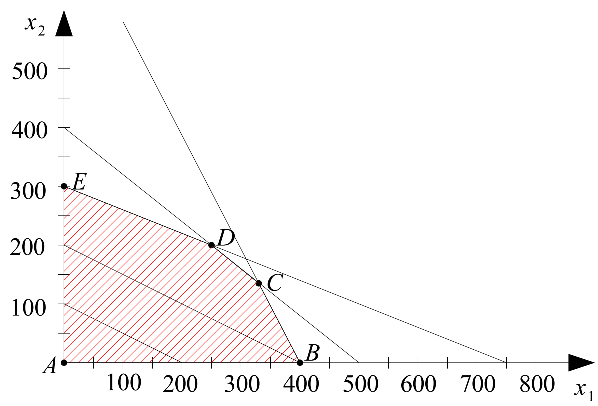
$$z = 16x_1 + 32x_2$$

unter

$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 &\leq 8000 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 2000 \\ 6x_1 + 15x_2 &\leq 4500 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

zu maximieren. Die zulässige Menge ist ein konvexes Polyeder. Man definiert sogenannte Schlupfvariablen y_1, y_2, y_3 durch

$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 + y_1 &= 8000 \\ 4x_1 + 5x_2 + y_2 &= 2000 \\ 6x_1 + 15x_2 + y_3 &= 4500 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$



Die zulässige Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ ist ein konvexes Polytop. Man betrachte die Niveaulinien $z = 16x_1 + 32x_2 =$ const. Im Beispiel eingezeichnet sind diese für $z = 3200$ und $z = 6400$. Die Zielfunktion $z = z(x_1, x_2)$ nimmt ihren maximalen Wert in einer (optimalen) Ecke von K an.

Ecke	z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
A	0	0	0	8000	2000	4500
B	6400	400	0	0	400	2100
C	9600	1000/3	400/3	0	0	500
D	10400	250	200	100	0	0
E	9600	0	300	5000	500	0

Die optimale Lösung wird in der Ecke D mit $x_1 = 250$ Damen- und $x_2 = 200$ Herrenschuhen angenommen.

Bemerkung. In jeder Ecke haben genau zwei Variablen den Wert 0. Die Ecken sind die sogenannten Basislösungen.

§ 1.2 Ein Mischungsproblem

Drei Gase sollen so gemischt werden, dass ein möglichst billiges Mischgas mit einem Heizwert von 3000 $\frac{\text{kcal}}{m^3}$ und einem Schwefelgehalt von höchstens $3 \frac{g}{m^3}$ entsteht.

Gas Nr.	1	2	3	Einheit
Preis	10	30	20	DM / $1000m^3$
Heizwert	1000	3000	6000	kcal / m^3
Schwefelgehalt	8	1	2	g/m^3

x_i sei der Mengenanteil des Gases Nr. i in der Mischung. Das LP lautet dann: Minimiere

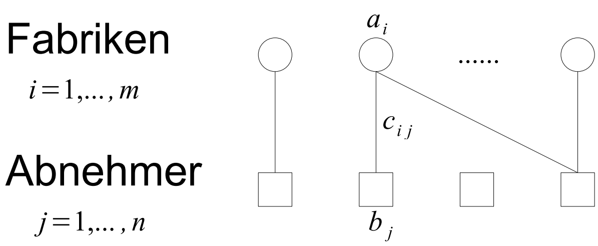
$$z = 10x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

unter

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Man kommt auf die Idee, die Variable $x_3 = 1 - x_1 - x_2 \geq 0$ zu eliminieren. Die Lösung lautet dann $x_1 = \frac{6}{23}$, $x_2 = \frac{13}{23}$, $x_3 = \frac{4}{23}$. Dies ist die graphische Lösung des resultierenden LP in zwei Variablen.

§ 1.3 Transportprobleme



Die Fabrik i produziert die Warenmenge a_i, $i = 1, \ldots, m$. Der Abnehmer j benötigt die Warenmenge b_j, $j = 1, \ldots, n$. Die Transportkosten von Fabrik i zum Abnehmer j betragen c_{ij} pro Einheit. Mit x_{ij} bezeichnet man die tatsächlich von i nach j versandte Menge. Das LP lautet: Minimiere die Transportkosten

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

unter

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

§ 2 Mathematische Formulierung linearer Optimierungsprobleme

Allgemeine Problemstellung. Minimiere (min) $z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ unter

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_1, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

In vektorieller Schreibweise gilt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

und man erhält die Standardform eines LP

$$\min z(x) = cx \text{ unter } Ax = b,\ x \geq 0 \tag{2.1}$$

bzw.

$$\min \left\{ cx \,\middle|\, Ax = b,\ x \geq 0 \right\}.$$

$x \geq 0$ ist komponentenweise zu verstehen. Man macht folgende Annahmen: $m < n$ und $\operatorname{rang}(A) = m$.

Rückführung anderer Typen von LP auf Standardform (2.1)

(1) Ungleichungen.

$$\min \left\{ cx \,\middle|\, Ax \leq b,\ x \geq 0 \right\} \tag{2.2}$$

Definiere eine Schlupfvariable $y \in \mathbb{R}^m$ durch $y = b - Ax > 0$. Es gilt dann $Ax \leq b \iff Ax + y = b$, $y \geq 0$. Setze nun $\tilde{c} = (c, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\tilde{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ und $\tilde{A} = (A \,|\, I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$. Dann ist (2.2) äquivalent zum LP

$$\min \left\{ \tilde{c}\tilde{x} \,\middle|\, \tilde{A}\tilde{x} = Ax + y = b,\ \tilde{x} \geq 0 \right\} \tag{2.3}$$

Bemerkung. $Ax \geq b \iff Ax - y = b,\ y \geq 0 \in \mathbb{R}^m$. Man beachte, dass für Ungleichungen $Ax \geq b$ nicht $m < n$ gelten muss, m ist beliebig. In (2.3) mit Gleichungen gilt stets $m < n + m$.

(2) Freie Variablen. Im LP (2.1) seien einige x_i ohne Vorzeichenbedingung $x_i \geq 0$, beispielsweise sei x_1 frei.

1. Methode. Elimination von x_1. Es gelte $a_{i1} \neq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Dann erhält man aus der $i$ten Gleichung

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

die Aussage

$$x_i = \frac{1}{a_{i1}} \left(b_i - \sum_{k=2}^{n} a_{ik}x_k \right).$$

Nun setzt man x_1 in die übrigen Gleichungen und die Zielfunktion ein und löst bezüglich $x_2, \dots, x_n$.

Beispiel. Minimiere $x_1 + 3x_2 + 4x_3$ unter

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eliminiere $x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$. Das reduzierte LP lautet dann: Minimiere

$$x_2 + 3x_3 + 5$$

unter

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

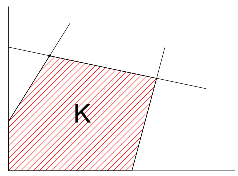
Als Lösung erhält man $x_2 = 4$, $x_3 = 0$ und $x_1 = -3$.

2. Methode. Setze $x_1 = u_1 - v_1$ mit

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1^+ = \max\{0, x_1\} \geq 0, \\ v_1 &= x_1^- = \max\{0, -x_1\} \geq 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt ein LP in den Variablen $u_1, v_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Man beachte $|x_1| = u_1 + v_1$.

Elementare Eigenschaften von LPen.



Die zulässige Menge $K = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = b,\ x \geq 0\right\}$ ist ein konvexes und abgeschlossenes Polyeder.

(2.5) Satz.

(i) Die Menge der optimalen Lösungen ist konvex.

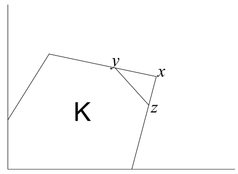
(ii) Ist die zulässige Menge K beschränkt, also kompakt, so existiert eine optimale Lösung $\bar{x} \in K$ mit $c\bar{x} = \min\left\{cx \,\middle|\, x \in K\right\}$.

§ 3 Hauptsatz der Linearen Optimierung

Sei A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Man betrachtet das Problem

$$\min \left\{ cx \,\middle|\, Ax = b, x \geq 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex.



Ein Punkt $x \in K$ heißt Ecke von K, wenn gilt, dass aus einer Darstellung $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ mit $y, z \in K$ und $0 < \alpha < 1$ schon $x = y = z$ folgt. Anders formuliert gilt, dass es keine Darstellung $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ mit $y, z \neq x$ und $0 < \alpha < 1$ geben kann.

Problem. Beschreibe die Ecken von $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = b,\, x \geq 0 \right\}$.

Bezeichnung. $a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^m$ seien die Spaltenvektoren von A, d.h. es gilt $A = (a^1 \mid \ldots \mid a^n)$ und $Ax = a^1 x_1 + \ldots + a^n x_n = b$.

(3.2) Satz. $x \in K$ ist genau dann eine Ecke von K, wenn die zu positiven Komponenten $x_i > 0$ gehörenden spaltenvektoren $a^i \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig sind.

Beweis.

"⇒" Sei $x \in K$ eine Ecke. OBdA sei $x = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^*$ mit $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann ist die Behauptung für $r = 0$ richtig.

Sei also $r > 0$. Es gelte $\sum_{i=1}^r a^i d_i = 0$ mit $d_i \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist dann $d_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Wegen $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$x_i \pm \varepsilon d_i > 0$$

für $i = 1, \ldots, r$. Setze $d := (d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)^* \in \mathbb{R}^n$, $y := x + \varepsilon d \in \mathbb{R}^n$ und $z := x - \varepsilon d \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x = \frac{1}{2}(y+z) = \frac{1}{2}y + \left(1 - \frac{1}{2}\right) z$$

und $y \geq 0$, $z \geq 0$. Weiter hat man

$$\sum_{i=1}^r a^i (x_i \pm \varepsilon d_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^r a^i x_i}_{=b} \pm \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^r a^i d_i}_{=0} = b.$$

Da nach Voraussetzung $x \in K$ eine Ecke ist, muss schon $x = y = z$ gelten. Damit hat man $d = 0$ und somit die lineare Unabhängigkeit von $a^1, \ldots, a^r$.

"⇐" Vorausgesetzt sei $x = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ mit $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$ und die lineare Unabhängigkeit von $a^1, \ldots, a^r$. Zu zeigen ist dann, dass x eine Ecke von K ist.

1. Fall $r = 0$. Dann ist $x = 0 \in \mathbb{R}^n$. Es gelte $0 = x = \alpha y + (1-\alpha)z$ mit $y, z \in K$ und $0 < \alpha < 1$. Wegen $y, z \geq 0$ und $\alpha, (1-\alpha) > 0$ erhält man schon $y = z = 0$, d.h. $x = y = z = 0$. Damit ist $x = 0$ eine Ecke von K.

2. Fall $r > 0$. Es gilt $\sum_{i=1}^r a^i x_i = b$. Es gelte weiter $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ mit $y.z \in K$ und $0 < \alpha < 1$. Wie im ersten Fall folgt $y_i = z_i$ für $i = r+1, \ldots, n$. Wegen $y, z \in K$ hat man $Ay = Az = b$, d.h.

$$A(y-z) = \sum_{i=1}^r a^i (y_i - z_i) = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $a^1, \ldots, a^r$ folgt

$$(y_i - z_i) = 0 \,\forall i = 1, \ldots, r \Rightarrow y_i = z_i \,\forall i = 1, \ldots, r,$$

also schon $y = z$, und somit $x = y = z$ wegen $x = \alpha y + (1-\alpha)z$. Damit ist x eine Ecke von K. □

(3.3) Folgerung. Ist $x \in K$ eine Ecke von K, so sind höchstens m Komponentens x_i positiv. Daher gibt es höchstens $\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}$ Ecken von K.

(3.4) Satz. Ist die zulässige Menge $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$ nicht leer, so gibt es eine Ecke von K.

Beweis. Sei $r(x)$ die Anzahl der positiven Komponenten $x_i > 0$ von $x \in K$. Sei $z \in K$ mit $r(z) = \min\{r(x) \mid x \in K\}$. Dann ist z eine Ecke von K, wie wir im folgenden zeigen werden.
Falls $r(z) = 0$, also $z = 0$ gilt, so ist z schon eine Ecke von K, vgl. (3.2). Sei also $r(z) > 0$. OBdA sei $z_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r(z)$. Zu zeigen ist nun, dass $a^1, \ldots, a^{r(z)}$ linear unabhängig sind.
Angenommen, sie seien linear abhängig. Dann hat man

$$\sum_{i=1}^{r(z)} a^i d_i = 0 \text{ mit } \tilde{d} = (d_1, \ldots, d_{r(z)}) \neq 0.$$

Man setzt nun

$$\mu := \min\left\{\frac{z_i}{|d_i|} \;\middle|\; d_i \neq 0\right\} = \frac{z_k}{|d_k|} > 0$$

für ein entsprechendes k. OBdA sei $d_k > 0$. Weiter setzt man $d = (d_1, \ldots, d_{r(z)}, 0, \ldots, 0)^* \in \mathbb{R}^n$ und $y := z - \mu d \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Ay = Az - \mu \underbrace{Ad}_{=0} = \underbrace{Az}_{\in K} = b$$

und

$$y_i = z_i - \mu d_i = z_i - \frac{z_k}{d_k} d_i \geq 0$$

wegen $\mu = \min\left\{\frac{z_i}{|d_i|} \;\middle|\; d_i \neq 0\right\}$. Es gilt nun aber

$$y_k = z_k - \frac{z_k}{d_k} d_k = 0.$$

Damit hat man $r(y) \leq r(z) - 1 < r(z)$ im Widerspruch zur Minimalität von $r(z)$.
Damit sind $a^1, \ldots, a^{r(z)}$ schon linear unabhängig und $z \in K$ ist eine Ecke von K. □

Sei nun L die Menge der optimalen Lösungen von (3.1). Falls L nicht leer ist, setze $\beta := \min\{cx \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$. Mit

$$\tilde{A} = \left(\frac{c}{A}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1 \times n)}, \quad \tilde{b} = \left(\frac{\beta}{b}\right) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

gilt dann

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0, cx = \beta\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\right\}.$$

Ergebnis. L hat die gleiche Struktur wie K.

(3.5) Satz. Sei $L \neq \emptyset$. Dann gilt:

(i) L besitzt eine Ecke.

(ii) Jede Ecke von L ist eine Ecke von K.

Beweis.

(i) folgt aus Satz (3.4).

(ii) Sei $x \in L$ eine Ecke von L und sei $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ mit $y, z \in K$ und $0 < \alpha < 1$. Es folgt

$$\beta = cx = \alpha cy + (1-\alpha)cz.$$

Wegen $\beta \leq cy$ und $\beta \leq cz$ folgt $\beta = cy = cz$ und $y, z \in L$ sind optimale Lösungen. Also gilt schon $x = y = z$, da x eine Ecke von L ist. Also ist x eine Ecke von K. □

(3.6) Satz (Hauptsatz der Linearen Optimierung). Das LP

$$\min\left\{cx \,\middle|\, Ax = b, x \geq 0\right\}$$

besitze eine optimale Lösung. Dann gibt es eine optimale Ecke von K.

Idee zur Lösung eines LP. Berechne alle Ecken von K und bestimme cx und den minimalen Wert.

Beispiel. Maximiere $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ unter

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}.$$

Ecken findet man, wenn genau eine Komponente von x gleich 0 ist.

1. Fall $x_1 = 0$. Man hat dann $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Es folgt $x_2 = \frac{5}{3}$ und $x_2 = \frac{2}{3}$. Die Ecke $x = (0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})^*$ ist zulässig mit $cx = \frac{16}{3}$. Diese Ecke ist schon optimal (wie wir gleich sehen werden).

2. Fall $x_2 = 0$. Man erhält $x_1 = 5$ und $x_3 = -1$. Diese Ecke ist nicht zulässig.

3. Fall $x_3 = 0$. Man erhält $x = (2, 1, 0)^*$. Diese Ecke ist zulässig, aber wegen $cx = 4$ nicht optimal.

Nun sein K kompakt und es seien $x^1, \dots, x^k$ die Ecken von K. Man kann zeigen, dass K die konvexe Hülle von $x^1, \dots, x^k$ ist, d.h.

$$K = \operatorname{co}(x^1, \dots, x^k) = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i x^i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} a_i = 1, a_i \geq 0 \,\forall i = 1, \dots, k\right\}.$$

Für dieses kompakte K kann man einen einfachen Beweis des Hauptsatzes geben:

Sei $cx^j = \min_{i=1,\dots,k} cx^i$. Jedes $x \in K$ hat eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x^i, \; \sum_{i=1}^{k} a_i = 1, a_i \geq 0 \,\forall i = 1, \dots, k.$$

Man erhält die Abschätzung

$$cx = \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{cx^i}_{\geq cx^j} \geq \sum_{i=1}^{k} a_i cx^j = cx^j \sum_{i=1}^{k} a_i = cx^j.$$

Damit ist cx^j bereits eine optimale Ecke.

Anwendung auf Ungleichungen. Man betrachte das Problem $\min\left\{cx \,\middle|\, Ax \leq b, x \geq 0\right\}$ und die zulässige Menge $K = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax \leq b, x \geq 0\right\}$. In Standardform erhält man

$$\min\left\{cx + 0y \,\middle|\, Ax + y = b, x, y \geq 0\right\}$$

und die zulässige Menge

$$\tilde{K} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, Ax + y = b, x, y \geq 0\right\}.$$

(3.7) Lemma. $x \in K$ ist genau dann eine Ecke von K, wenn $\begin{pmatrix} x \\ b - Ax \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine Ecke von $\tilde{K}$ ist.

§ 4 Das Simplex-Verfahren

$$\min \{cx \mid Ax = b, x \geq 0\} \tag{4.1}$$

Vorausgesetzt sei stets $\mathrm{rang}(A) = m < n$ (Zeilenrang). Ziel ist die Bestimmung der Ecken von K, die man auch zulässige Basislösungen nennt.

(4.2) Definition. Ein Indexvektor $B = \{i_1, \ldots, i_m\}$ mit m paarweise verschiedenen Indizes $i_k \in \{1, \ldots, n\}$ für $k = 1, \ldots, m$ heißt Basis, wenn die Spaltenvektoren a^i für $i \in B$ linear unabhängig sind. Ein zu B komplementärer Indexvektor $N = \{j_1, \ldots, j_{n-m}\}$ mit paarweise verschiedenen Indizes $j_k \in \{1, \ldots, n\}$ und $j_k \notin B$ für alle $k = 1, \ldots, n-m$ heißt Nichtbasis. Man hat formal eine Zerlegung $B \oplus N$.

Bezeichnung. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und B eine Basis. Man nennt dann x_i mit $i \in B$ die Basisvariablen, während x_j mit $j \in N$ als Nichtbasisvariablen bezeichnet werden. Weiter setzt man $x_B = (x_i)_{i \in B}$ und $x_N = (x_j)_{j \in N}$.
Mit A_B bezeichnet man die $m \times m$-Matrix mit Spalten a^i für $i \in B$, also $A_B = (a^{i_1} \mid \cdots \mid a^{i_m})$. A_N ist entsprechend die $m \times (n-m)$-Matrix mit Spalten a^j für $j \in N$, also $A_N = (a^{j_1} \mid \cdots \mid a^{j_{n-m}})$.

Beispiel. Sei $B = \{7, 3, 5, 1\}$. Dann hat man $x_B = (x_7, x_3, x_5, x_1)$.

Folgerung. Das LGS $Ax = b$ lässt sich schreiben als

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = \sum_{i \in B} a^i x_i + \sum_{j \in N} a^j x_j.$$

Die Matrix A_B ist regulär, wenn B eine Basis ist. Man erhält eine Parametrisierung des $n-m$-dimensionalen affinen Lösungsraums von $Ax = b$:

$$\boxed{x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N} \tag{4.3}$$

Dabei ist x_N die unabhängige Variable, x_B hängt von ihr ab. Zerlegt man den Zeilenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ durch $c_B = (c_i)_{i \in B}$ und $c_N = (c_j)_{j \in N}$, so erhält man

$$cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B A_B^{-1} b - (c_B A_B^{-1} A_N - c_N) x_N = z_0 - r_N x_N \tag{4.4}$$

mit $z_0 := c_B A_B^{-1} b \in \mathbb{R}$ und $r_N := c_B A_B^{-1} A_N - c_N \in \mathbb{R}^{n-m}$. Man bezeichnet dann $r_N = (r_j)_{j \in N}$ als den Vektor der reduzierten Kosten.

(4.5) Definition. Sei B eine Basis. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Basislösung von $Ax = b$, falls $x_N = 0$ und $x_B = A_B^{-1} b$ gilt. Eine Basislösung $x \in \mathbb{R}^n$ heißt

(i) zulässig, wenn $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ und $x_N = 0$ gilt.

(ii) nicht entartet, wenn $x_B = A_B^{-1} b > 0$ und $x_N = 0$ gilt.

(iii) entartet, wenn x_B zulässig ist und $x_i = 0$ für ein $i \in B$ gilt.

(4.6) Satz (Hinreichendes Optimalitätskriterium). Sei B eine Basis mit

(i) $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ und $x_N = 0$,

(ii) $r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N \leq 0$, d.h. $r_j \leq 0$ für alle $j \in N$.

Dann ist $x \in \mathbb{R}^n$ optimal für das LP (4.1) und der optimale Wert ist $cx = z_0 = c_B A_B^{-1} b$.

Beweis. Sei $\tilde{x} \in K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ beliebig. Dann hat man eine Darstellung

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N \tilde{x}_N,$$

es folgt $c\tilde{x} = \underbrace{c_B A_B^{-1} b}_{=z_0} \underbrace{- \underbrace{\underbrace{r_N}_{\leq 0} \underbrace{\tilde{x}_N}_{\geq 0}}_{\leq 0}}_{\geq 0} \geq z_0.$ □

(4.7) Anwendung auf LPe mit Ungleichungen. Man hat eine Äquivalenz

$$\min\left\{cx \,\middle|\, Ax \le b, x \ge 0\right\} \iff \min\left\{cx \,\middle|\, Ax + y = b, x, y \ge 0\right\}.$$

Dabei gilt $Ax + y = \tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = (A \,|\, I)$, $I = I_m$ Einheitsmatrix.
Wähle als Basis $B = (n+1, \dots, n+m)$ und als Nichtbasis entsprechend $N = (1, \dots, n)$. Die Basislösung lautet dann $y = b$ und $x = 0$. Dies bedeutet

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; \tilde{x}_B = y, \; \tilde{x}_N = x.$$

Für die reduzierten Kosten betrachtet man

$$\tilde{A}_B = I = I_m, \; \tilde{A}_N = A, \; \tilde{c} = (c, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}, \; \tilde{c}_B = 0 \in \mathbb{R}^m \text{ und } \tilde{c}_N = c \in \mathbb{R}^n.$$

Dann erhält man

$$r_N = \tilde{c}_B \tilde{A}_B^{-1} \tilde{A}_N - \tilde{c}_N = -\tilde{c}_N = -c.$$

Idee des Simplex-Verfahrens. Bestimme iterativ eine Basis B mit

(i) $x_B = A_B^{-1} b \ge 0$, $x_N = 0$

(ii) $r_N \le 0$, d.h. $r_j \ge 0$ für alle $j \in N$.

Beispiel. Benutze $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$. Dazu berechne man A_B^{-1} mittels Gauß-Jordan-Elimination. Das Problem laute

$$\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 \iff \min -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

unter

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = b, \; x \ge 0.$$

Wir stellen nun die Berechnung für die Tableau-Matrix $\boxed{b \mid A}$ an und wählen dazu $B = (1, 2)$ als Basis und $N = (3)$ als Nichtbasis.

$$\begin{array}{c|ccc} b & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 5 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{array} \; \cdot \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} b & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 5/2 & 1 & 1/2 & 5/2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{array} \; -I \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} b & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 5/2 & 1 & 1/2 & 5/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 & -3/2 \end{array} \; \cdot \tfrac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} b & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 5/2 & 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \; -\tfrac{1}{2}II \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} b & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Es folgt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N.$$

Für $x_3 = 0$ ergibt sich damit die Basislösung $x = (2, 1, 0)^*$. Diese Basislösung ist nicht optimal (vgl. §3), es gilt

$$r_N = r_3 = c_B A_B^{-1} A_N - c_N = (-1, -2)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 = 2 > 0.$$

Damit folgt die Nichtoptimalität, vgl. Folgerung (4.11).
Man wähle nun eine neue Basis. Für $0 \le x \le \frac{2}{3}$ bleibt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 \ge 0$$

gültig. Beim Übergang $x_3 = 0 \to x_3 = \frac{2}{3}$ läuft man entlang einer Kante von K. Für $x_3 = \frac{2}{3}$ erhält man dann eine neue Basislösung $x = (0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ mit neuer Basis $B' = (3, 2)$ und $N' = (1)$. Die Übergang

$x_3 = 0 \to x_3 = \frac{2}{3}$ und $x_1 = 2 \to x_1 = 0$ entspricht somit einem Basistausch: $B = (1,2) \to B' = (3,2)$ und $N = (3) \to N' = (1)$.
Bezüglich B' und N' benötigen wir eine Darstellung $Ax = b$. Dazu lösen wir die Gleichung $x_1 = 2 - 3x_3$ nach x_3 auf, also

$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1.$$

Einsetzen in die Gleichung $x_2 = 1 + x_3$ liefert

$$x_{B'} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_1.$$

Die Basislösung $x = (0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})^*$ ist optimal, da

$$r_{N'} = r_1 = c_{B'}A_{B'}^{-1}A_{N'} - c_{N'} = (-3,-2)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - (-1) = -1 - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{2}{3} < 0.$$

Vorüberlegungen zum Basistausch. Zur Vereinfachung sei $B = (1, \dots, m)$ und es gelte $A_B = I = I_m$. Es gelte weiter $x_B = b \geq 0$ (Zulässigkeit) und $x_N = 0$. Sei $r_s > 0$ für ein $s \in N$. Setze $x_j = 0$ für $j \in N \setminus \{s\}$ in $x_B = b - A_n x_N$:

$$x_B = b - a^s x_s \tag{4.9}$$

1. Fall Es gelte $a^s \leq 0$, d.h. $a_{is} \leq 0$ für $i = 1, \dots, m$. Es folgt $x_B = b - a^s x_s \geq 0$ für alle $x_s \geq 0$. Dies bedeutet

$$z(x) = cx = z_0 - r_N x_N = z_0 - r_s x_s \to -\infty$$

für $x_s \to \infty$, es gibt also keine endliche Lösung.

2. Fall Es gelte $a_{is} > 0$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Es stellt sich die Frage, für welche x_s gilt $x_B = b - a^s x_s \geq 0$. Wir definieren einen Index $p \in B$ mit

$$\boxed{\frac{b_p}{a_{ps}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{is}} \,\middle|\, a_{is} > 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\right\}} \tag{4.10}$$

Für $x_s \leq \frac{b_p}{a_{ps}} =: b'_p$ bleibt dann $b - a^s x_s \geq 0$. Weiter gilt $x_p = 0$ für $x_s = \frac{b_p}{a_{ps}} =: b'_p$. Dies entspricht einem Tausch der Nichtbasisvariable x_s gegen die Basisvariable x_p. Folgerungen:

(a) $b_p = 0$. Dann ist die Basislösung entartet und es gilt $z(x) = cx = z_0$, der Wert der Zielfunktion verbessert sich also nicht.

(b) $b_p > 0$. Hinreichend ist eine nicht entartete Basislösung $x_B > 0$. Der Wert der Zielfunktion verbessert sich.

(4.11) Folgerung (Notwendiges Optimalitätskriterium). Die Basislösung x sei optimal mit $x_B \geq 0$ und $x_N = 0$. Gilt $x_B > 0$ nicht entartet, so folgt $r_N \leq 0$.

Beweis. Angenommen, es gilt $r_s > 0$ für ein $s \in N$. Setze $x_s = b'_p = \frac{b_p}{a_{ps}} > 0$. Das zugehörige $\tilde{x}$ ergibt $z(\tilde{x}) = c\tilde{x} = z_0 - r_s \frac{b_p}{a_{ps}} < z_0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Optimalität von x. □

Möglichkeiten zur Bestimmung der Indizes $s \in N$ und $p \in B$

(4.12a) Wähle $s \in N$ kleinstmöglich mit $r_s = \max\{r_j \mid j \in N\}$ und $p \in B$ kleinstmöglich mit

$$\frac{b_p}{a_{ps}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{is}} \,\middle|\, a_{is} > 0,\, i = 1, \dots, m\right\}.$$

(4.12b) Regel von Bland. Wähle den kleinsten Index $s \in N$ mit $r_j > 0$ und $p \in B$ wie unter (4.12a).

Basistausch allgemein. Die Gauß-Jordan-Elimination

Sei $A_B = I = I_m$, $x_B = b - A_N x_N$ sowie

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j, \quad i \in B. \tag{4.13}$$

Insbesondere hat man $x_p = b_p - \sum_{j \in N} a_{pj} x_j$ für $p \in B$, vgl. (4.10). Löst man diese Gleichung nach x_s auf, so erhält man wegen $a_{ps} > 0$

$$x_s = \frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j \in N, j \neq s} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} x_j - \frac{1}{a_{ps}} x_p. \tag{4.14}$$

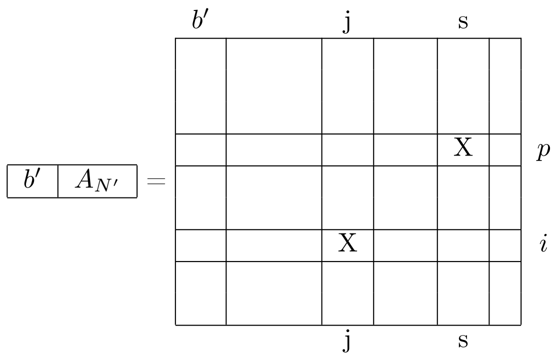
Setzt man dies in die übrigen Gleichungen (4.13) für $i \neq p$ ein, so ergibt sich

$$x_i = b_i - a_{is} \frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j \in N, j \neq s} (a_{ij} - a_{is} \frac{a_{pj}}{a_{ps}}) x_j + \frac{a_{is}}{a_{ps}} x_p. \tag{4.15}$$

Der Übergang von der alten Basis B zur neuen Basis B' lautet $B = (1, \ldots, p, p+1, \ldots, m) \Rightarrow B' = (1, \ldots, p-1, s, \ldots, m)$, der von der alten Nichtbasis N zur neuen Nichtbasis N' entsprechend $N = (m+1, \ldots, s, \ldots, n) \Rightarrow N' = (m+1, \ldots, p, \ldots, n)$. Die Ausdrücke (4.14) und (4.15) haben die Form

$$x_{B'} = b' - A_{N'} x_{N'}.$$

Schließlich sind die Elemente der Matrix



wir folgt gegeben: (Das X ist eine Markierung, keine Variable!)

(4.16)

- Pivotelement: $a'_{ps} = \frac{1}{a_{ps}}$
- Übrige Zeile mit Index p: $a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{ps}}$ und $b'_p = \frac{b_p}{a_{ps}}$ für $j \neq s$.
- Übrige Spalte mit Index s: $a'_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{ps}}$ für $i \neq p$.
- Elemente in der Zeile mit Index $i \neq p$: $a'_{ij} = a_{ij} - a_{is} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} = a_{ij} - a_{is} a'_{pj}$ und $b'_i = b_i - a_{is} \frac{b_p}{a_{ps}} = b_i - a_{is} b'_p$ jeweils für $i \neq p$ und $j \neq s$.

Beispiel.

	b	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	1	-1
x_2	3	2	-3	1
x_3	-1	-1	2	-2

$\Rightarrow$

	b	x_1	x_5	x_6
x_4	5	1	1	-1
x_2	-7	-2	-5	3
x_3	4	1	3	-2

Das neue Schema lautet $x_{B'} = b' - A_{N'} x_{N'}$.

Basistausch: Zielfunktion und reduzierte Kosten

Es gilt

$$\begin{aligned}
z(x) &= cx = z_0 - \sum_{j\in N} r_j x_j \\
&\overset{(4.14)}{=} z_0 - \sum_{j\in N, j\neq s} r_j x_j - r_s\left(\frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j\in N, j\neq s}\frac{a_{pj}}{a_{ps}}x_j - \frac{1}{a_{ps}}x_p\right) \\
&= z_0 - r_s\frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j\in N, j\neq s}\left(r_j - r_s\frac{a_{pj}}{a_{ps}}\right)x_j - \left(-\frac{r_s}{a_{ps}}\right)x_p \\
&= z_0' - \sum_{j\in N'} r_j' x_j
\end{aligned}$$

mit

$$z_0' = z_0 - r_s\frac{b_p}{a_{ps}}, \quad r_p' = -\frac{r_s}{a_{ps}}, \quad r_j' = r_j - r_s\frac{a_{pj}}{a_{ps}},\ j \neq p. \tag{4.17}$$

Folgerung. Die Zeile $\boxed{z_0 \mid r_N}$ wird wie die Zeile $\boxed{b \mid A_N}$ transformiert, vgl. (4.16).

(4.18) Das Simplex-Tableau.

		$x_j (j \in N)$
	z_0	r_N
$x_i (i \in B)$	b	A_N

Beispiel. $\min z(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$ unter

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 5 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Basis sei $B = (1, 2)$ und somit $N = (3)$. Die Transformation von $Ax = b$ mit A_B^{-1} liefert

$$\boxed{b \mid A_N} = \begin{array}{|c|c|} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{array}, \quad x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, r_3 = 2 > 0.$$

Man erhält die Tableaufolge

	z_0	x_3
	-4	2
x_1	2	3
x_2	1	-1

$\Rightarrow$

	z_0	x_1
	$-16/3$	$-2/3$
x_3	$2/3$	$1/3$
x_2	$5/3$	$1/3$

Dabei wurde x_1 gegen x_3 getauscht. Das rechte Tableau ist optimal, da $r_1 = -\frac{2}{3} < 0$ gilt. Die optimale Lösung lautet $x = (0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})^*$.

Anwendung auf LPe mit Ungleichungen

Gegeben sei das LP

$$\min\left\{cx \,\middle|\, Ax \leq b, x \geq 0\right\} \iff \min\left\{cx + 0y \,\middle|\, Ax + y = b, x, y \geq 0\right\}.$$

Man setzt für den Start $B = (n+1, \ldots, n+m)$ und $N = (1, \ldots, n)$. Die Basislösung lautet dann $x = 0, y = b >\geq 0$ und es gilt $\tilde{A}_B = I_m$. Man berechnet $z_0 = 0$ und $r_N = -c$. Das Simplex-Tableau lautet dann

		x
	$z_0 = 0$	$r_N = -c$
y	b	A

Beispiel. Vergleiche Beispiel in § 1.1 (Damen- und Herrenschuhe): Maximiere

$$z(x) = 16x_1 + 32x_2$$

unter

$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 + y_1 &= 8000 \\ 4x_1 + 5x_2 + y_2 &= 2000 \\ 6x_1 + 15x_2 + y_3 &= 4500 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Tableau

	z_0	x_1	x_2
	0	16	32
y_1	8000	***20***	10
y_2	2000	4	5
y_3	4500	6	15

$\overset{x_1 \leftrightarrow y_1}{\Rightarrow}$

2. Tableau

	z_0	y_1	x_2
	-6400	$-4/5$	24
x_1	400	$1/20$	$1/2$
y_2	400	$-1/5$	***3***
y_3	2100	$-3/10$	12

$\overset{x_2 \leftrightarrow y_2}{\Rightarrow}$

3. Tableau

	z_0	y_1	y_2
	-9600	$4/5$	-8
x_1	$1000/3$	$1/12$	$-1/6$
x_2	$400/3$	$-1/15$	$1/3$
y_3	500	$1/2$	-4

$\overset{y_3 \leftrightarrow y_1}{\Rightarrow}$

4. Tableau (optimal)

	z_0	y_3	x_2
	-10400	$-8/5$	$-8/5$
x_1	250	$-1/6$	$1/2$
y_2	200	$2/15$	$-1/5$
y_1	1000	2	-8

Die Optimalität gilt wegen $r_N = (r_5, r_4) = (-\frac{8}{5}, -\frac{8}{5}) < 0$. Die Lösung des LP lautet $x = (x_1, x_2)^* = (250, 200)^*$.

Gegeben sei nun eine Basis B mit $A_B = I$, $x_B = b - A_N x_N \Rightarrow x_{B'} = b' - A_{N'} x_{N'}$.

(4.19) Tableau-Matrix.

$$T = (t_{ij}) := \begin{array}{|c|c|} \hline z_0 & r_N \\ \hline b & A_N \\ \hline \end{array}$$

mit $i = 0, \dots, m$ und $j = 0, \dots, n-m$.

(4.20) Simplex-Algorithmus (George Dantzig, 1947).

(1) Start: Sei B mit Indizes $B(i)$, $i = 1, \dots, m$ und $A_B = I$. Die zugehörige Basislösung $x_B = b$, $x_N = 0$ sei zulässig, d.h. $x_B = b \geq 0$. Dabei sei N geeignete Nichtbasis.

(2) Gilt $t_{0s} > 0$ für ein $s \in \{1, \dots, n-m\}$, so gehe zu (3). Andernfalls ist die Basislösung optimal, d.h. es gilt $r_N \leq 0$. Setze $x_{B(i)} := t_{i0}$ für $i = 1, \dots, m$ und $x_{N(j)} = 0$ für $j = 1, \dots, n-m$ sowie $z(x) = cx = t_{00}$.

(3) Bestimmung einer Austauschspalte. Wähle einen Index $s \in \{1, \dots, n-m\}$ mit $t_{0s} > 0$, z.B. gemäß (4.12a) oder (4.12b).

(4) Sind alle $t_{i,s} \leq 0$ für $i = 1, \dots, m$, so gibt es keine endliche Lösung: STOP. Ansonsten gehe zu (5).

(5) Bestimmung der Austauschzeile. Wähle einen Index $p \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$\frac{t_{p0}}{t_{ps}} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{t_{is}} \,\middle|\, t_{is} > 0, i = 1, \dots, m \right\}.$$

zum Beispiel gemäß (4.12a) oder (4.12b).

(6) Führe eine Pivotoperation mit dem Pivotelement $t_{ps} > 0$ durch. Vertausche den p-ten Index in B mit dem s-ten Index von N.

- Pivotelement: $t'_{ps} = \frac{1}{t_{ps}}$.
- übrige Pivotzeile: $t'_{pj} = \frac{t_{pj}}{t_{ps}}$ für $j \neq s$.
- Übrige Pivotspalte: $t'_{is} = -\frac{t_{is}}{t_{ps}}$ für $i \neq s$.
- sonstige Elemente: $t'_{ij} = t_{ij} - t_{is} t'_{pj}$ für $i \neq s$ und $j \neq p$.

Gehe zu (2).

§ 5 Die Zwei-Phasen-Methode

Die Zwei-Phasen-Methode dient der Bestimmung einer zulässigen Basislösung. Gegeben sei dazu das Problem

$$\min \left\{ cx \;\middle|\; Ax = b, x \geq 0 \right\} \tag{5.1}$$

Voraussetzung sei $b_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Andernfalls multipliziere die entsprechende Gleichung mit -1.

(5.2) Problem. Berechne eine zulässige Basislösung von $Ax = b$ und $x \geq 0$.

Dazu betrachtet man das Hilfsproblem

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i \text{ unter } Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0 \tag{5.3}$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten.

(i) Das Hilfsproblem (5.3) besitzt eine Lösung mit dem Zielfunktionswert 0. In diesem Fall ist die zugehörige Basislösung zulässig, d.h. das Problem (5.2) ist gelöst.

(ii) Das Hilfsproblem (5.3) besitzt eine Lösung mit Zielfunktionswert > 0. Dann hat das System $Ax = b, x \geq 0$ keine Lösung.

Wir betrachten den Fall (i) und wollen (5.3) mit dem Simplexverfahren (4.20) lösen. Dazu wählen wir $B = (n+1, \ldots, n+m)$ und $N = 1, \ldots, n)$ als Basis bzw. Nichtbasis. Weiter sei $x = 0$ und $y = b$ gesetzt. Weiter haben wir $\tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A|I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$, $c_B = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$ und $c_N = 0$. Damit berechnen wir

$$z_0 = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_B y = c_B b = \sum_{i=1}^{m} b_i, \quad r_N = c_B \underbrace{\tilde{A}_B^{-1}}_{=I} \tilde{A}_N^{-1} - c_N = c_B A, \tag{5.4}$$

also $r_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ für $j = 1, \ldots, n$. Damit erhält man das Starttableau

$$\begin{array}{|c|c|} \hline z_0 & r_N = c_B A \\ \hline b & A \\ \hline \end{array} \tag{5.5}$$

Zwei-Phasen-Methode zur Lösung des LP (5.1)

Phase 1 Löse das Hilfsproblem (5.3) mit dem Starttableau (5.5). Die Basisvariablen $y_1, \ldots, y_m$ müssen im optimalen Tableau Nichtbasisvariablen sein.

Phase 2 Berechne das Starttableau für das LP (5.1) durch

(i) Streichung der unter y_i stehenden Spalte

(ii) Berechnung der Werte z_0 und r_N.

Beispiel 1. Gegeben sei das Minimierungsproblem

$$\min z(x) = 4x_1 + x_2 + x_3$$

unter

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, X \geq 0.$$

Phase 1 Start: $B = (4, 5)$ und $N = (1, 2, 3)$ sowie $z_0 = b_1 + b_2 = 7$ und $r_N = (5, 4, 3)$.

1. Tableau

		x_1	x_2	x_3
	7	5	4	3
y_1	4	2	1	2
y_2	3	3	3	1

$\overset{y_2 \leftrightarrow x_1}{\Rightarrow}$

2. Tableau

		y_2	x_2	x_3
	2	$-5/3$	-1	$4/3$
y_1	2	$-2/3$	-1	$4/3$
x_1	1	$1/3$	1	$1/3$

3. Tabeau

$\overset{y_1 \leftrightarrow x_3}{\Rightarrow}$

		y_2	x_2	y_1
	0	-1	0	-1
x_3	$3/2$	$-1/2$	$-3/4$	$3/4$
x_1	$1/2$	$1/2$	$5/4$	$-1/4$

Es gilt $r_N \leq 0$ und $z_0 = 0$ und y_1, y_2 befinden sich in der Nichtbasis. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}$ ist eine zulässige Basislösung mit $B = (3,1)$ und N $= (5,2,4)$.

Phase 2 (i) Steichung der Spalten unter y_2 und $y_1 \Rightarrow N = (2)$.

(ii) Berechnung der neuen Werte z_0 und r_N:

$$z_0 = c_B b = (1,4)\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{7}{2}$$

und

$$r_N = c_B A_N - c_N = (1,4)\begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} - 1 = \frac{13}{4} > 0.$$

1. Tableau

		x_2
	$7/2$	$13/4$
x_3	$3/2$	$-3/4$
x_1	$1/2$	$5/4$

$\overset{x_1 \leftrightarrow x_2}{\Rightarrow}$

2. Tableau

		x_1
	$11/5$	$-13/5$
x_3	$3/5$	$3/5$
x_2	$2/5$	$4/5$

Das letzte Tableau ist optimal mit $B = (3,2)$, $N = (1)$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{3}{5}$.

Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen

Teil 1: Seien $a_i \in \mathbb{R}^n$ die Zeilen von A. Gegeben sei

$$a_i x = b_i,\ i = 1, \ldots, k$$

$$a_i x \leq b : i,\ i = k+1, \ldots, m$$

Man führt Schlupfvariablen $y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, y_m$ ein und löst das Hilfsproblem

$$\min \sum_{i=1}^{k} y_i \text{ unter } a_i x + y_i = b_i,\ i = 1, \ldots, m, \text{ also } Ax + y = b, x, y \geq 0.$$

Dann benutze man die Zwei-Phasen-Methode.

Beispiel 2. Ein optimales Gasgemisch. Gegeben sei das Problem

$$\min z(x) = 10x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

unter

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Phase 1: Löse das Hilfsproblem mit der Zielfunktion $y_1 + y_3$. Mit (5.4) ermittelt man

$$z_0 = b_1 + b_3 = 3 + 1 = 4, \quad r_N = (a_{1j} + a_{3j})_{j=1,2,3} = (2,4,7)$$

und erhält

1. Tableau

		x_1	x_2	x_3
	4	2	4	7
y_1	3	1	3	6
y_2	3	8	1	2
y_3	1	1	1	1

$\overset{y_1 \leftrightarrow x_3}{\Rightarrow}$

2. Tableau

		x_1	x_2	y_1
	$1/2$	$5/6$	$1/2$	*
x_3	$1/2$	$1/6$	$1/2$	*
y_2	2	$23/3$	0	*
y_3	$1/2$	$5/6$	$1/2$	*

$\overset{y_3 \leftrightarrow x_2}{\Rightarrow}$

3. Tableau

		x_1	y_3
	0	0	*
x_3	0	$-2/3$	*
y_2	2	$23/3$	*
x2	1	$5/3$	*

Das letzte Tableau ist optimal.

Phase 2: Man benutzt die Variablen x_1, x_2, x_3, y_2, die Basis $B = (3, 4, 2)$ und die Nichtbasis $N = (1)$. Damit errechnet man

$$z_0 = c_B b = (20, 0, 30) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 30, \quad r_1 = c_B A_N - c_N = (20, 0, 30) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 23/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} - 10 = \frac{80}{3}.$$

Es ergibt sich das Tableau

		x_1
	30	$80/3$
x_3	0	$-2/3$
y_2	2	$23/3$
x_2	1	$5/3$

Tauscht man y_2 gegen x_1, so ist das resultierende Tableau optimal. Man erhält

$$z(x) = cx = 30 - \frac{80}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{23} = \frac{530}{23}$$

sowie $x_1 = 2 \cdot \frac{3}{23} = \frac{6}{23}, x_2 = 1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{23} = \frac{13}{23}, x_3 = 0 + \frac{2}{3}\frac{6}{23} = \frac{4}{23}$.

Teil 2: Gegeben sei das System von Ungleichungen

$$a_i x \geq b_i, i = 1, \ldots, k$$

$$a_i x \leq b_i, i = k+1, \ldots, m$$

Dies ist äquivalent zu einem System

$$\begin{array}{lcll} a_i x - x_{n+i} & = & b_i, & i = 1, \ldots, k \\ a_i x & \leq & b_i, & i = k+1, \ldots, m \\ x, x_{n+i} & \geq & 0, & i = 1, \ldots, k \end{array} \tag{5.6}$$

Das Hilfsproblem (5.3) lautet dann für (5.6)

$$\min \sum_{i=1}^{k} y_i$$

unter

$$\begin{array}{lcll} a_i x - x_{n+i} + y_i & = & b_i, & i = 1, \ldots, k \\ a_i x + y_i & \leq & b_i, & i = k+1, \ldots, m \\ x, x_{n+i}, y & \geq & 0, & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

Zur Bestimmung des Starttableaus betrachtet man

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}}_{N=(1,\ldots,n,\ldots,n+k)}, \ \underbrace{y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m}_{B=(n+k+1,\ldots,n+k+m)}$$

und erhält in diesem Fall

$$c_B = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k-\text{mal}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m, \quad z_0 = c_B b = \sum_{i=1}^{k} b_i$$

sowie

$$r_N = (r_j)_{j \in \mathbb{N}}, \, r_j = c_B a^j - c_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^k a_{ij}, & j = 1, \ldots, n \\ -1, & j = n+1, \ldots, n+k \end{cases}$$

Damit ergibt sich das folgende Starttableau:

		$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_{n+k}$
	z_0	$\sum_{i=1}^k a_{ij}$	$-1, \ldots, -1$
y_1	b_1	a_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$-E_k$
y_k	b_k	a_k	
y_{k+1}	b_{k+1}	a_{k+1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
y_m	b_m	a_m	

Beispiel 3. Gegeben sei das Problem

$$\min z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

unter

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + x_3 &\geq 40 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 30 \\ x_1 + 4x_3 &\geq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Phase 1: Start: Setzte $N = (1,2,3,4,5,6)$ und $B = (7,8,9)$. Im Hilfsproblem gilt dann

$$c = (\underbrace{0,\dots,0}_{6-\text{mal}}, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^9$$

und man berechnet

$$z_0 = c_B b = \sum_{i=1}^{3} b_i = 90, \quad r_N = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\right)_{j=1,\dots,6} = (6,7,8,-1,-1,-1).$$

Als Starttableau ergibt sich

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	90	6	7	8	-1	-1	-1
y_1	40	3	6	1	-1	0	0
y_2	30	2	1	3	0	-1	0
y_3	20	1	0	4	0	0	-1

und nach 3 Simplexschritten erhält man, dass y_1, y_2, y_3 Nichtbasisvariablen sind:

		y_2	x_2	y_3	x_4	y_1	x_6
	0	-1	0	-1	0	-1	0
x_5	10/11	-1	13/11	7/11	-5/11	5/11	-7/11
x_1	140/11	0	24/11	-1/11	-4/11	4/11	1/11
x_3	20/11	0	-6/11	-5/22	1/11	-1/11	-3/11

Phase 1 ist beendet, da $r_N \leq 0$ gilt. Die zulässige Basislösung lautet $x_1 = \frac{140}{11}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{20}{11}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{10}{11}$, $x_6 = 0$.

Phase 2: Streiche die Spalten unter y_2, y_3, y_1. Es ist $B = (5,1,3)$, $N = (2,4,6)$ und

$$A_N = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -5 & -7 \\ 24 & -4 & 1 \\ -6 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin berechnet man $c = (2,4,5,0,0,0)$, $c_N = (4,0,0)$, $c_B = (0,2,5)$ sowie

$$z_0 = c_B b = (0,2,5) \begin{pmatrix} 10/11 \\ 140/11 \\ 20/11 \end{pmatrix} = \frac{380}{11}, \quad r_N = c_B A_N - c_N = -\frac{1}{11}(6,3,13) < 0.$$

Die Lösung ist also bereits optimal.

Bemerkung. Die Lösung kann mit dem dualen Simplex-Verfahren einfacher berechnet werden, vgl. §7.

§ 6 Das revidierte Simplex-Verfahren

Vorbemerkung. Das Simplex-Verfahren (4.20) benutzt die $m \times (n-m)$-Matrix A_N. Im Fall $m \ll n$ ist es günstiger, die $m \times m$-Matrix A_B zu benutzen.

(6.1) Grundidee des revidierten Simplex-Verfahrens. Die Spalten von A seien $a^1, \dots, a^n$. Sei B eine Basis.

(1) Berechne die Basislösung $x_B = \tilde{b} = A_B^{-1} b$. Es gelte $x_B = \tilde{b} \geq 0$.

(2) Löse das LGS $\boxed{\lambda A_B = c_B}$ mit dem <u>Zeilenvektor</u> $\lambda \in \mathbb{R}^m$, d.h. $\lambda = c_B A_B^{-1}$. Berechne $r_N = \lambda A_N - c_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N$. Ist $r_N \leq 0$, dann STOP, die Basislösung $x_B = \tilde{b}$, $x_N = 0$ ist optimal.

(3) Wähle $s \in N$ mit $r_s > 0$, etwa gemäß (4.12).

(4) Löse das LGS $\boxed{A_B \tilde{a}^s = a^s}$, d.h. $\tilde{a}^s = A_B^{-1} a^s$.

(5) Ist $\tilde{a}^s \leq 0$, dann gibt es keine endliche Lösung: STOP.

(6) Bestimme einen Index $p \in B$ mit $\frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{ps}} = \min \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \,\middle|\, \tilde{a}_{is} > 0, i = 1, \dots, m \right\}$, etwa gemäß (4.12).

(7) Bestimme die neue Basis $\bar{B}$ durch Ersetzung des Index $p \in B$ mit dem Index $s \in N$ (analog für $\bar{N}$). Gehe dann zu (1).

Insgesamt sind 3 LGS zu lösen:

$$A_B x_B = b, \quad \lambda A_B = c_B, \quad A_B \tilde{a}^s = a^s \tag{6.2}$$

Für §7: Die Variable $\lambda \in \mathbb{R}^m$ heißt Simplex-Multiplikator, falls $r_N \leq 0$. Dann ist λ die Lösung des <u>dualen LPs</u>!

Zwei numerische Methoden zur Lösung von (6.2)

(i) Inverse Basismethode: Explizite Berechnung von A_B^{-1} durch Betrachtung benachbarter Basen B und $\bar{B}$, vgl. Beispiel.

(ii) Faktorisierung von A_B gemäß $F A_B = R$ mit R rechte obere Dreiecksmatrix. I.A. ist F eine reguläre $m \times m$-Matrix, etwa $F = L =$ linke untere Dreiecksmatrix.

zu Methode (a): Voraussetzung ist, dass die Matrix A_B^{-1} gegeben ist. Man betrachtet den Übergang

$$\boxed{\tilde{a}^s \mid A_B^{-1}} \Rightarrow \boxed{e_p \mid A_{\bar{B}}^{-1}}$$

Den Einheitsvektor e_p erhält man durch Elimination der Nichtbasisvariablen x_s.

Beispiel. Man betrachte das Problem $\min cx$ mit $c = (-3, -1, -3, 0, 0, 0)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Schritt Start: $B = (4, 5, 6)$, $N = (1, 2, 3)$. Man berechnet

$$\lambda_B = c_B A_B^{-1} = 0, \quad r_N = \lambda A_N - c_N = (3, 1, 3) > 0.$$

Wähle nun $s = 2$ mit $r_2 = 1 > 0$.

N	B	x_B	$\tilde{a}^2$	A_B^{-1}		
1	4	2	1	1	0	0
2	5	5	2	0	1	0
3	6	6	2	0	0	1

$\Rightarrow$

N	B	x_B	e_1	A_B^{-1}		
1	2	2	1	1	0	0
4	5	1	0	-2	1	0
3	6	2	0	-2	0	1

Wir berechnen nun

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = (-1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1,0,0)$$

und

$$r_N = \lambda A_N - c_N = (-2,-1,-1) - (-3,0,-3) = (1,-1,2).$$

2. Schritt Wähle $s = 3$ mit $r_3 = 2 > 0$ und berechne

$$\tilde{a}^3 = A_B^{-1} a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

N	B	x_B	$\tilde{a}^3$	A_B^{-1}		
1	2	2	1	1	0	0
4	5	1	1	-2	1	0
3	6	2	-1	-2	0	1

$\Rightarrow$

N	B	x_B	e_2	A_B^{-1}		
1	2	1	0	3	-1	0
4	3	1	1	-2	1	0
5	6	3	0	-4	1	1

Wir berechnen

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = (-1,-3,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3,-2,0)$$

und

$$r_N = \lambda A_N - c_N = (3,-2,0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-3,0,0) = (7,3,-2).$$

3. Schritt Wähle $s = 1$ mit $r_1 = 7$ und berechne

$$\tilde{a}^1 = A_B^{-1} a^1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

N	B	x_B	$\tilde{a}^1$	A_B^{-1}		
1	2	1	5	3	-1	0
4	3	1	-3	-2	1	0
5	6	3	-5	-4	1	1

$\Rightarrow$

N	B	x_B	e_1	A_B^{-1}		
2	1	1/5	1	3/5	-1/5	0
4	3	8/5	0	-1/5	2/5	0
5	6	4	0	-1	0	1

Wir berechnen

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = \frac{1}{5}(-3,-3,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (-\frac{6}{5},-\frac{3}{5},0),$$

sowie

$$A_N = (a^2 \,|\, a^4 \,|\, a^5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A_N = (-\frac{12}{5},-\frac{6}{5},-\frac{3}{5}$$

und

$$r_N = \lambda A_N - c_N = (-\frac{12}{5},-\frac{6}{5},-\frac{3}{5}) - (-1,0,0) = (-\frac{7}{5},-\frac{6}{5},-\frac{3}{5}) < 0.$$

Damit ist $x = (\frac{1}{5},0,\frac{8}{5},0,0,4)$ mit $z_0 = cx = c_B x_B = -\frac{27}{5}$ die optimale Lösung.

§ 7 Dualität

Seien A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ein Zeilenvektor, die sogenannte duale Variable. Die Idee hinter der Dualität ist, jedem Primalproblem (P) ein Dualproblem (P*) zuzuordnen, welches gegebenenfalls leichter zu lösen ist.

§ 7.1 Duale Programme

(7.1) Duale Programme (symmetrische Form). Zu einem Primalproblem

$$(P) \quad \min \left\{ cx \,\middle|\, Ax \geq b,\, x \geq 0 \right\}$$

hat man das Dualproblem

$$(P^*) \quad \max \left\{ \lambda b \,\middle|\, \lambda A \leq c,\, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Bemerkung. DAs Dualproblem des Dualproblems ist wieder das Primalproblem, d.h. (P**) = (P).

Beispiel. Gegeben sei das Primalproblem

$$\min \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

unter

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige Dualproblem lautet dann

$$\max \quad 5\lambda_1 + 6\lambda_2$$

unter

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &\leq 3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda 2 &\leq 4 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 5 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bemerkung. (P*) ist im Beispiel einfacher zu lösen als (P), etwa auf graphischem Wege.

Das Dualproblem zum Standard LP. Man betrachte wieder

$$\min \left\{ xy \,\middle|\, Ax = b,\, x \geq 0. \right\}$$

Dann ist die Gleichung $Ax = b$ äquivalent zu

$$Ax \geq b \wedge -Ax \geq -b, \qquad \text{d.h. } \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Das Dualproblem lautet also mit einer Variablen $\omega \in \mathbb{R}^{2m}$ dann

$$\max \left\{ \omega \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \,|\, \omega \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq c,\, \omega \geq 0 \right\}.$$

Setzt man $\omega = (u, v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}^m$, so ergibt sich

$$\max \left\{ ub - vb \,\middle|\, uA - vA \leq c,\, u, v \geq 0 \right\}.$$

Definiert man weiter $\lambda := u - v \in \mathbb{R}^m$, so lautet das Dualproblem

$$\max \left\{ \lambda b \,\middle|\, \lambda A \leq c \right\}.$$

Bemerkung. Man hat nun keine Vorzeichenbedingung für λ mehr.

(7.2) Duale Programme (unsymmetrische Form). Zu einem Primalproblem

$$(P) \quad \min \left\{ cx \,\middle|\, Ax = b,\, x \geq 0 \right\}$$

hat man das Dualproblem

$$(P^*) \quad \max \left\{ \lambda b \,\middle|\, \lambda A \leq c,\, \lambda \text{ frei } \right\}.$$

Merkregel zur Aufstellung dualer Programme.

Primalprogramm	Dualprogramm
$a_i x \geq b_i$	$\lambda_i \geq 0,\ \lambda A \leq c$
$a_i x = b_i$	λ_i frei, $\lambda A \leq c$
x_i frei	$\lambda a^i = c_i$

Beispiel. Gegeben sei das Primalproblem (P),

$$\min \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

unter

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_3 &\leq 0, \quad x_2 \text{ frei} \end{aligned}$$

Dann lautet das zugehörige Dualproblem (P*)

$$\max \quad \lambda_1 + \lambda_2$$

unter

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1 \quad (\text{da } x_2 \text{ frei}) \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 &\leq -2 \\ \lambda_2 &\geq 0, \quad \lambda_1 \text{ frei} \end{aligned}$$

§ 7.2 Der Dualitätssatz

In der unsymmetrischen Form dualer Programm hat man das Primalproblem

$$(P) \quad \min \left\{ cx \,\middle|\, Ax = b,\, x \geq 0 \right\}$$

und das zugehörige Dualproblem

$$(P^*) \quad \max \left\{ \lambda b \,\middle|\, \lambda A \leq c,\, \lambda \text{ frei } \right\}.$$

Die zulässigen Mengen lauten

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = b,\, x \geq 0 \right\}$$

sowie

$$K^* = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \lambda A \leq c \right\}.$$

(7.3) Satz (Schwacher Dualitätssatz). Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$. Dann gilt $\lambda b \leq cx$.

Beweis. Es gilt $\lambda b = \lambda A x \leq cx$ wegen $\lambda A \leq c$ und $x \geq 0$. □

(7.4) Korollar. Sind $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ zulässige Punkte mit $\lambda b = cx$, dann sind $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ optimale Lösungen von (P) bzw. (P*).

(7.5) Satz (Dualitätssatz der Linearen Optimierung). Besitzt eines der Probleme (P) oder (P*) eine optimale Lösung, so besitzt auch das andere Problem eine optimale Lösung und der Optimalwert beider Probleme stimmt überein, d.h. $\lambda b = cx$ für entsprechendes λ und x.

Beweis. OBdA habe das primale Problem (P) eine endliche Lösung $\bar{x} \in K$. Setze $z_0 = c\bar{x}$ und definiere den abgeschlossenen, konvexen Kegel

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \omega \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} cx - c\bar{x} \\ b - Ax \end{pmatrix} \,\middle|\, x \geq 0, t > 0 \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Für $x = \bar{x}$ hat man $0 \in C$. Es gilt also $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \cong$ "Zielfunktionswerte $\times$ Nebenbedingungen". Behauptung: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0_m \end{pmatrix} \notin C$. Angenommen, es gelte $\begin{pmatrix} -1 \\ 0_m \end{pmatrix} \in C$. Dann gibt es $t_0 > 0$ und $x_0 \geq 0$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0_m \end{pmatrix} = t_0 \cdot \begin{pmatrix} cx_0 - c\bar{x} \\ b - Ax_0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $Ax_0 = b$ mit $x_0 \geq 0$, also ist $x_0 \in K$ zulässig. Dies bedeutet $cx_0 \geq c\bar{x}$, also $cx_0 - c\bar{x} \geq 0$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn es gilt $-1 = t_0(cx_0 - c\bar{x})$ wegen $t_0 > 0$. Also gilt schon $\begin{pmatrix} -1 \\ 0_m \end{pmatrix} \notin C$. Man betrachtet eine andere Darstellung von C:

$$t(cx - c\bar{x}) = c \underbrace{tx}_{=:y} - tz_0 = cy - tz_0, \; y \geq 0$$

und

$$t(b - Ax) = tb - A \underbrace{tx}_{=y} = tb - Ay, \; y \geq 0.$$

Wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ 0_m \end{pmatrix} \notin C$ gibt es nach dem Trennungssatz (A.6) einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(\lambda_0, \lambda) \neq (0, 0_m)$, mit

$$(\lambda_0, \lambda) \begin{pmatrix} -1 \\ 0_m \end{pmatrix} = -\lambda_0 < 0 \leq (\lambda_0, \lambda) \begin{pmatrix} r \\ \omega \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} r \\ \omega \end{pmatrix} \in C$. Daher gilt $\lambda_0 > 0$, Division der Ungleichung durch λ_0 bedeutet, $\lambda_0 = 1$ zu setzen. Aus der Darstellung $\begin{pmatrix} r \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy - tz_0 \\ tb - Ay \end{pmatrix}$ mit $t > 0$ und $y \geq 0$ folgt

$$0 \leq cy - tz_0 + \lambda(tb - Ay) \, \forall t > 0, y \geq 0.$$

Betrachtet man den Grenzwertprozess $t \to 0+$, so gilt

$$0 \leq cy - \lambda Ay = (c - \lambda A)y \, \forall y \geq 0.$$

Es folgt dann schon $0 \leq c - \lambda A \iff \lambda A \leq c$, also $\lambda \in K^*$ dual zulässig. Setzt man weiter in obiger Ungleichung $t = 1$ und $y = 0$, so erhält man

$$0 \leq -z_0 + \lambda b \iff z_0 = c\bar{x} \leq \lambda b.$$

Nach dem schwachen Dualitätssatz gilt $\lambda b \leq c\bar{x}$ für alle $\lambda \in K^*$ und $x \in K$, also muss hier schon

$$z_0 = \lambda b = c\bar{x}$$

gelten und λ ist somit optimal in K^*. □

Bemerkungen.

(i) Es wird nicht die Bedingung $\operatorname{rang}(A) = m$ gefordert.

(ii) Der Dualitätssatz kann auch mit dem Lemma von Farkas bewiesen werden.

(iii) Für $\operatorname{rang}(A) = m$ und eine nicht entartete Basislösung vereinfacht sich der Beweis des Dualitätssatzes, vgl. (7.10)

(7.6) Existenzsatz.

(i) Besitzen (P) und (P^*) zulässige Punkte, dann besitzen (P) und (P^*) schon optimale Lösungen.

(ii) Besitzt nur eines der Probleme (P) oder (P^*) zulässige Punkte, so besitzt das Problem insgesamt keine endliche Lösung.

(iii) Besitzt ein Problem zulässige Punkte, aber keine endliche Lösung, so hat das jeweils duale Problem keine zulässigen Punkte.

(7.7) Satz (Komplementarität, unsymmetrische Form). Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ für die unsymmetrische Form (7.2). Dann sind äquivalent:

(i) x und λ sind optimale Lösungen mit $\lambda b = cx$.

(ii) $(\lambda A - c)x = 0$.

(iii) $x_i = 0 \Rightarrow \lambda a^i = c_i$ und $\lambda a^i < c_i \Rightarrow x_i = 0$ jeweils für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Man hat $(\lambda A - c)x = \lambda Ax - cx = \lambda b - cx = 0$. Bachte $\lambda A - c \leq 0$. Dann folgt komponentenweise $(\lambda A - c)_i x_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. □

(7.8) Satz (Komplementarität, symmetrische Form). Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ für die symmetrische Form (7.1). Dann sind äquivalent:

(i) x und λ sind optimale Lösungen mit $\lambda b = cx$.

(ii) $(\lambda A - c)x = 0$ und $\lambda(Ax - b) = 0$.

(iii) (1) $x_i > 0 \Rightarrow \lambda a^i = c_i$ und $\lambda a^i < c_i \Rightarrow x_i = 0$ jeweils für alle $i = 1, \ldots, n$.
(2) $\lambda_j > 0 \Rightarrow a_j x = b_j$ und $a_j x > b_j \Rightarrow \lambda_j = 0$ jeweils für alle $j = 1, \ldots, m$.

§ 7.3 Das duale Simplex-Verfahren

Wir gehen aus von der unsymmetrischen Form

$$(P) \quad \min \left\{ cx \,\middle|\, Ax \geq b,\, x \geq 0 \right\}$$

$$(P^*) \quad \max \left\{ \lambda b \,\middle|\, \lambda A \leq c,\, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Voraussetzungen. Es sei $\operatorname{rang}(A) = m$ und gegeben sei eine Basislösung $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$.

(7.9) Definition. Der Zeilenvektor $\lambda = c_B A_B^{-1} \in \mathbb{R}^m$ heißt Simplexmultiplikator zur Basis B.

(7.10) Dualitätssatz. Sei $\operatorname{rang}(A) = m$. Dann gilt

(i) $\lambda = c_B A_B^{-1}$ ist zulässig für (P^*) genau dann, wenn $r_N \leq 0$ ist.

(ii) Die Basislösung $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ sei optimal und nicht entartet. Dann ist $\lambda = c_B A_B^{-1}$ eine optimale Lösung von (P^*) mit $z_0 = c_B x_B = c_B A_B^{-1} b = \lambda b$.

Beweis. (i) Es gilt $\lambda A \leq c \iff (\lambda A_B, \lambda A_N) \leq (c_B, c_N)$. Wegen $\lambda = c_B A_B^{-1}$ gilt schon $\lambda A_B = c_B$. Weiter hat man $\lambda A_N \leq c_N \iff r_N = \lambda A_N - c_N \leq 0$.

(ii) Sei x optimal und nicht entartet zur Basis B, also gelte $x_B = A_B^{-1} b > 0$. Nach Satz (4.11) gilt dann notwendig schon $r_N \leq 0$. Nach (i) gilt weiter $\lambda A_N \leq c_N$ und daher $\lambda A \leq c$, d.h. $\lambda \in K^*$ ist zulässig. λ ist auch optimal wegen $\lambda b = c_B \underbrace{A_B^{-1} b}_{= x_B} = c_B x_B = cx$. □

Idee des dualen Simplex-Verfahrens.

Es liege eine Basislösung zur Basis B vor,

(i) die nicht (primal) zulässig für (P) ist, d.h. es gilt nicht $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$,

(ii) die dual zulässig ist, d.h. es gilt $r_N \leq 0$.

Man geht vom alten Simplex-Tableau (4.18) aus und löst das Problem (P) vom "dualen Standpunkt" aus. Dabei achte man auf folgendes:

(i) Man erhalte eine Optimalitätsbedingung $r_N \leq 0$.

(ii) Man erreiche die Zulässigkeit von x, d.h. $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$.

(iii) Man lasse die Zielfunktion λb von (P^*) wachsen.

Voraussetzung: Es sei B eine Basis mit $A_B = I$. Man hat dann das Simplex-Tableau

$$\begin{array}{r|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{x_j (j \in N)} \\ \cline{2-3} & z_0 & r_N \\ \cline{2-3} x_i (i \in B) & b & A_N \\ \cline{2-3} \end{array} = T = (T_{ij})_{i=0,\dots,m\, j=0,\dots,n} \tag{7.1}$$

wobei $r_N = c_B A_N - c_N$. Das Tableau (7.11) ist

(i) primal zulässig, wenn $b \geq 0$.

(ii) dual zulässig, wenn $r_N \leq 0$.

(iii) optimal, wenn $b \geq 0$ und $r_N \leq 0$.

(7.12) Das duale Simplex-Verfahren zur Lösung von (P).

(1) Start: (P) sei dual zulässig zur Basis B und Nichtbasis N mit $A_B = I$, d.h. es gelte $t_{0j} \leq 0$ für $j = 1, \dots, n - m$ $(r_N \leq 0)$.

(2) Ist $t_{i0} \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$ $(b \leq 0)$, so ist die Basislösung optimal. Setze $x_{B(i)} = b_i$, $x_{N(j)} = 0$ und $z_0 = t_{00}$. Andernfalls gehe zu (3).

(3) Bestimmung der Austauschzeile. Wähle einen Index p mit $t_{p0} < 0$, z.B. $t_{p0} = \min_{i=1,\dots,n} t_{i0}$.

(4) Gilt $t_{pj} \leq 0$ für alle $j = 1, \dots, m - n$, so besitzt (P^*) keine endliche Lösung. STOP. Sonst gehe zu (5).

(5) Bestimmung der Austauschspalte. Ziel ist die Erhaltung dualen Zulässigkeit. Dazu wähle man einen Index s mit

$$\frac{t_{0s}}{t_{ps}} = \min \left\{ \frac{t_{0j}}{t_{pj}} \,\middle|\, t_{pj} < 0,\, j = 1, \dots, n - m \right\}.$$

Beachte: $t_{0j} = r_{N(j)}$.

(6) Vertausche das s-te Element von N mit dem p-ten Element von B. Führe an der Tableau-Matrix (7.11) eine Pivotoperation mit dem Pivotelement $t_{ps} < 0$ wie in (4.20) durch.

Anwendung auf LPe in symmetrischer Form.

Betrachte das primale Problem

$$(P) \min \left\{ cx \,\middle|\, Ax \geq b,\, x \geq 0 \right\}.$$

Man hat dann $Ax \geq b \iff -Ax \leq b$. Man schaut dich dann das System,

$$-Ax + y = b,\, x, y \geq 0$$

an. Vorausgesetzt sei $c \geq 0$. Sodann wählt man eine Basis $B = (n + 1, \dots, n + m)$ und eine Nichtbasis $N = (1, \dots, n)$. Hier gilt $r_N = -c \leq 0$, also die duale Zulässigkeit. Das Starttableau lautet dann

$$\begin{array}{r|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{x} \\ \cline{2-3} & z_0 = 0 & r_N = -c \\ \cline{2-3} y & -b & -A \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Beispiel. Gegeben sie das primale Problem

$$(P) \min 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

unter

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige duale Problem lautet dann

$$(P^*) \min 5\lambda_1 + 6\lambda_2$$

unter

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &\leq 3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &\leq 4 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 5 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Tableaufolge

1. Tableau

		x_1	x_2	x_3
	0	-3	-4	-5
y_1	-5	-1	-2	-3
y_2	-6	-2	-2	-1

$\overset{y_2 \leftrightarrow x_1}{\Rightarrow}$

2. Tableau

		y_2	x_2	x_3
	9	$-3/2$	-1	$-7/2$
y_1	-2	$-1/2$	-1	$-5/2$
y_2	3	$-1/2$	1	$1/2$

$\overset{y_1 \leftrightarrow x_2}{\Rightarrow}$

3. Tableau

		y_2	y_1	x_3
	11	-1	1	-1
x_2	2	$1/2$	-1	$5/2$
x_1	1	-1	1	-2

Das dritte Tableau ist optimal mit $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 0$.

Zusammenhang mit der dualen Lösung. Man kann zeigen (vgl. als Übung), dass der Zusammenhang

$$\lambda_j = -r_{N(j)}$$

für $j = 1, \ldots, m$ besteht.

Anwendung auf Ungleichungen.

Gegeben sei ein System

$$\begin{aligned} a_i x &\geq b_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ a_i x &\leq b_i, \quad i = k+1, \ldots, m \end{aligned}$$

Man beachte, dass $a_i x \geq b_i \iff -a_i x \leq -b_i$ gilt. Dann erhält man als Starttableau

$$\begin{array}{c|c|c|} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x} \\ \cline{2-3} & z_0 = 0 & r_N = -c \leq 0 \\ \cline{2-3} & -b_1 & -a_1 \\ & \vdots & \vdots \\ y & -b_k & -a_k \\ \cline{2-3} & b_{k+1} & a_{k+1} \\ & \vdots & \vdots \\ & b_m & a_m \\ \cline{2-3} \end{array}$$

§ 7.4 Sensitivität und Schattenpreise

Das LP $\min \{ cx \mid Ax = b,\, x \geq 0 \}$ habe die optimale Basis B und es gelte $x_B = A_B^{-1} b > 0$, d.h. die Basislösung ist nicht entartet. Die optimale duale Lösung lautet dann $\lambda = c_B A_B^{-1}$ und es stellt sich die Frage nach der Bedeutung von λ.

Idee. Bei “kleinen” Störungen $b \to b + \Delta b$ bleiben die Basis B und die Nichtbasis N für das gestörte LP

$$\min \left\{ cx \,\middle|\, Ax = b + \delta b,\, x \geq 0 \right\}$$

optimal, denn es gilt $\tilde{x}_B := A_B^{-1}(b + \Delta b) > 0$ für genügend kleines Δb. Außerdem hat man weiterhin $r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N \leq 0$. Die Änderung des Zielfunktionswertes beträgt

$$\Delta z = c_B \tilde{x}_B - c_B x_B = \underbrace{c_B A_B^{-1}}_{=\lambda} \Delta b = \lambda \cdot \Delta b.$$

Für $z = z(b)$ erhält man daraus die Schattenpreis-Formel

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \lambda_i$$

für $i = 1, \ldots, m$.

Zusammenfassung zu Simplex-Verfahren

I Primale Simplex-Verfahren

(1) Grundform. Das Grundproblem lautet $\min \left\{ cx \,\middle|\, Ax = b, x \geq 0 \right\}$. Voraussetzung ist $b \geq 0$, B sei eine Basis mit $A_B = I$. Dann ergibt sich das Tableau

		$x_j (j \in N)$
	z_0	r_N
$x_i (i \in B)$	b	A_N

mit $z_0 = c_B x_B$ und $r_N = c_B A_N - c_N$. Für Ungleichungen beachte man $Ax \leq b \iff Ax + y = b$ mit $y \geq 0$.

(2) Zwei-Phasen-Methode. Gegeben bei das Problem der Minimierung von cx unter

$$\begin{aligned} a_i x &\geq b_i, i = 1, \ldots, l \\ a_i x &= b_i, i = l+1, \ldots, k \\ a_i x &\leq b_i, i = k+1, \ldots, m \end{aligned}$$

mit $x \geq 0$. Diese Nebenbedingungen sind äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_i x - x_{n+i} + y_i &= b_i, i = 1, \ldots, l \\ a_i x + y_i &= b_i, i = l+1, \ldots, k \\ a_i x + y_i &= b_i, i = k+1, \ldots, m \end{aligned}$$

mit $x_1, \ldots, x_{n+l}, y_1, \ldots, y_m \geq 0$. Man betrachtet dann das Hilfsproblem $\min \sum_{i=1}^k y_i$ oder allgemein, falls $a_i x = b_i$ für $i \in I_{Gl} \subset \{1, \ldots, m\}$ das Hilfsproblem $\min \sum_{i \in I_{Gl}} y_i$. Es ergibt sich das Tableau

		$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_{n+k}$
	z_0	$\sum_{i=1}^k a_{ij}$	$-1, \ldots, -1$
y_1	b_1	a_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$-E_k$
y_k	b_k	a_k	
y_{k+1}	b_{k+1}	a_{k+1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
y_m	b_m	a_m	

Phase I Setze $B = \underbrace{n + l +, \ldots, n + l + m}_{y_1, \ldots, y_m}$ und $N = \underbrace{1, \ldots, n + l}_{x_1, \ldots, x_{n+l}}$ sowie $z_0 = c_B x_B$ und

$$r_j = (c_B A_N - c_N)_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^k a_{ij}, & j = 1, \ldots, n \\ -1, & j = n+1, \ldots, n+l \end{cases}.$$

Dann stellt man das Tableau auf und bringt $y_1, \ldots, y_k$ in die Nichtbasis. Anschließend streicht man die Spalten unter $y_1, \ldots, y_k$.

Phase II Man berechnet die Werte $z_0 = c_B x_B$ und $r_N = c_B A_N - c_N$ in der neuen Basis B und Nichtbasis N. Dazu verwendet man das Simplex-Verfahren (4.20).

II Duale Simplex-Verfahren

Allgemeine Voraussetzung ist $r_N \leq 0$, d.h. die Basislösung sei dual zulässig.

(1) Grundform. Das Problem lautet $\min \left\{ cx \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}$. Voraussetzung ist, dass B eine Basis mit $A_B = I$ ist. Man erhält das Starttableau

$$\begin{array}{r|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{x_j (j \in N)} \\ \cline{2-3} & z_0 & r_N \leq 0 \\ \cline{2-3} x_i (i \in B) & b & A_N \\ \cline{2-3} \end{array}$$

mit $z_0 = c_B x_B$ und $r_N = c_B A_N - c_N$.

(2) Ungleichungen. Voraussetzung ist $c \geq 0$. Dann unterscheidet man zwei Varianten.

(i) Für die Nebenbedingungen gelte $Ax \geq b$. Dann betrachtet man $Ax \geq b \iff -Ax \leq b$ mit $y \geq 0$ und erhält als Starttableau

$$\begin{array}{r|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{x_j (j \in N)} \\ \cline{2-3} & z_0 = 0 & r_N = -c \leq 0 \\ \cline{2-3} x_i (i \in B) & -b & -A \\ \cline{2-3} \end{array}$$

(ii) Im Falle gemischter Bedingungen, also für

$$\begin{aligned} a_i x &\geq b_i, i = 1, \ldots, k \\ a_i x &\leq b_i, i = k+1, \ldots, m \end{aligned}$$

multipliziert man ausschließlich die $\geq$-Bedingungen mit -1 und erhält das Tableau

$$\begin{array}{r|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{x} \\ \cline{2-3} & z_0 = 0 & r_N = -c \leq 0 \\ \cline{2-3} & -b_1 & -a_1 \\ & \vdots & \vdots \\ y & -b_k & -a_k \\ \cline{2-3} & b_{k+1} & a_{k+1} \\ & \vdots & \vdots \\ & b_m & a_m \\ \cline{2-3} \end{array}$$

III Gemischte Verfahren

Als Beispiel geben wir die Drei-Phasen-Methode an. Bei dieser wird weder $b \geq 0$ noch $r_N \leq 0$ vorausgesetzt. Allgemein betrachtet man das Problem der Minimierung von cx unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_i x &= b_i, i = 1, \ldots, k \\ a_i x &\leq b_i, i = k+1, \ldots, m \end{aligned}$$

mit $x \geq 0$. Ungleichungen der Form $a_i x \geq b_i$ können auch hier in $-a_i x \leq -b_i$ transformiert werden.

Phase I Nach Einführung von Schlupfvariablen betrachtet man $a_i x + y_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, m$ mit $y_i \geq 0$. Dann bringt man die Variablen $y_1, \ldots, y_k$ in die Nichtbasis und streicht die Spalten unter $y_1, \ldots, y_k$.

Phase II Man berechnet eine primal zulässige Lösung $x_B \geq 0$ mit dem dualen Simplex-Algorithmus (7.12).

Phase III Man wendet das primale Simplex-Verfahren (4.20) an, um die duale Zulässigkeit $r_N \leq 0$ zu erreichen. Dann ist die Lösung optimal.

Weitere Themen zur Linearen Optimierung

- Ganzzahlige Lineare Optimierung mit $x \in \mathbb{Z}^n$
- Transportprobleme
- Flüsse in Netzwerken
- Parametrische Lineare Optimierung
- Alternative zum Simplex-Verfahren: Innere-Punkte-Methoden. Vgl. dazu das Buch von J. Nocedal, S. Wright: Numerical Optimization, Springer Verlag.

II Nichtlineare Optimierung

§ 8 Unbeschränkte Optimierungsprobleme

§ 8.1 Probleme und Beispiele

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Das Grundproblem lautet dann

$$\min \{ f(x) \mid x \in D \} . \tag{8.1}$$

Ein Punkt $\bar{x} \in D$ heißt lokale bzw. strenge lokale Minimalstelle von f in D, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von $\bar{x}$ gibt mit $f(\bar{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in U$ bzw. $f(\bar{x}) < f(x)$ für alle $x \in U$ mit $x \neq \bar{x}$.

Beispiele.

(i) Testfunktion von Rosenbrock (1960):

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_2)^2,\ D = \mathbb{R}^2.$$

Lösung: $x_1 = 1$, $x_2 = x_1^2 = 1$. Interessant sind die Höhenlinien von f, d.h. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) \leq c\}$ für $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Testfunktion von Himmelblau:

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2,\ D = \mathbb{R}^2.$$

Dies ist ein Polynom 4. Grades mit je 4 Minimalstellen und Sattelpunkten sowie einem lokalen Maximum in $(-0.270845, -0.923039)$.

(iii) Quadratische Probleme: Sei Q eine symmetrische $n \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Dann hat man ein quadratisches Problem

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t Q x + b^t x + c,$$

wobei $Q > 0$ meist positiv definit gewählt wird.

(iv) Nichtlineare Ausgleichsrechnung: Gegeben seien Messdaten (t_i, y_i) für $i = 1, \ldots, n$. Gesucht ist eine Approximationsfunktion $g(x, t)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ für das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x, t_i))^2.$$

Beispiele für solche Lösungen sind Ausgleichsgeraden $g(x_1, x_2, t) = x_1 + x_2 \cdot t$, Ausgleichspolynome $g(x_1, \ldots, x_n, t) = x_1 + x_2 \cdot t + \ldots + x_n t^{n-1}$ oder exponentielle Ausgleichsfunktionen $g(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 e^{x_2 t} + x_3$.

(v) Diskrete optimale Steuerprozesse: Mit $x_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man den Zustand eines Systems zu bestimmten Zeiten t_i für $i = 0, \ldots, N$. Beispiele sind Lagerbestände, Biomasse (das sogenannte optimale Fischen), chemische Reaktionen oder physikalische Koordinaten.

Mit $u_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man eine Steuerung zum Zeitpunkt t_i für $i = 0, \ldots, N-1$. Den obigen Beispielen entsprechen etwa die Steuerungen Produktion, Fangrate, Temperatur und Beschleunigung.

Weiterhin hat man den Begriff der Dynamik. Dabei sind $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ für $i = 0, \ldots, N-1$ gegeben. $N \geq 1$ ist dabei die Anzahl der Perioden und Entscheidungen mit

$$x_{i+1} = h_i(x_i, u_i)$$

für alle $i = 0, \ldots, N-1$.

Für die Zielfunktion sind $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ für $i = 0, \ldots, N-1$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist dann

$$\min f(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, u_i) + g(x_N).$$

Voraussetzung ist, dass der Anfangszustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bekannt ist und keine Bedingung an den Endzustand x_N gestellt wird. Die Optimierungsvektoren lauten $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N \cdot n}$ und $u = (u_0, \ldots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N \cdot m}$.

Beispiel. Lagerhaltung. Gegeben sei der Lagerbestand $x_i \in \mathbb{R}$, die Produktionsrate $u_i \in \mathbb{R}$ und die Nachfrage $r_i \in \mathbb{R}$. Dann hat man eine Lagerbilanzgleichung der Form

$$x_{i+1} = x_i + u_i - r_i$$

für $i = 0, \ldots, N-1$.

§ 8.2 Existenz von Lösungen

(8.2) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$N(f, \alpha) := \left\{ x \in D \,\middle|\, f(x) \leq \alpha \right\}$$

die Niveaumengen von f.

(8.3) Satz. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für ein $y \in D$ sei die Niveaumenge

$$N(f, f(y)) = \left\{ x \in D \,\middle|\, f(x) \leq f(y) \right\}$$

nichtleer und kompakt. Dann besitzt f auf D mindestens ein globales Minimum.

Beweis. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $N(f, f(y))$ ein Minimum. Für $x \in D \setminus N(f.f(y))$ gilt $f(x) > f(y)$. □

(8.4) Korollar. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $\lim_{||x||_2 \to \infty} f(x) = +\infty$. Dann ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $N(f, f(y))$ kompakt. Also gibt es mindestens ein globales Minimum von f auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel. Sei Q eine symmetrische und positiv definite $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) = \frac{1}{2} x^t Q x + b^t x$. Wegen $\lim_{||x||_2 \to \infty} f(x) = +\infty$ besitzt f auf $\mathbb{R}^n$ ein globales Minimum. Aus $\nabla f(x) = 0 = Qx + b$ folgt dann $x = Q^{-1} b$.
Eine Variante ist das Ausgleichsproblem: Sei A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Man betrachte das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = ||Ax - b||_2^2 .$$

Es gilt $f(x) = \frac{1}{2} x^t \underbrace{A^t A}_{=:Q} x - x^t A^t b + \frac{1}{2} ||b||_2^2$. Mit $\operatorname{rang}(A) = n \leq m$ ist $Q = A^t A > 0$ positiv definit.

§ 8.3 Optimalitätsbedingungen

Wir führen folgende Notationen ein: $f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ (Zeilenvektor) und $\nabla f(x) = f'(x)^t$. Falls f zweimal differenzierbar ist, sei die Hesse-Matrix definiert als

$$f''(x) = D^2 f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} .$$

(8.5) Satz (Notwendige Optimalitätsbedingung erster und zweiter Ordnung). Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Sei weiter $\bar{x} \in D$ eine Minimalstelle von f in D.

(i) Ist f differenzierbar, so gilt $f'(\bar{x}) = 0$ bzw. $\nabla f(x) = 0$.

(ii) Ist f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\bar{x} \in D$, so gelten die Bedingungen $f'(\bar{x}) = 0$ und $v^t f''(\bar{x}) v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Vergleiche Analysis II.

(8.6) Satz (Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung). Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung eines Punktes $\bar{x} \in D$. In $\bar{x} \in D$ gelten die Bedingungen

(i) $f'(\bar{x}) = 0$.

(ii) $v^t f''(\bar{x}) v > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$, d.h. $f''(\bar{x})$ ist positiv definit.

Dann gibt es $c > 0$ und $\alpha > 0$ mit

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + c \cdot ||x - \bar{x}||_2^2$$

für alle $||x - \bar{x}||_2 \leq \alpha$. Insbesondere ist $\bar{x}$ eine strenge lokale Minimalstelle.

Beweis. Sei $\lambda_{\min}$ der kleinste Eigenwert von $f''(\bar{x})$. Wegen $f''(\bar{x}) > 0$ positiv definit folgt $\lambda_{\min} > 0$ und man hat

$$v^t f''(\bar{x}) v = \lambda_{\min} v^t v \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Man betrachte nun die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \underbrace{f'(\bar{x})(x - \bar{x})}_{=0} + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^t f''(\bar{x})(x - \bar{x}) + \mathcal{O}(||x - \bar{x}||_2^2) \\ &\geq f(\bar{x}) + \frac{1}{2}\lambda_{\min} ||x - x\bar{x}||_2^2 + \mathcal{O}(||x - \bar{x}||_2^2) \end{aligned}$$

Zu beliebigem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\lambda_{\min}$ gibt es $\alpha > 0$ mit

$$\left|\mathcal{O}(||x - \bar{x}||_2^2)\right| \leq \varepsilon\, ||x - \bar{x}||_2^2 \ \forall\, ||x - \bar{x}||_2^2 \leq \alpha.$$

Es folgt

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \frac{1}{2}\lambda_{\min} ||x - \bar{x}||_2^2 - \varepsilon\, ||x - \bar{x}||_2^2 = f(\bar{x}) + ||x - \bar{x}||_2^2 \underbrace{(\frac{1}{2}\lambda_{\min} - \varepsilon)}_{=:c} \qquad \square$$

Beispiele.

(i) <u>Lineare Ausgleichsrechnung</u>. A sei eine $m \times n$-Matrix mit $n \leq m$ und $\operatorname{rang}(A) = n$. Weiter sei $b \in \mathbb{R}^m$. Gesucht ist

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = ||Ax - b||_2^2 = (Ax - b)^T (Ax - b).$$

Hinreichende Bedingung: $f'(\bar{x}) = 0 \Rightarrow A^T A x = A^T b$, $f''(\bar{x}) = 2A^T A > 0$.

(ii) <u>Rosenbrock-Funktion</u>. $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1^2)^2$ mit $\bar{x} = (1, 1)$. Dann ist

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix} \Rightarrow f''(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}.$$

Also ist $f''(\bar{x}) > 0$ positiv definit.

Zusammenhang der Bedingung $f''(\bar{x}) > 0$ mit dem Newton-Verfahren

Setze $F(x) := \nabla f(x)$, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in $U(\bar{x})$. Man bestimme die Nullstelle $\bar{x} \in D$ von F, d.h.

$$F(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) = 0.$$

Es ergibt sich die folgende Newton-Iteration:

Start. $x^0 \in D$.

Iteration. $x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k) = x^k - f''(x^k)^{-1} \nabla f(x^k)$.

Voraussetzung. $f''(x^k)$ sei regulär. Wegen $f''(\bar{x}) > 0$ gilt $f''(x^k) > 0$ in einer geeigneten Umgebung.

Zusammenhang mit dem SQR-Verfahren (Sequential quadratic programming)

Man approximiert $f(x)$ in x^k durch Taylor-Entwicklung

$$f(x) \sim f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T f''(x^k)(x - x^k).$$

Man erhält das quadratische Teilproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f'(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T f''(x^k)(x - x^k).$$

Minimum ist x^{k+1}, definiert durch

$$x^{k+1} = x^k - f''(x^k)^{-1} \nabla f(x^k).$$

§ 8.4 Sensitivitätsanalyse

(8.7) Satz (über implizite Funktionen). Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine in einer Umgebung eines Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ j-mal stetig differenzierbare Abbildung ($j \geq 1$). Es gelte $F(x_0, y_0) = 0$ und es sei $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann gibt es Umgebungen $U(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ und $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine eindeutige, j-mal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U(y_0) \to V(x_0)$ mit

$$F(\varphi(y), y) = 0 \, \forall y \in U(y_0)$$

und $\varphi(y_0) = x_0$. Außerdem gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0) = \varphi'(y_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Anwendung auf die Optimierung

Es sei $p \in \mathbb{R}^k$ ein Stör- oder Sensitivitätsparameter. Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f = f(x, p)$. Für das Sensitivitätsproblem betrachtet man zu festem $p \in \mathbb{R}^k$

$$P(p) \ \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, p).$$

Sei $\bar{x} = x_0$ eine lokale Minimalstelle für das Problem $P(p)_0$ zum nominalen Parameter $p_0 \in \mathbb{R}^k$.

Voraussetzung. f sei zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von (x_0, p_0).

Notation. $f_x(x_0, p_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, p_0)$, $f_{xx}(x_0, p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, p_0)$.

(8.8) Sensitivitätssatz. Der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genüge den hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung für das Problem $P(p_0)$, d.h. $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, p_0)$ und es gelten die Bedingungen

$$f_x(x_0, p_0) = 0, \ f_{xx}(x_0, p_0) > 0 \text{ positiv definit.}$$

Dann gibt es eine Umgebung $P_0 \subset \mathbb{R}^k$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $x : P_0 \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

(i) $x(p_0) = x_0$.

(ii) $x(p)$ ist steng lokale Minimalstelle des Problems $P(p)$, $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, p)$ für alle $p \in P_0$.

(iii) $\frac{\partial}{\partial p} f(x(p), p)\big|_{p=p_0} = f_p(x_0, p_0)$.

(iv) $\frac{\partial x}{\partial p}(p_0) = -f_{xx}(x_0, p_0)^{-1} f_{xp}(x_0, p_0)$.

Beweis. Setze $F(x, p) := f_x(x, p)$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Dann ist F einmal stetig differenzierbar in (x_0, p_0). Es gilt $F(x_0, p_0) = f_x(x_0, p_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und es ist $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, p_0) = f_{xx}(x_0, p_0) > 0$ positiv definit, insbesondere also regulär. Es gibt also eine Umgebung P_0 von p_0 und eine C^1-Abbildung $x : P_0 \to \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x(p), p) = f_x(x(p), p) = 0 \, \forall p \in P_0, \ x(p_0) = x_0.$$

Für P_0 hinreichend klein gilt $f_{xx}(x(p), p) > 0$ positiv definit für alle $p \in P_0$. Daher ist $x)p)$ eine strenge lokale Minimalstelle von $P(p)$. Dies zeigt (i) und (ii). Für (iii) gilt

$$\frac{\partial}{\partial p} f(x(p), p)\big|_{p=p_0} = \underbrace{f_x(x_0, p_0)}_{=0} \frac{\partial x}{\partial p}(p_0) + f_p(x_0, p_0) = f_p(x_0, p_0).$$

Für (iv) gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} F(x(p), p)\big|_{p=p_0} = \frac{\partial}{\partial p}(f_x(x(p), p))\big|_{p=p_0} = f_{xx}(x_0, p_0)\frac{\partial x}{\partial p}(p_0) + f_{xp}(x_0, p_0).$$

Es folgt

$$\frac{\partial x}{\partial p}(p_0) = -f_{xx}(x_0, p_0)^{-1} f_{xp}(x_0, p_0). \quad \Box$$

Anwendung auf die Echtzeitoptimierung

Man approximiert

$$x(p) \simeq x(p_0) + \frac{\partial x}{\partial p}(p_0)(p - p_0) = x_0 + \frac{\partial x}{\partial p}(p_0)(p - p_0).$$

Dann berechnet man

offline: x_0 und $\frac{\partial x}{\partial p}(p_0)$ gemäß (8.8) (iv).

online: $x(p)$.

Beispiel. Gegeben sei das Problem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, p) = \frac{1}{3}x^3 - px$ mit $p > 0$ und $p_0 = 1$. Man hat

$$f_x(x, p) = x^2 - p \Rightarrow x = \pm\sqrt{p}$$

und

$$f_{xx}(x, p) = 2x,\ f_{xx}(\sqrt{p}, p) = 2\sqrt{p} > 0.$$

Es folgt, dass $x = x(p) = +\sqrt{p}$ strenge lokale Minimalstelle von $P(p)$ ist. Weiterhin gilt $\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{p}}$.

§ 9 Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen: Problemformulierung und der Satz von Karush-Kuhn-Tucker

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $S \subset D$. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet

$$\min \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in S \right\}. \tag{9.1}$$

In den Anwendungen ist S gegeben durch Gleichungen und Ungleichungen. Dazu seien $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, m$ gegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq m$. Dann sei

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g_i(x) \leq 0 \,\forall i = 1, \ldots, k, \quad g_i(x) = 0 \,\forall i = k+1, \ldots, m \right\}.$$

Für $k = 0$ sind also nur Gleichungen gegeben, $g_i(x) = 0$ für $i = 1, \ldots, m$, für $k = m$ hat man entsprechend nur Ungleichungen, $g_i(x) \leq 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Das Standardproblem der Nichtlinearen Optimierung lautet nun

$$\min \left\{ f(x) \,\middle|\, g_i(x) \leq 0 \,\forall i = 1, \ldots, k, \quad g_i(x) = 0 \,\forall i = k+1, \ldots, m \right\}. \tag{9.2}$$

Andere Notationen und Verallgemeinerungen

Sei $K := \mathbb{R}^k_- = \left\{ y \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, y_i \leq 0 \,\forall i = 1, \ldots, k \right\}$ der konvexe, abgeschlossene Kegel mit

$$\operatorname{Int}(k) = \mathring{K} = \left\{ y \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, y_i < 0 \,\forall i = 1, \ldots, k \right\} \neq \emptyset.$$

Setze $g := (g_1, \ldots, g_k)^*$ und $h := (g_{k+1}, \ldots, g_m)$. Dann ist (9.2) äquivalent zu

$$\min \left\{ f(x) \,\middle|\, g(x) \in K, h(x) = 0 \right\}, K = \mathbb{R}^k_-, \mathring{K} \neq \emptyset \tag{9.3}$$

Verallgemeinerung. Seien X, Y, Z Banachräume. Gegeben seien Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to Y$ und $h : X \to Z$. Weiter sei $K \subset Y$ ein abgeschlossener Kegel mit $\mathring{K} \neq \emptyset$. Das Optimierungsproblem lautet in diesem Fall

$$\min \left\{ f(x) \,\middle|\, g(x) \in K, h(x) = 0 \right\} \tag{9.4}$$

Von nun an betrachten wir das Standardproblem (9.2). Sei $\bar{x} \in D$ zulässig für (9.2), also

$$g_i(\bar{x}) \leq 0 \,\forall i = 1, \ldots, k \text{ und } g_i(\bar{x}) = 0 \,\forall i = k+1, \ldots, m.$$

Man definiert die Menge der aktiven Indizes

$$I(\bar{x}) := \left\{ i \in \{1, \ldots, k\} \,\middle|\, g_i(\bar{x}) = 0 \right\}$$

und setzt $J(\bar{x}) := I(\bar{x}) \cup \{k+1, \ldots, m\}$. Dann gilt

$$g_i(\bar{x}) = 0 \,\forall i \in J(\bar{x}).$$

Für (9.2) definiert man die Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x) \tag{9.5}$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ und $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))^*$. Die λ_i heißen Lagrange-Multiplikatoren.

(9.6) Satz (Notwendige Optimalitätsbedingungen von Karush (ca. 1940) und Kuhn, Tucker (ca. 1950), KKT-Bedingungen). Sei $\bar{x} \in D$ eine lokale Minimalstelle des Standard-Problems (9.2). Sei weiter $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\bar{x}$ und sei $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\bar{x}$. Der Punkt $\bar{x}$ sei normal, d.h. die Gradienten $g_i'(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$, $i \in J(\bar{x})$ seien linear unabhängig. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Zeilenvektor $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften

(i) $L_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f'(\bar{x}) + \bar{\lambda} g'(\bar{x}) = f'(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i g_i'(\bar{x}) = 0$,

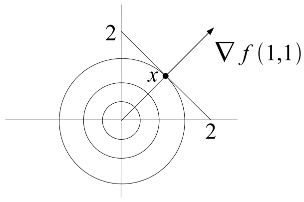
(ii) $\bar{\lambda}_i = 0$ für $i \notin J(\bar{x})$, also für $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $g_i(\bar{x}) < 0$,

(iii) $\bar{\lambda}_i \geq 0$ für $i \in I(\bar{x})$, also für $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $g_i(\bar{x}) = 0$.

Beweis. In den nächsten Paragraphen.

Beispiele. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man betrachte die Niveaumengen $N_C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$, etwa für $n = 2$ und $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Es gilt $\Delta f(x) = 2x$ und man beachte, dass der Gradient stets senkrecht zur Niveaumenge steht.

(1) Man betrachte $\min\{f(x,y) = x^2 + y^2 \mid g(x,y) = x + y - 2 = 0\}$.

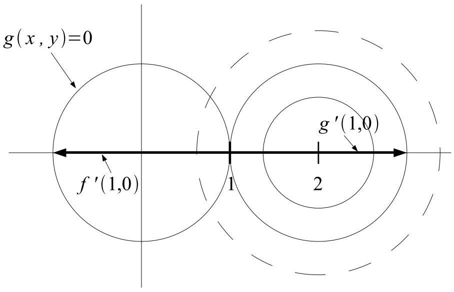


Man sieht, dass der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ optimal ist, da die Niveaulinie die Nebenbedingung in diesem Punkt berührt. Die Gradienten $\Delta f(1,1) = (2,2) = 2 \cdot (\bar{x}, \bar{y})$ und $\Delta g(1,1) = (1,1) = (\bar{x}, \bar{y})$ sind parallel. Die KKT-Bedingung (9.6) (i),

$$f'(1,1) + \bar{\lambda} g'(1,1) = (2 + \bar{\lambda}, 2 + \bar{\lambda} = 0$$

ist erfüllt mit $\bar{\lambda} = -2$. Der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ ist normal wegen $g'(1,1) = (1,1) \neq (0,0)$.

(2) Man betrachte $\min\{f(x,y) = (x-2)^2 + y^2 \mid g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0\}$.



Intuitiv vermutet man, dass der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,0)$ optimal ist. Wir überprüfen für diesen Punkt die KKT-Bedingungen. Zunächst gilt $f'(x,y) = (2(x-2), 2y)$ sowie $g'(x,y) = (2x, 2y) = 2(x,y)$, also

$$f'(1,0) = (-2,0),\ g'(1,0) = (2,0) \neq (0,0).$$

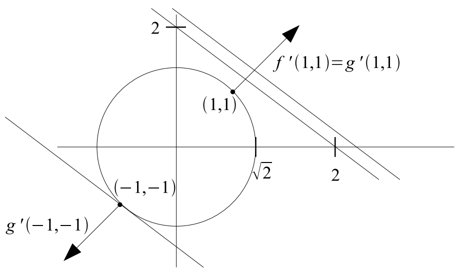
Die KKT-Bedingung (i) liefert

$$f'(1,0) + \bar{\lambda} g'(1,0) = (-2 + \bar{\lambda} \cdot 2, 0) = (0,0) \Rightarrow \boxed{\bar{\lambda} = 1 > 0}.$$

Betrachtet man das gleiche Problem mit der Ungleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$, so genügt der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1,0)$ ebenfalls den KKT-Bedingungen.

Bemerkung. Die Optimalität folgt aus der Konvexität von f und g.

(3) Man betrachte $\min\{f(x,y) = x + y \mid g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0\}$.



Intuitive Kandidaten für Minima sind $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ und $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1,-1)$. Mit der KKT-Bedingung (i) erhalten wir

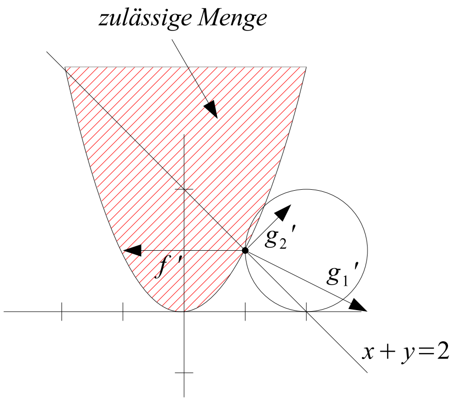
$$f'(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\lambda} g'(\bar{x}, \bar{y}) = (1 + \bar{\lambda} 2\bar{x}, 1 + \bar{\lambda} 2\bar{y}) = (0,0).$$

Für $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ erhalten wir also $\boxed{\bar{\lambda} = \frac{1}{2}}$ und für $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1,-1)$ ergibt sich $\boxed{\bar{\lambda} = .\frac{1}{2}}$.

Mit hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung (SSC, Second-Order Sufficient Conditions) kann man zeigen, dass $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1,-1)$ ein Minimum und $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ ein Maximum ist.

Fazit. Bei Gleichungen können die KKT-Bedingungen nicht zwischen Minimum und Maximum unterscheiden. Hingegen erfüllt im Falle der Ungleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \leq 0$ nur $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, -1)$ die KKT-Bedingungen wegen $\bar{\lambda} = \frac{1}{2} > 0$.

(4) Man betrachte $\min \left\{ f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \,\middle|\, g_1(x, y) = x^2 - y \leq 0,\ g_2(x, y) = x + y - 2 \leq 0 \right\}$.



Behauptung. $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ erfüllt die KKT-Bedingungen. Wir haben $f'(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, 0)$ sowie $g_1(\bar{x}, \bar{y}) = g_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, es gilt also $I(\bar{x}) = \{1, 2\}$. Weiter sind die Vektoren

$$g_1'(\bar{x}, \bar{y}) = (2, -1),\ g_2'(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$$

linear unabhängig, also ist $(\bar{x}, \bar{y})$ normal. Mit der KKT-Bedingung (i) erhalten wir

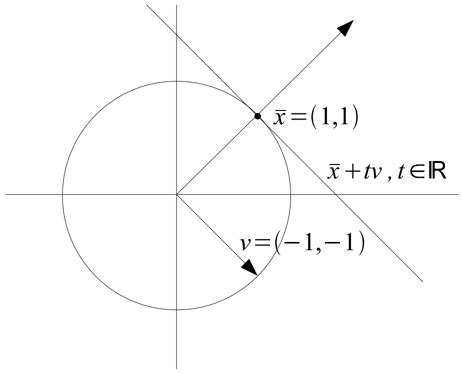
$$f'(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\lambda}_1 g_1'(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\lambda}_2 g_2'(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0) \Rightarrow \boxed{\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \frac{2}{3} > 0}.$$

§ 10 Tangentialkegel, Linearisierender Kegel und Regularität

Einführung. Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung.

(I) **Gleichungen**. Man betrachte eine zulässige Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$.

Fall (a). Sei $n = 2$ und $m = 1$. Man betrachte etwa $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.



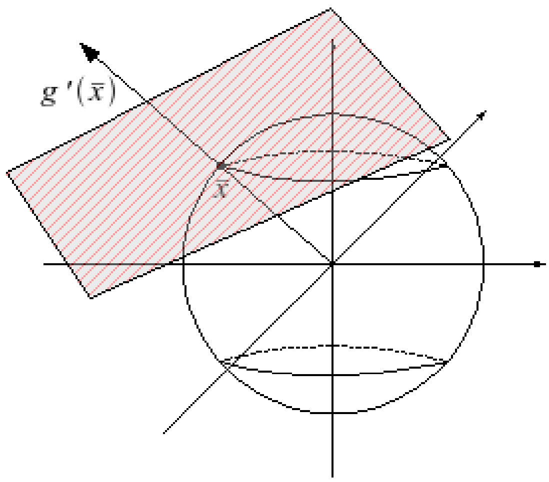
Der Gradient von g' im Punkt $(1,1)$ lautet $g'(1,1) = (2,2)$. Gesucht ist die Menge aller dazu normalen Vektoren. Dies sind alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit

$$g'(1,1)v = (2,2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 + 2v_2 = 0 \iff v_1 + v_2 = 0.$$

Der <u>Tangentialraum</u> bezüglich $(1,1)$ ist $T_{(1,1)} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$, die Tangente an g im Punkt $\bar{x} = (1,1)$ wird parametrisiert durch

$$\bar{x} + tv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

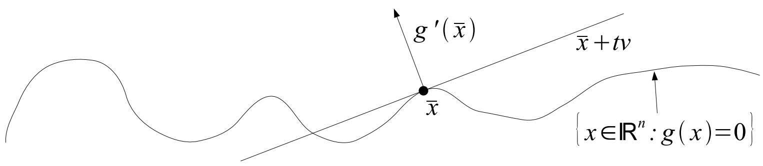
Fall (b). Sei $n = 3$ und $m = 1$. Man betrachte etwa $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0$ für festes $r \in \mathbb{R}$.



Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt mit $g(\bar{x}) = 0$. Dann erhält man die <u>Tangentialfläche</u>

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g'(\bar{x})v = 2\bar{x}_1 v_1 + 2\bar{x}_2 v_2 + 2\bar{x}_3 v_3 = 0 \right\}.$$

Fall (c). Sei n beliebig und $m = 1$.



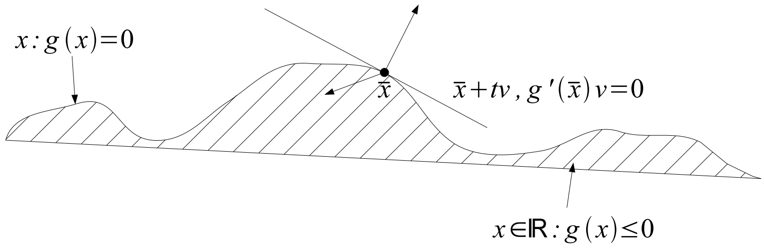
Im allgemeinen definiert man den Tangentialraum eines Punktes $\bar{x}$ durch

$$\left\{v \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g'(x)v = 0\right\}.$$

Wir werden später zeigen, dass es eine Kurve $x : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, gibt mit $g(x(t)) \equiv 0$ für alle $t \in [0, \alpha]$, $x(0) = \bar{x}$ und zugehörigem Tangentialvektor $v = \lim_{t \downarrow 0} \frac{x(t)-\bar{x}}{t}$.

(II) **Ungleichungen**. Man betrachte die zulässige Menge $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g(x) \leq 0\right\}$.

Fall (a). Sei $n = 2$ und $m = 1$.

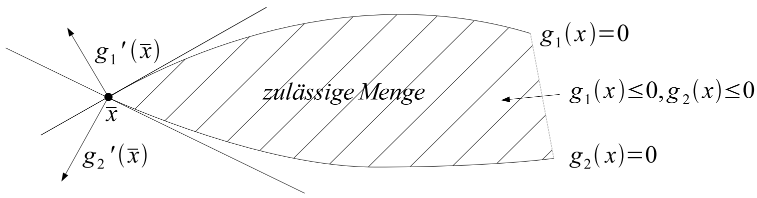


Der Tangentialraum in $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $g(\bar{x}) = 0$ lautet

$$\left\{v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g'(\bar{x})v \leq 0\right\}$$

und ist sowohl ein Halbraum als auch ein Kegel.

Fall (b). Sei $n = m = 2$.



Der Tangentialkegel in $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ lautet

$$\left\{v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g_1'(\bar{x})v \leq 0,\ g_2'(\bar{x})v \leq 0\right\}.$$

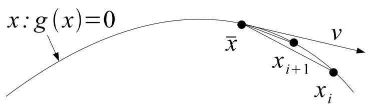
Im obigen Fall gilt $g_1'(\bar{x}) = g_2'(\bar{x}) = 0$, also $I(\bar{x}) = \{1, 2\}$.

§ 10.1 Allgemeine Theorie.

Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und $\bar{x} \in S$. Der Tangentialkegel $T(S, \bar{x})$ von S in $\bar{x} \in S$ ist definiert durch

$$T(S, \bar{x}) = \left\{v \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists x_i \in S, t_i > 0 : \lim_{i\to\infty} t_i = 0, v = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i - \bar{x}}{t_i}\right\}. \tag{10.1}$$

Veranschaulichung.



Schreibweise. Sei $v \in T(S, \bar{x})$. Dann lässt sich die Bedingung aus (10.1) umschreiben zu

$$x_i = \bar{x} + t_i v + r_i,\ r_i \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{t_i} = 0. \tag{10.2}$$

(10.3) Lemma. Für jede nichtleere Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in S$ ist der Tangentialkegel $T(S, \bar{x})$ ein abgeschlossener Kegel mit Spitze im Ursprung.

Beweis. Als Übungsaufgabe. Beweisidee: Mit $v \in T(S, \bar{x})$ ist auch $\alpha v \in T(S, \bar{x})$ für $\alpha \geq 0$. $\square$

(10.4) Lemma. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\bar{x} \in K$.

(i) Der Tangentialkegel $T(K,\bar{x})$ ist der Abschluss der konischen Hülle von K in $\bar{x}$,

$$T(K,\bar{x}) = \overline{K(\bar{x})} = \overline{\bigcup_{\alpha 0} \alpha(K-\bar{x})} = \overline{\left\{\alpha(x-\bar{x}) \,\middle|\, x \in K, \alpha > 0\right\}}.$$

(ii) Ist $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, dann gilt $\operatorname{int}(T(K,\bar{x})) = \operatorname{int}(K(\bar{x}))$.

Beweis.

(i) Wir zeigen beide Inklusionen.

"$\subset$". Sei $x \in K$ und $\alpha > 0$. Da K konvex ist und $x \in K$, folgt

$$x_i := \bar{x} + \frac{1}{i}\alpha(x-\bar{x}) \in K$$

für $i > \alpha$, denn dann gilt $\frac{1}{i}\alpha < 1$. Es folgt $\frac{x_i-\bar{x}}{1/i} = \alpha(x-\bar{x})$, also

$$v = a(x-\bar{x}) = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i-\bar{x}}{t_i}$$

mit $t_i := \frac{1}{i}$. Daher hat man $v = \alpha(x-\bar{x}) \in T(K,\bar{x})$ und es folgt $K(\bar{x}) \subset T(K,\bar{x})$. Da $T(K,\bar{x})$ bereits abgeschlossen ist, folgt die gewünschte Inklusion.

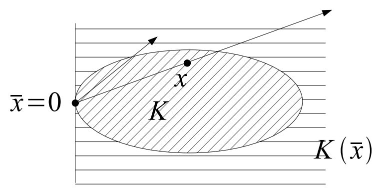
"$\supset$". Zu $v \in T(K,\bar{x})$ gibt es $x_i \in K$ und $t_i > 0$ mit $\lim_{i\to\infty} t_i = 0$ und $v = \lim_{i\to\infty} \underbrace{\frac{x_i-\bar{x}}{t_i}}_{\in K(\bar{x})}$. Daher gilt $v \in \overline{K(\bar{x})}$.

Durch den Nachweis beider Inklusionen ist die Aussage (i) gezeigt.

(ii) Als Übungsaufgabe.

Beispiele zu (10.4).

(1) Betrachte eine konvexe Menge K und $x \in K$.



In diesem Fall enthält $K(\bar{x})$ die Kante $x = 0$ nicht.

(2) Sei $K = I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$T(K,\bar{x}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } \bar{x} \in (a,b) \\ \left\{v \in \mathbb{R} \,\middle|\, v \geq a\right\}, & \text{falls } \bar{x} = a \\ \left\{v \in \mathbb{R} \,\middle|\, v \leq b\right\}, & \text{falls } \bar{x} = b \end{cases}.$$

(3) Sei A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Man betrachte $K = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = b\right\}$. Dann gilt $K(\bar{x}) = \ker A$. Da $\ker A$ abgeschlossen ist, gilt insbesondere schon $T(K,\bar{x}) = \ker A$.

(10.5) Satz (Variationsungleichung). Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $S \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $\bar{x} \in S$. Weiter sei f in $\bar{x}$ differenzierbar. Ist nun $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle des Problems $\min\{f(x) \mid x \in S\}$, so gilt die Variationsungleichung

$$f'(\bar{x})v \geq 0 \text{ für alle } v \in T(S, \bar{x}).$$

Beweis. Für $v \in T(S, \bar{x})$ gibt es eine Darstellung wie in (10.2), also $x_i = \bar{x} + t_i v + r_i$ mit $r_i = o(t_i)$, d.h. $\lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{t_i} = 0$. Man betrachtet die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \underbrace{o(||x_i - \bar{x}||)}_{=o(t_i)} \\ &= f(\bar{x}) + t_i f'(\bar{x})v + o(t_i) + o(t_i) = f(\bar{x}) + t_i f'(\bar{x})v + o(t_i) \end{aligned}$$

Da $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von $\min\{f(x) \mid x \in S\}$ ist, gilt $f(x_i) \geq f(\bar{x})$ wegen $x_i \in S$. Es folgt

$$0 \leq \frac{f(x_i) - f(\bar{x})}{t_i} = f'(\bar{x})v + \frac{o(t_i)}{t_i},$$

also im Grenzfall

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \frac{f(x_i) - f(\bar{x})}{t_i} = f'(x)v$$

für alle $v \in T(S, \bar{x})$. □

Anwendung. Man betrachte $\min\{f(x) \mid Ax = b\}$ für eine $m \times n$-Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^m$. die Variationsungleichung besagt $f'(\bar{x})v \geq 0$ für alle $v \in T(K, \bar{x})$. Da $T(K, \bar{x}) = \ker A$ ein Unterraum ist, gilt $v \in T(K, \bar{x}) \Rightarrow -v \in T(K, \bar{x})$ und man erhält

$$f'(\bar{x})v = 0 \,\forall v \in T(K, \bar{x}).$$

Dies bedeutet aber $T(K, \bar{x}) \perp \ker A$. Aus der Linearen Algebra kennt man den Zusammenhang $\ker A \oplus \operatorname{im} A^* = \mathbb{R}^n$, also gilt $\nabla f(\bar{x}) \in \operatorname{im} A^*$. Es gibt dann einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\nabla f(\bar{x}) = A^*(-\lambda^*) \iff f'(\bar{x}) + \lambda A = 0.$$

Dies ist gerade die KKT-Bedingung (i).

Sei nun $S \subset D$ gegeben durch $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k,\ g_i(x) = 0 \text{ für } i = k+1, \ldots, m\}$. Es gibt dann eine Darstellung

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K\}$$

mit $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$ und $g = (g_1, \ldots, g_m)^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Ausgehend davon wollen wir nun einen weiteren Kegel definieren, den linearisierenden Kegel. Dazu sei g differenzierbar in $\bar{x}$. Man linearisiert die Inklusion $g(x) \in K$ durch Taylorentwicklung zu $g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\underbrace{(x - \bar{x})}_{v} \in K$ und erhält

$$g'(\bar{x})v \in K - g(\bar{x}) \subset K(g(\bar{x})).$$

Nach dem Anhang gilt für $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$

$$\begin{aligned} K(g(\bar{x})) &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \leq \text{ falls } g_i(\bar{x}) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k,\ y_i = 0 \text{ für } i = k+1, \ldots, m\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \leq, i \in I(\bar{x}), y_i = 0, i = k+1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Der linearisierende Kegel ist nun definiert als

$$\begin{aligned} L(S, \bar{x}) &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid g_i'(\bar{x})v \leq 0, i \in I(\bar{x}),\ g_i'(\bar{x}) = 0, i = k+1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Zusammenhang zwischen $T(S, \bar{x})$ und $L(S, \bar{x})$.

(10.7) Lemma. Es gilt stets $T(S, \bar{x}) \subset L(S, \bar{x})$.

Beweis. Sei $v \in T(S, \bar{x})$ mit $v = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i - \bar{x}}{t_i}$, $x_i \in S$, $t_i > 0$ und $\lim_{i\to\infty} t_i = 0$. Mit Taylorentwicklung erhält man

$$g'(\bar{x})v = \lim_{i\to\infty} \underbrace{\frac{g(x_i) - g(\bar{x})}{t_i}}_{\in K(g(\bar{x}))} \in \overline{K(g(\bar{x}))} = K(g(\bar{x})).$$

(Letztere Aussage gilt hier speziell, i.A. jedoch nicht!) Es folgt $g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))$, also nach Definition (10.6) auch $v \in L(S, \bar{x})$. □

Bemerkung. Die Inklusion $L(S, \bar{x}) \subset T(S, \bar{x})$ ist im Allgemeinen falsch!

(10.8) Beispiel. Sei $S = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} = 0$. dann gilt $T(S, \bar{x}) = \{0\}$.

Fall (a). Setze $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$ und $g(x) = x^2$. Dann ist $S = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$ und es gilt

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R} \mid g'(\bar{x})v = 2\bar{x}v = 0\} = \mathbb{R}$$

wegen $\bar{x} = 0$. Der Ansatz ist ungünstig wegen $g'(\bar{x}) = 0$.

Fall (b). Setze $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$ und $g(x) = x$. Dann ist $S = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$ und es gilt

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R} \mid g'(\bar{x})v = v = 0\} = \{0\} = T(S, \bar{x})$$

wegen $g'(\bar{x}) = 1 \neq 0$. Eine wichtige Eigenschaft ist also offenbar $g'(\bar{x}) \neq 0$.

Ziel ist nun das Finden von Regularitätsbedingungen (constraint qualifications), die $T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x})$ sicherstellen.

Spezialfall. Wir betrachten Gleichungen. Sei also $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$, also $K = \{0\}$. Wir setzen voraus, dass $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\bar{x} \in S$ ist. Dann ist

$$g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} (x)$$

eine $m \times n$-Matrix. Der Punkt $\bar{x} \in S$ heißt nun <u>regulär</u>, wenn

$$\text{Die Gradienten } g_i u'(\bar{x}), i = 1, \ldots, m \text{ sind l.u., also } \operatorname{rang}(g'(\bar{x})) = m \text{ bzw. im } g'(\bar{x}) = \mathbb{R}^m. \tag{10.9}$$

Eine alternative Bedingung ist

(10.9a) $g'(\bar{x})g'(\bar{x})^* \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ ist regulär.

Insbesondere ist dann $g'(\bar{x})g'(\bar{x})^*$ sogar schon positiv definit.

(10.10) Lemma. Es gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) $\bar{x} \in S$ ist regulär.

(ii) Es gibt einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda \neq 0$ und $\lambda g'(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i'(\bar{x}) = 0$.

Beweis. Dies ist ein einfaches Resultat aus der Linearen Algebra. □

(10.11) Satz. sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ und sei $\bar{x} \in S$ regulär.

(i) Zu $v \in \mathbb{R}^n$ mit $g'(\bar{x})v = 0$, d.h. $v \in L(S, \bar{x})$, gibt es ein $\alpha > 0$ und eine Kurve $x : [-\alpha, \alpha] \to S$ mit $g(x(t)) = 0$ für alle $t \in [-\alpha, \alpha]$ sowie $x(0) = \bar{x}$ und $v = \lim_{t\to 0} \frac{x(t)-\bar{x}}{t}$.

(ii) Es gilt $T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x})$.

Beweis. Man betrachte die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, F(y,t) := g(\bar{x} + tv + g'(\bar{x})^* y).$$

Ziel ist die Bestimmung eines $y = y(t)$ mit $F(y(t), t) = 0$ für alle $t \in [-\alpha, \alpha]$ für ein $\alpha > 0$. Zunächst gilt $F(0_m, 0) = 0$. Es gilt weiter

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0_m, 0) = g'(\bar{x})g'(\bar{x})^* \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$$

ist regulär, da $\bar{x}$ regulär ist (vgl (10.9a)). Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also zunächst ein solches $\alpha > 0$ und eine Kurve $y : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^m$ mit $F(y(t), t) = 0$ für alle $t \in [-\alpha, \alpha]$. Dann genügt die Kurve

$$x : [-\alpha, \alpha] \to S, x(t) := \bar{x} + tv + g'(\bar{x})^* y(t)$$

der Behauptung (i): Aus $F(y(t), t) = 0$ für alle $t \in [-\alpha, \alpha]$ folgt nämlich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} F(y(t), t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(\bar{x} + tv + g'(\bar{x})^* y(t))\Big|_{t=0} \\ &= \underbrace{g'(\bar{x})v}_{=0} + g'(\bar{x})g'(\bar{x})^* \frac{d}{dt} y(t)\Big|_{t=0} \\ &= g'(\bar{x})g'(\bar{x})^* \frac{dy}{dt}(0) \end{aligned}$$

Da $g'(\bar{x})g'(\bar{x})^*$ regulär ist, gilt

$$\frac{dy}{dt}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t} = 0$$

und es folgt $\lim_{t\to 0} \frac{x(t)-\bar{x}}{t} = 0$. Dies zeigt Aussage (i). Aussage (ii) folgt direkt aus (i), denn man sieht $v \in L(S, \bar{x}) \Rightarrow v \in T(S, \bar{x})$ und damit $T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x})$. □

Regularitätsbedingungen (allgemeiner Fall).

Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K\}$ und $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\} \subset \mathbb{R}^m$. Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heißt regulär, wenn

$$\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m \tag{10.12}$$

gilt. Dies geht zurück auf Robinson (1975) und Kurcyusz, Zowe (1979).

(10.13) Lemma. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m$.

(ii) $O_m \in \operatorname{int}(\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) - K(g(\bar{x})))$.

(iii) $O_m \in \operatorname{int}(\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) + g(\bar{x}) - K)$.

Beweis. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Die Menge $\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) + g(\bar{x}) - K$ ist konvex und enthält $0_m \in \mathbb{R}^m$. Angenommen, es gilt $O_m \notin \operatorname{int}(\operatorname{Im}(g'(\bar{x}) + g'(\bar{x}) - K))$. Nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \neq 0$, mit

$$\lambda(g'(\bar{x})v + g(\bar{x}) - y) \leq \lambda \cdot 0_m = 0$$

für ale $v \in \mathbb{R}^n$ und $y \in K$. Multiplikation mit $\alpha \geq 0$ ergibt

$$\lambda(g'(\bar{x})v - y) \geq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, y \in K(g(\bar{x})) \tag{10.14}$$

und es folgt $\lambda z \geq 0$ für alle $z \in \operatorname{Im}(g'(\bar{x})) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m$. Dann muss schon $\lambda = 0$ gelten. Widerspruch!

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*. Wegen $K - g(\bar{x}) \subset K(g(\bar{x}))$ klar.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Nach Voraussetzung gibt es ein $r > 0$ mit

$$B_r(0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, ||y||_2 \le r \right\} \subset \underbrace{\mathrm{Im}\,(g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})))}_{\text{ist ein konvexer Kegel}}.$$

Es folgt also insbesondere

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{\alpha \ge 0} \alpha B_r(0) \subset \mathrm{Im}\,(g(\bar{x})) - K(g(\bar{x})).$$

Es muss also schon $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}\,(g(\bar{x})) - K(g(\bar{x}))$ gelten. □

(10.15) Folgerung. Ein Punkt $\bar{x} \in S$ ist genau dann nicht regulär, wenn gilt, dass es einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $\lambda \neq 0_m$ und

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0, \quad \lambda(-y) \neq 0 \,\forall y \in K(g(\bar{x})).$$

Beweis. Man betrachte (10.14) für $v \in \mathbb{R}^n$ und $y = 0$ sowie $v = 0$ und $y \in K(g(\bar{x}))$. □
Die Folgerung (10.15) bedeutet für $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$:

$$(10.15a) \begin{cases} \lambda g'(\bar{x}) = 0 & \\ \lambda_i \ge 0, & i \in I(\bar{x}) \\ \lambda_i = 0, & i \notin J(\bar{x}) \end{cases}$$

Man kann sich weiter die Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz anschauen:

$$(10.16) \begin{cases} g_i'(\bar{x}), i = k+1, \dots, m, \text{ sind linear unabhängig} \\ \exists v_0 \in \mathbb{R}^n : g_i'(\bar{x})v_0 < 0, i \in I(\bar{x}) \text{ und } g_i'(\bar{x})v_0 = 0, i = k+1, \dots, m \end{cases}$$

Bemerkung. Die Bedingungen (10.13) und (10.16) sind äquivalent.

Beweis. Es sei $K = \mathbb{R}^k_-$ und ohne Einschränkung sei $I(\bar{x}) = \{1, \dots, s\}$ mit $1 \le s \le k$.

“(10.16) $\Rightarrow$ (10.13)”. Es gibt $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i'(\bar{x})v_0 < 0$ für $i = 1, \dots, s$ und $g_i(\bar{x}) < 0$ für $i = s+1, \dots, k$. Daher kann $||v_0||_2$ so klein gewählt werden, dass

$$g_i(\bar{x}) + g_i'(\bar{x})v_0 < 0$$

für $i = 1, \dots, k$ gilt. Es folgt dann

$$0_k \in \mathrm{int} \left\{ \begin{pmatrix} g_1'(\bar{x})v_0 & + & g_1(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k'(\bar{x})v_0 & + & g_k(\bar{x}) \end{pmatrix} - \mathbb{R}^k_- \right\}.$$

Damit folgt in (10.13) die Aussage (iii) für die Komponenten $i = 1, \dots, k$. Außerdem hat man

$$O_{m-k} \in \mathrm{int} \left(\mathrm{Im} \left(\begin{pmatrix} g_{k+1}'(\bar{x}) \\ \vdots \\ g_m'(\bar{x}) \end{pmatrix} \right) - \{0_{m-k}\} \right),$$

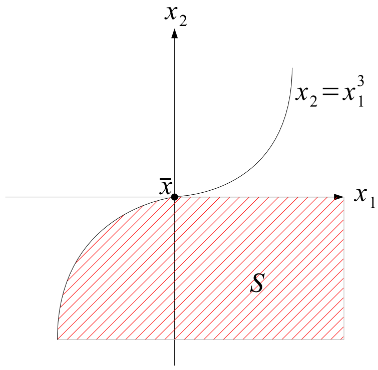
da $g_{k+1}'(\bar{x}), \dots, g_m'(\bar{x})$ linear unabhängig sind. Insgesamt erhält man also

$$0_m \in \mathrm{int}(\mathrm{Im}\,(g(\bar{x})) + g(\bar{x}) - K).$$

Es ist also $\bar{x} \in S$ regulär im Sinne von (10.12).

“(10.13) $\Rightarrow$ (10.16)”. Ähnlich wie oben. □

Beispiel. Sei $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^3 \leq 0,\, g_2(x_1, x_2) = x_2 \leq 0\}$.

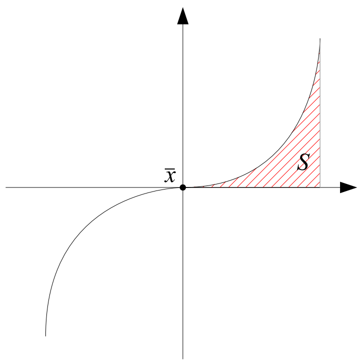


Man setze $\bar{x} = (0,0)^T$. Dann hat man $g_i'(\bar{x}) = (0,1)$ für $i = 1,2$. Die $g_i'(\bar{x})$ sind also linear abhängig. Es gilt $I(\bar{x}) = \{1,2\}$. Wählt man etwa $v_0 = (0,-1)$, dann genügt wegen

$$g_1'(\bar{x})v_0 = g_2'(\bar{x})v_0 = (0,1)(0,-1)^T = -1 < 0$$

der Punkt $\bar{x}$ der Bedingung (10.16), ist also regulär. $\bar{x}$ ist jedoch nicht normal!

Wir ändern nun S ab zu $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g_1(x) = x_2 - x_1^3 \leq 0,\, g_2(x) = -x_2 \leq 0\}$.



Nun gilt $g_1'(\bar{x}) = (0,1)$ und $g_2'(\bar{x}) = (0,-1)$. Es gibt also kein $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $g_i'(\bar{x})v_0 < 0$ für $i = 1,2$. Damit ist der Punkt $\bar{x}$ nicht mehr regulär! In diesem Fall haben wir $T(S,\bar{x}) = \{v = (v_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, v_1 \geq 0\}$, es gilt aber

$$L(S,\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, g_1'(\bar{x})v = v_2 \leq 0,\, g_2'(\bar{x})v = -v_2 \leq 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, v_2 = 0, v_1 \in \mathbb{R}\},$$

insbesondere also $T(S,\bar{x}) \subsetneq L(S,\bar{x})$.

(10.17) Satz. Sei $\bar{x} \in S$ regulär mit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g(x) \in K\}$ und $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$.

(i) Zu $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i'(\bar{x})v_0 < 0$ für alle $i \in I(\bar{x})$ und $g_i'(\bar{x}) = 0$ für alle $i = k+1, \ldots, m$ gibt es ein $\alpha > 0$ und eine Kurve $x : [0,\alpha] \to S$ mit

$$x(0) = \bar{x}, \quad v_0 = \lim_{t \to 0+} \frac{x(t) - \bar{x}}{t}.$$

(ii) Es gilt $T(S,\bar{x}) = L(S,\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\}$.

Beweis.

(i) Im Falle $k = m$ (keine Gleichungen) setze man $x(t) = \bar{x} + tv_0$ für $0 \leq t \leq \alpha$ und $\alpha > 0$ genügend klein.

Sei also $k < m$. Nach (10.11) (i) gibt es ein $\alpha > 0$ und eine Kurve $x : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$x(0) = \bar{x}, \quad g_i(x(t)) = 0 \text{ für } i = k+1, \ldots, m, \quad v_0 = \lim_{t \to 0} \frac{x(t) - \bar{x}}{t}.$$

Mit Taylorentwicklung für $i = 1, \ldots, k$ ergibt sich

$$g_i(x(t)) = g_i(\bar{x}) + t g_i'(\bar{x}) v_0 + o(t).$$

Nun gilt für alle $i = 1, \ldots, k$ schon $g_i(x(t)) < 0$ für $0 < t < \alpha$ mit $\alpha > 0$ genügend klein: Für $i \in I(\bar{x})$ gilt $g_i(\bar{x}) = 0$ und $g_i'(\bar{x})v_0 < 0$, woraus die Behauptung für diese i folgt. Für $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus I(\bar{x})$ gilt $g_i(\bar{x}) < 0$, woraus ebenfalls die Behauptung für diese i folgt.

(ii) Sei $v \in L(S, \bar{x}) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g_i'(\bar{x})v \leq 0 \,\forall i \in I(\bar{x}),\ g_i'(\bar{x})v = 0 \,\forall i = k+1, \ldots, m \right\}$. Nach (10.16) existiert dann ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit den Bedingungen wie in (i). Man setze nun

$$v_\alpha := \alpha v_0 + (1 - \alpha) v$$

mit $0 < \alpha < 1$. Dann erhält man für $i \in I(\bar{x})$

$$g'i'(\bar{x})v_\alpha = \alpha \underbrace{g_i'(\bar{x})v_0} < 0 + (1 - \alpha) \underbrace{g_i'(\bar{x})v} \leq 0 < 0$$

und für $i = k+1, \ldots, m$ gilt $g_i'(\bar{x})v_\alpha = 0$. Nach (i) gilt auch $v_\alpha \in T(S, \bar{x})$ für alle $0 < \alpha < 1$. Damit folgt

$$v = \lim_{a \to 0} v_\alpha \in T(S, \bar{x}),$$

weil $T(S, \bar{x})$ abgeschlossen ist. Also gilt $L(S, \bar{x}) \subset T(S, \bar{x})$ und wegen $T(S, \bar{x}) \subset L(S, \bar{x})$ nach (10.7) folgt die Gleichheit. $\square$

§ 11 Die notwendigen Optimalitätsbedingungen von John und Karush-Kuhn-Tucker.

Man betrachte das Optimierungsproblem

$$\min\left\{f(x)\,\middle|\,g(x)\in K\right\} \tag{11.1}$$

mit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^m$, D offen und $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$. Vorausgesetzt sei stets, dass $\bar{x} \in S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g(x) \in K\right\}$ eine lokale Minimalstelle von (11.1), f in $\bar{x}$ differenzierbar und g in einer Umgebung von $\bar{x}$ stetig differenzierbar sei.

Methoden und Ideen.

- Linearisierung von f und g in $\bar{x} \in S$.
- Variationsungleichung $f'(\bar{x})v \geq 0$ für alle $v \in T(S, \bar{x})$.
- Für reguläres $\bar{x}$ gilt $T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x})$, es folgt $f'(\bar{x})v \geq 0$ für alle $v \in L(S, \bar{x})$.
- Trennungssatz für konvexe Mengen.

Motivation. Ist $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle, so gibt es eine Umgebung U von $\bar{x}$ mit

$$\left\{\begin{pmatrix} f(x)-f(\bar{x}) \\ g(x)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \middle| x \in U\right\} \cap \left\{\begin{pmatrix} r \\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \middle| r<0, y\in K\right\} = \emptyset.$$

Daher ist der Nullpunkt $(0, 0_m)^* \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ ein Randpunkt der Differenzmenge

$$B := \left\{\begin{pmatrix} f(x)-f(\bar{x})+r \\ g(x)-y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \middle| xinU, r\geq 0, y\in K\right\}. \tag{11.2}$$

Man beachte, dass B im Allgemeinen nicht konvex ist. Daher betrachte man eine Approximation von B durch Linearisierung:

$$B \rightsquigarrow \tilde{B} := \left\{\begin{pmatrix} f'(\bar{x})v+r \\ g'(\bar{x})v+g(\bar{x})-y\end{pmatrix} \middle| v\in\mathbb{R}^n, r\geq 0, y\in K\right\}.$$

Für die konische Hülle von $\tilde{B}$ gilt

$$A = \left\{\begin{pmatrix} f'(\bar{x})v+r \\ g'(\bar{x})v-y\end{pmatrix} \middle| v\in\mathbb{R}^n, r\geq 0, y\in K(g(\bar{x}))\right\}. \tag{11.3}$$

Idee. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen sind äquivalent zur Aussage, dass $(0, 0_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ Randpunkt des konvexen Kegels A ist.

Erinnerung. $\bar{x} \in S$ heißt regulär, wenn $\operatorname{Im}(g)'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m$ gilt. Als Folgerung erhält man, dass $\bar{x} \in S$ genau dann nicht regulär ist, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit $\lambda g'(\bar{x}) = 0$ und $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$ gibt.

(11.4) Satz. Sei $\bar{x} \in S$ eine lokale Minimalstelle.

(i) (Notwendige Bedingungen von John) Es gibt einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ mit $(\lambda_0, \lambda) \neq 0_{m+1}$ und

  (a) $\lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = \lambda_0 f'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i'(\bar{x}) = 0$.

  (b) (1) $\lambda_0 \geq 0$ und $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$.

   (2) $\lambda_0 \geq 0$ und $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K$ sowie $\lambda g(\bar{x}) = 0$ (Komplementarität).

   (3) Für $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$ gilt $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ für alle $i \in I(\bar{x})$ sowie $\lambda_i = 0$ falls $g_i(\bar{x}) < 0$.

(ii) (Notwendige Bedingungen von Karush-Kuhn-Tucker) Ist $\bar{x} \in S$ regulär, dann gilt $\lambda_0 > 0$ in (i). Daher kann $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden. Also gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (nicht notwendig $\lambda \neq 0_m$) mit

  (a) $f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0$.

  (b) $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$.

Beweis. Wir beweisen (i) und (ii) zusammen.

1. Fall Ist $\bar{x}$ nicht regulär, so sind die Aussagen mit (10.15) klar, da man $\lambda_0 = 0$ setzen kann.

2. Fall Sei also $\bar{x}$ regulär. Die Variationsungleichung (10.5) besagt $f'(\bar{x})v \geq 0$ für alle $v \in T(S,\bar{x})$ und es folgt

$$T(S,\bar{x}) = L(S,\bar{x}) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x})) \right\}$$

mit (10.17) (ii), weil $\bar{x}$ regulär ist. Somit ist $(0, 0_m)$ ein Randpunkt des konvexen Kegels (11.3). Aus dem Trennungssatz (A.6) für konvexe Kegel folgt die Existenz eines $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ mit $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$ und

$$(\lambda_0, \lambda) \begin{pmatrix} f'(\bar{x})v + r \\ g'(\bar{x})v - y \end{pmatrix} \geq 0 \,\forall v \in \mathbb{R}^n, r \geq 0, y \in K(g(\bar{x})).$$

Dies bedeutet $\lambda_0(f'(\bar{x})v + r) + \lambda(g'(\bar{x})v - y) \geq 0$.

- Setze $r = 0$, $y = 0$. Dann gilt $\lambda_0 f'(\bar{x})v + \lambda g'(\bar{x})v = (\lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}))v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Es folgt $\lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0$.
- Setze $r = 0$, $v = 0$. Dann folgt $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$.
- Setze $v = 0$, $y = 0$. Dann erhält man $\lambda_0 r \geq 0$ für alle $r \geq 0$, also $\lambda_0 \geq 0$.

Aus letzterem erhält man, da $\bar{x}$ regulär ist, schon $\lambda_0 > 0$ mit (10.15). Mit dem Übergang $\lambda \to \frac{\lambda}{\lambda_0}$ kann man $\lambda_0 = 1$ setzen. Damit folgt dann (ii). Schließlich überlegen wir noch die Äquivalenz der Aussagen (1) bis (3):

(1) $\iff$ **(2).** Da K ein konvexer Kegel ist, gilt

$$K(g(\bar{x})) = K + \mathbb{R}g(\bar{x}) = \left\{ y + rg(\bar{x}) \,\middle|\, y \in K, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

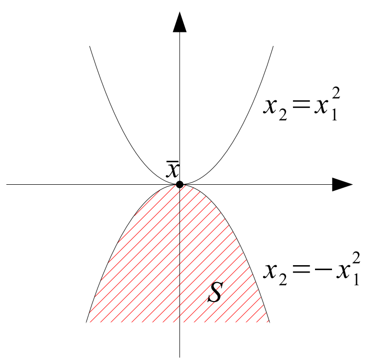
Daher gilt

$$\lambda(-y) \geq 0 \,\forall y \in K(g(\bar{x})) \iff \lambda(-y) \geq 0 \,\forall y \in K, \lambda g(\bar{x}) = 0.$$

(1) $\iff$ **(3)** Klar wegen $K(g(\bar{x})) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, y_i \leq 0 \,\forall i \in I(\bar{x}),\, y_i = 0 \,\forall i = k+1, \ldots, m \right\}$.

□

Beispiel. Man betrachte $\min\left\{ f(x) = -x_2 \,\middle|\, g_1(x) = x_2 + x_1^2 \leq 0, g_2(x) = x_2 - x_1^2 \leq 0 \right\}$, also das Problem, x_2 zu maximieren.



Es ist $\bar{x} = (0,0)^*$ die globale Minimalstelle. $\bar{x}$ ist regulär, denn wegen $g_1'(\bar{x}) = g_2'(\bar{x}) = (0,1)$ gilt $g_i'(\bar{x})v_0 < 0$, $i = 1,2$, für $v_0 = (0,-1)^* \in \mathbb{R}^2$. Man beachte, dass $\bar{x}$ nicht normal ist. Zunächst setze man $\lambda_0 = 1$ in den KKT-Bedingungen (11.4) (ii). Dann ergeben sich für $\lambda \in \mathbb{R}^2$ die Bedingungen

$$f'(\bar{x}) + \lambda_1 g_1'(\bar{x}) + \lambda_2 g_2'(\bar{x}) = (0, -1 + \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$$

und $\lambda \geq 0$, weil $I(\bar{x}) = \{1,2\}$ gilt. Die Menge der Langrange-Multiplikatoren ist also gegeben durch

$$\Lambda(\bar{x}) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Diese Menge ist konvex und kompakt, jedoch nicht einpunktig!

Wir definieren nun die Langrange-Funktion

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda g(x) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{11.5}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^m$ bzw.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) \tag{11.6}$$

für den Fall $\lambda_0 = 1$. Dann besagen die Bedingungen von (11.4)

$$L_x(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) = \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0$$

bzw. entsprechend für $\lambda_0 = 1$

$$L_x(\bar{x}, \lambda) = f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0.$$

Die Menge der Lagrange-Multiplikatoren

$$\Lambda(\bar{x}) = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, L_x(\bar{x}, \lambda) = 0,\ \lambda(-y) \geq 0\, \forall y \in K(g(\bar{x}))\right\} \tag{11.7}$$

ist konvex und abgeschlossen.

(11.8) Satz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\bar{x} \in S$ ist regulär.

(ii) $\Lambda(\bar{x})$ ist nichtleer und beschränkt.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Die Aussage $\Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$ folgt aus (11.4) (ii), da $\bar{x}$ regulär ist. Angenommen, $\Lambda(\bar{x})$ sei nicht beschränkt. Dann gibt es eine Folge $\left\{\lambda^i\right\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Lambda(\bar{x})$ mit $\lim_{i \to \infty} \left|\left|\lambda^i\right|\right| = \infty$. Nach Definition von $\Lambda(\bar{x})$ gilt

$$f'(\bar{x}) + \lambda^i g'(\bar{x}) = 0 \text{ und } \lambda^i(-y) \geq 0\, \forall y \in K(g(\bar{x})).$$

Es folgt

$$\frac{1}{||\lambda^i||} f'(\bar{x}) + \frac{\lambda^i}{||\lambda^i||} g'(\bar{x}) = 0 \text{ und } \frac{\lambda^i}{||\lambda^i||}(-y) \geq 0\, \forall y \in K(g(\bar{x}))$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung existiere $\lambda := \lim_{i \to \infty} \frac{\lambda^i}{||\lambda^i||}$, da die Einheitskugel kompakt in $\mathbb{R}^m$ ist. Im Limes gilt daher

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0 \text{ und } \lambda(-y) \geq 0\, \forall y \in K(g(\bar{x}))$$

und $\lambda \neq 0$. Nach (10.15) ist dies äquivalent dazu, dass $\bar{x}$ nicht regulär ist. Widerspruch!

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\lambda^1 \in \Lambda(\bar{x})$, da $\Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$ nach Voraussetzung. Angenommen, $\bar{x}$ sei nicht regulär. Dann gibt es nach (10.15) ein $\lambda \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0 \text{ und } \lambda(-y) \geq 0\, \forall y \in K(g(\bar{x})).$$

Es gilt also

$$f'(\bar{x}) + (\lambda^1 + \alpha\lambda) g'(\bar{x}) = \underbrace{f'(\bar{x}) + \lambda^1 g'(\bar{x})}_{=0} + \underbrace{\alpha\lambda g'(\bar{x})}_{=0} = 0$$

sowie

$$(\lambda^1 + \alpha\lambda)(-y) = \lambda^1(-y) + \alpha\lambda(-y) \geq 0$$

für alle $y \in K(g(\bar{x}))$ und $\alpha \geq 0$. Folglich hat man $\lambda^1 + \alpha\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ und $\Lambda(\bar{x})$ ist nicht beschränkt. Widerspruch! $\square$

(11.9) Folgerung. Ist $\bar{x} \in S$ regulär, so ist $\Lambda(\bar{x})$ in (11.7) eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

Bemerkung. Diese Folgerung ist wichtig für die Störungstheorie, also für die Abhängigkeit der Lösungen von Parametern.

Ziel. Gesucht sind Bedingungen dafür, dass $\Lambda(\bar{x})$ einpunktig ist, also dass λ eindeutig bestimmt ist.

Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heißt normal, wenn gilt

$$\begin{cases} K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\} : g_i'(\bar{x}), i \in J(\bar{x}) \text{ linear unabhängig} \\ \operatorname{Im}(g'(\bar{x})) - V = \mathbb{R}^m, \text{ wobei } V = K(g(\bar{x})) \cap (-K(g(\bar{x}))) \end{cases} \tag{11.10}$$

Hierbei ist V der größte in $K(g(\bar{x}))$ enthaltene lineare Unterraum. Für $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0_{m-k}\}$ ist

$$K(g(\bar{x})) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, y_i \leq 0 \forall i \in I(\bar{x}),\, y_i = 0 \forall i = k+1, \dots, m \right\}.$$

Es folgt

$$V = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, y_i = 0 \forall i \in J(\bar{x}) \right\}.$$

(11.11) Lemma. Ist $\bar{x} \in S$ normal, so ist $\Lambda(\bar{x})$ einpunktig.

Beweis. Wegen $V = K(g(\bar{x})) \cap (-K(g(\bar{x})))$ gilt

$$\operatorname{Im}(()\, g'(\bar{x})) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m,$$

also ist $\bar{x}$ regulär. Insbesondere gilt $\Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$, wenn $\bar{x}$ normal ist. Seien nun $\lambda^1, \lambda^2 \in \Lambda(\bar{x})$. Nach Definition gilt dann

$$f'(\bar{x}) + \lambda^i g'(\bar{x}) = 0 \text{ und } \lambda^i(-y) \geq 0$$

für alle $y \in K(g(\bar{x}))$ und $i = 1, 2$. Setze $\lambda := \lambda^1 - \lambda^2$, so ergibt sich

$$\lambda g'(\bar{x}) = (\lambda^1 - \lambda^2) g'(\bar{x}) = 0.$$

Man überlege sich, dass $(\lambda^1 - \lambda^2)(-y) = 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x})) \cap (-K(g(\bar{x})))$ gilt. Draaus erhält man $\lambda(g'(\bar{x})v - y) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $y \in V$. Da $\bar{x}$ normal ist, also $\operatorname{Im}(()\, g'(\bar{x})) - V = \mathbb{R}^m$ gilt, folgt schon $\lambda = 0$, also $\lambda^1 = \lambda^2$. □

Bemerkungen zur Numerik. Sei $\bar{x} \in S$ normal und sei $m_0 := \#(J(\bar{x}))$. Die KKT-Bedingungen stellen $n + m_0$ Gleichungen für $n + m_0$ Unbekannte $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ und $(\lambda_i)_{i \in J(\bar{x})}$ dar:

$$f'(\bar{x}) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \lambda_i g_i'(\bar{x}) = 0 \text{ und } g_i(\bar{x}) = 0 \, \forall i \in J(\bar{x}).$$

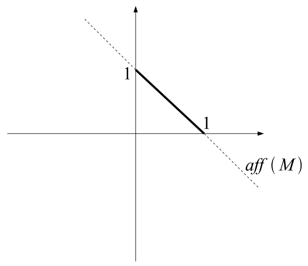
Man wende also das Newton-Verfahren an: Die Funktionalmatrix ist regulär, wenn die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung (Second-Order Sufficient Conditions) erfüllt sind, vgl. §12.

Numerische Schwiergkeit. $J(\bar{x})$ ist im Allgemeinen nicht bekannt. $J(\bar{x})$ wird etwa im SQR-Verfahren (Sequential Quadratic Programming) iterativ bestimmt.

A Konvexe Mengen und Trennbarkeit

Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sei $\operatorname{span}(M)$ der kleinste M enthaltende lineare Teilraum von $\mathbb{R}^n$ und $\operatorname{aff}(M)$ sei der kleinste M enthaltende affine Teilraum von $\mathbb{R}^n$. Dann hat man $\operatorname{aff}(M) = x + U$ mit $x \in M$ und U geeigneter linearer Teilraum.
Weiter bezeichne $\mathring{M} = \operatorname{int}(M)$ das topologische Innere von M bezüglich $\mathbb{R}^n$ und M^i das relative topologische Innere von M bezüglich $\operatorname{aff}(M)$. Schließlich sei $\partial M = \bar{M} - \mathring{M}$ der Rand von M mit $\bar{M}$ der Abschluss von M.

Beispiele. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 1,\, x_1, x_2 \geq 0\}$.



Dann gilt $\operatorname{span}(M) = \mathbb{R}^2$ und $\operatorname{aff}(M) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 1\}$. Weiter hat man $\mathring{M} = \operatorname{int}(M) = \emptyset$, aber $M^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 1,\, x_1, x_2 > 0\}$.

(A.1) Definition.

(i) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$ für alle $x, y \in K$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt.

(ii) Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

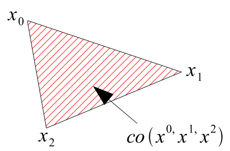
$$\operatorname{co}(M) = \bigcap \{M \subset K, K \text{ konvex }\}$$

die konvexe Hülle von M. $\operatorname{co}(M)$ ist die kleinste M enthaltende konvexe Menge.

(iii) Für Vektoren $x^0, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{co}(x^0, \dots, x^n) := \operatorname{co}(\{x^0, \dots, x^n\})$$

das von $x^0, \dots, x^n$ aufgespannte Simplex. Sind die Vektoren $x^1 - x^0, \dots, x^n - x^0$ linear unabhängig, so heißt das Simplex nicht entartet.



(iv) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt Kegel (mit Spitze im Ursprung), wenn für alle $x \in K$ der positive Halbstrahl $\{\alpha x \,|\, \alpha \geq 0\}$ in K liegt.

(v) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und sei $x \in M$. Der Kegel $M(x) := \{\alpha(y - x) \,|\, y \in M, \alpha \geq 0\}$ heißt die konische Hülle von M bezüglich x mit $M(x) = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha(M - x)$.

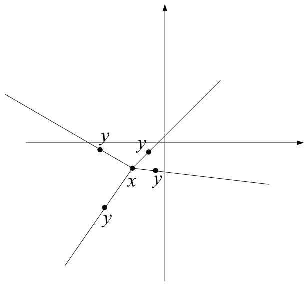
Beispiele. Sei A eine $m \times m$-Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Sei weiter $K := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b\}$. Dann ist K konvex. Für $b = 0 \in \mathbb{R}^m$ ist $K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq 0\}$ ein konvexer Kegel. Für $A = I_m$ Einheitsmatrix und $b = 0$ ist

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \leq 0 \text{d.h. } x_i \leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

der konvexe Standardkegel. Bezeichnung: $\mathbb{R}^n_-$.

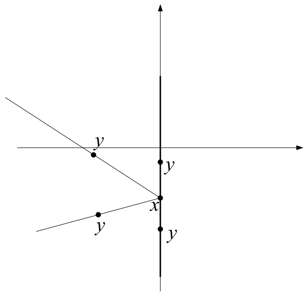
Berechnung der konischen Hülle. Sei $n = 2$.

1. Fall $x \in \mathbb{R}^2_-$ mit $x_1, x_2 < 0$.



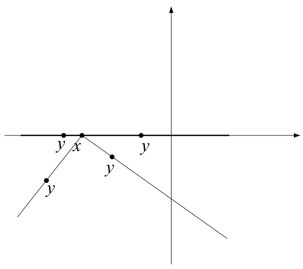
Für $x \in \operatorname{int}(K)$ gilt also $K(x) = \mathbb{R}^2$.

2. Fall $x \in \mathbb{R}^2_-$ mit $x_1 = 0$ und $x_2 < 0$.



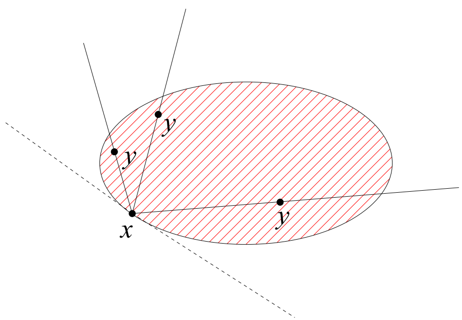
Für $x = (0, x_2) \in K$ gilt also $K(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq 0\}$.

3. Fall $x \in \mathbb{R}^2_-$ mit $x_1 < 0$ und $x_2 = 0$.



Für $x = (x_1, 0) \in K$ gilt also $K(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 \leq 0\}$.

Beispiel. $M =$ Kreisscheibe, $x \in \partial M$. Dann ist $M(x)$ nicht abgeschlossen, denn die Tangente an M in $x \in M$ ist nicht enthalten.



(A.2) Lemma.

(i) Der Durchschnitt einer Familie konvexer Mengen ist konvex.

(ii) Sind $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist die Menge

$$\alpha K_1 + \beta K_2 = \{\alpha x + \beta y \mid x \in K_1, y \in K_2\}$$

konvex für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Die konvexe Hülle einer beliebigen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\operatorname{co}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \,\Big|\, x_i \in M, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, k \right\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ variiert.

(iv) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, dann sind $\bar{K}$, $\mathring{K} = \operatorname{int}(K)$ und K^i konvex.

(v) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $x \in \mathring{K}$ und $y \in barK$, so gilt

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in \mathring{K}$$

für alle $\alpha \in [0, 1)$.

(vi) Für eine konvexe Menge K mit $\mathring{K} \neq \emptyset$ gilt $\operatorname{int}(\bar{K}) = \operatorname{int}(K)$.

(vii) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn

$$\alpha K + \beta K = \{\alpha x + \beta y \mid x, y \in K\} \subset K$$

für alle $\alpha, \beta \geq 0$ gilt.

(viii) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel, so ist die konische Hülle von K bezüglich $x \in K$ gegeben durch

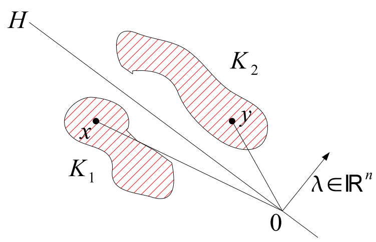
$$K(x) = K + \mathbb{R}x = \{y + rx \mid y \in K, r \in \mathbb{R}\}.$$

Für $K = \mathbb{R}^n_-$ und $x \in K$ gilt

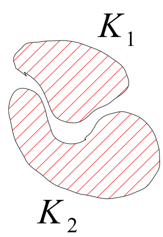
$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_i \leq 0 \text{ falls } x_i = 0\}.$$

(A.3) Definition. Zwei Teilmengen $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ heißen <u>trennbar</u> durch eine Hyperebene, wenn es einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft $\lambda x \leq \alpha \leq \lambda y$ für alle $x \in K_1$ und $y \in K_2$. Die Hyperebene $H := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \lambda z = \alpha\}$ heißt <u>trennende Hyperebene</u>. Die Mengen K_1 und K_2 heißen <u>echt trennbar</u>, wenn $K_1 \cup K_2$ nicht in H enthalten ist.

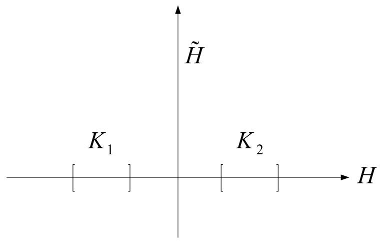
Beispiele. Im folgenden Bild ist λ eine Normale bezüglich H, es gilt $\lambda x \leq 0 \leq \lambda y$ bzw. sogar schon $\lambda x < 0 < \lambda y$ für alle $x \in K_1$ und $y \in K_2$.



Die folgenden Mengen K_1 und K_2 sind nicht (durch eine Hyperebene) trennbar:



Die folgenden Mengen K_1 und K_2 heißen echt trennbar bezüglich $\tilde{H}$ (x_2-Achse), aber nicht echt trennbar bezüglich H, wegen $K_1 \cup K_2 \subset H$ (x_1-Achse):

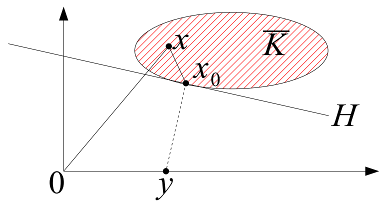


Die Hyperebene H (im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt) definiert die Halbräume

$$H^+ = \left\{z \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \lambda_z \geq \alpha\right\}, \quad H^- = \left\{z \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \lambda z \leq \alpha\right\}.$$

Damit gilt $K_1 \subset H^-$ und $K_2 \subset H^+$.

(A.4) Trennungssatz. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe Menge und sei $y \notin \mathring{K}$. Dann sind die Mengen $\{y\}$ und K trennbar, d.h. es gibt $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\lambda y \leq \lambda x$ für alle $x \in K$. Ist $\mathring{K} \neq \emptyset$, dann sind $\{y\}$ und $\mathring{K}$ echt trennbar, d.h. es gilt $\lambda y < \lambda x$ für alle $x \in \mathring{K}$.



Beweis.

1. Fall Sei $y \notin \bar{K}$. Dann gilt $d := \inf_{x\in\bar{K}} ||y - x||_2 > 0$. Die Funktion $f(x) = ||x - y||_2$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ist stetig und nimmt daher auf der kompakten Menge

$$\bar{K} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, ||x - y||_2 \leq 2d\right\}$$

ein (globales) Minimum in $x_0 \in \bar{K}$ an. Es gilt dann

$$d = \inf_{x\in\bar{K}} ||x - y||_2 = \min_{x\in\bar{K}} ||x - y||_2 = ||x_0 - y||_2 > 0.$$

Behauptung: $\lambda := (x_0 - y)^* \neq 0$ erfüllt die Behauptung des Satzes. Sei dazu $x \in K$ beliebig. Wegen der Konvexität von K gilt $x_0 + s(x - x_0) \in \bar{K}$ für alle $s \in [0, 1]$. Es folgt

$$||x_0 + s(x - x_0) - y||_2^2 \geq ||x_0 - y||_2^2 \,\forall s \in [0, 1],$$

also

$$||x_0 - y||_2^2 + 2s(x_0 - y)^*(x - x_0) + s^2 ||x - x_0||_2^2 \geq ||x_0 - y||_2^2 \,\forall s \in [0, 1],$$

womit

$$2s(x_0 - y)^*(x - x_0) + s^2 ||x - x_0||_2^2 \geq 0$$

folgt. Für $s > 0$ dividiert man durch s und erhält

$$2(x_0 - y)^*(x - x_0) + s ||x - x_0||_2^2 \geq 0 \forall s \in (0, 1].$$

Für $s \to 0+$ folgt $2(x_0 - y)^*(x - x_0) \geq 0$. Damit ist gezeigt, dass $(x_0 - y)^*(x - x_0) \geq 0$ für alle $x \in K$ gilt. Setzt man nun $\lambda := (x_0 - y)^*$, so gilt $d = ||x_0 - y||_2^2 = ||\lambda||^2 > 0$. Mit $\lambda(x - x_0) \geq 0$ für alle $x \in K$ ergibt sich

$$\lambda x \geq \lambda x_0 = \lambda(x_0 - y + y) = \underbrace{\lambda(x_0 - y)}_{=d^2>0} + \lambda y = d^2 + \lambda y > \lambda y$$

für alle $x \in K$. Resultat: $\lambda y < \lambda x$ für alle $x \in K$, falls $y \notin \bar{K}$.

2. Fall Sei $y \in \partial K$. Zu y gibt es eine Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k \notin \bar{K}$ und $y = \lim_{k\to\infty} y_k$. Nach dem 1. Fall gibt es eine Folge $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda_k y_k < \lambda_k x \forall x \in K \Rightarrow \frac{\lambda_k}{||\lambda_k||_2} y_k < \frac{\lambda_k}{||\lambda_k||_2} x \forall x \in K.$$

OBdA sei also $||\lambda_k||_2 = 1$. Da die Einheitskugel kompakt ist, existiert $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$ mit $||\lambda||_2 = 1$. Insbesondere gilt $\lambda \neq 0$. Betrachtet man nun den Grenzübergang $k \to \infty$, so erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k y_k = \lambda y \leq \lambda x = \lim_{k\to\infty} \lambda_k x \forall x \in K.$$

Man überlege sich leicht, dass $\lambda y < \lambda x$ für alle $x \in \mathring{K}$ gilt. □

(A.5) Korollar (Trennung zweier konvexer Mengen). Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen und $\mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset$. Dann sind K_1 und K_2 trennbar, d.h. es gibt $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\lambda y \leq \alpha \leq \lambda x$ für alle $y \in K_1$ und $x \in K_2$.

Beweis. Die Menge $K := K_1 - K_2 = \{y - x \mid y \in K_1, x \in K_2\}$ ist konvex und es gilt $0 \notin \mathring{K}$, da das Innere von K_1 und K_2 disjunkt ist. Nach (A.4) gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\lambda 0 \leq \lambda z$ für alle $z \in K$. Wegen $z = y - x$ für passendes $y \in K_1$ und $x \in K_2$ folgt $0 \leq \lambda(y - x)$, d.h.

$$\lambda y \leq \lambda x \forall y \in K_1, x \in K_2.$$

Setze weiter $\alpha = \sup\{\lambda y \mid y \in K_1\}$. Dann folgt $\alpha \leq \lambda x$ für alle $x \in K_2$, also $\alpha \leq \inf\{\lambda x \mid x \in K_2\}$, woraus sich

$$\lambda y \leq \alpha \leq \lambda x \forall y \in K_1, x \in K_2$$

ergibt. □

(A.6) Trennungssatz (für Kegel). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleerer, abgeschlossener und konvexer Kegel. Zu $y \notin K$ gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\lambda y < 0 \leq \lambda x$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wegen $K = \bar{K}$ gibt es nach dem ersten Fall von (A.4) einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda y < \lambda x \forall x \in K.$$

Da $0 \in K$, gilt $\lambda y < 0 = \lambda \cdot 0 \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen bleibt $0 \leq \lambda x$ für alle $x \in K$.
Annahme: $\lambda x_0 < 0$ für ein $x_0 \in K$. Dann ist $\alpha x_0 \in K$ für alle $\alpha \geq 0$ und es folgt

$$\lambda(\alpha x_0) = \alpha(\lambda x_0) \overset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Dies ist ein Widerspruch, da λx_0 für ale $x_0 \in K$ durch λy nach unten beschränkt ist. □

(A.7) Alternativsatz (Lemma von Farkas). Sei B eine $k \times n$-Matrix und sei $d \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt genau eine der folgenden beiden Aussagen:

(i) Das System $Bx = d$, $x \geq 0$ hat eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Das System $\lambda B \geq 0$, $\lambda d < 0$ hat eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Beweis. Der Kegel $K = \{Bx \mid x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^k$ ist abgeschlossen, konvex und nichtleer. Es gilt entweder $d \in K$ oder $d \notin K$.
$d \in K$ ist äquivalent zu $Bx = d$ mit $x \geq 0$, also zu Aussage (i). Für $d \notin K$ gibt es nach (A.6) ein $\lambda \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ mit $\lambda d < 0 \leq \lambda z$ für alle $z \in K$. Es folgt

$$0 \leq \lambda z = \lambda B x = (\lambda B)x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$ und man erhält $\lambda B \geq 0$. Also ist $d \notin K$ äquivalent zu (ii). □