

Teil I: Fourier-Analyse

§ 1 Die Fourier-Transformierten in \mathcal{Y}

Notation: $x \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$, x^β , $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

Def. 1.1: $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\mathbb{R}^m) =$ Schwartz'scher Raum (L. Schwartz)
 $= \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) : \sup_{\mathbb{R}^m} |x^\beta D^\alpha f| < \infty \}$

Beispiele: $f = e^{-|x|^2} \in \mathcal{Y}$

$f = e^{-|x|} \notin \mathcal{Y}$

$f = \frac{1}{1+|x|^2} \notin \mathcal{Y}$

$f = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \in \mathcal{Y}$

Def. 1.2: $f \in \mathcal{Y}$ (oder $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$)

Fourier-Transformierte: $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$

Inverse: $\tilde{f}(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi$

Beispiel: $f = e^{-|x|^2/2}$
 $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-|x|^2/2 - ix \cdot \xi} dx = e^{-\xi^2/2}$ (b. in.)

$$(a) \quad (D^\alpha \hat{f})^\wedge(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha f(\xi) d\xi$$

$$= (2\pi)^{-m/2} \int (-1)^{|\alpha|} (-i\xi)^\alpha f(\xi) d\xi$$

$$= i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(x)$$

$$D^\alpha \hat{f}(x) = (2\pi)^{-m/2} \int D_\xi^\alpha e^{-ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi$$

$$= (2\pi)^{-m/2} \int e^{-ix \cdot \xi} (-ix)^\alpha f(\xi) d\xi$$

$$= ((-ix)^\alpha \hat{f})^\wedge(x)$$

$$(x^\alpha \hat{f})^\wedge = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}$$

(b) $r > 0, f_r(x) = f(rx)$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_r(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(rx) dx && rx = x' \\ &= (2\pi)^{-n/2} r^{-n} \int e^{-ix' \cdot \frac{\xi}{r}} f(x') dx' \\ &= r^{-n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{r}\right) \end{aligned}$$

$\gamma \in \mathbb{R}^n, f_\gamma(x) = f(x+\gamma)$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\gamma(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x+\gamma) dx && x+\gamma = x' \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x'-\gamma) \cdot \xi} f(x') dx' \\ &= e^{i\gamma \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

(c) $(f * g)(x) = \int f(x-y) g(y) dy = (g * f)(x)$

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} \int f(x-y) g(y) dy dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int g(y) \int e^{-ix \cdot \xi} f(x-y) dx dy \\ &= \int g(y) e^{-iy \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) dy \\ &= (2\pi)^{n/2} \widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Satz 1.1: Die (inverse) Fourier-Transformation bildet \mathcal{Y} auf \mathcal{Y} ab, und es gilt

$$f = \widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}}, \quad f \in \mathcal{Y}$$

Beweis: (i) $f \in \mathcal{Y} \Rightarrow \widehat{f}, \widetilde{f} \in \mathcal{Y}$

Nach (a) ist $\mathcal{D}^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\mathcal{X}^\alpha f)^\wedge \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathcal{F}^\beta \mathcal{D}^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}^\beta (\mathcal{X}^\alpha f)^\wedge = (-i)^{|\alpha|} i^{|\beta|} (\mathcal{D}^{\beta+\alpha} f)^\wedge$$

als Fourier-Transformation einer Funktion aus \mathcal{Y} beschreibbar.

(ii) $f, g \in \mathcal{F}$

$$* \int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \int \hat{g}(\eta) f(x+\eta) d\eta$$

Denn:

$$\begin{aligned} \int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi &= (2\pi)^{-n/2} \int g(\xi) \int f(\eta) e^{-i\xi \cdot \eta} d\eta e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(\eta) \int g(\xi) e^{-i\xi \cdot (\eta-x)} d\xi d\eta \\ &= \int \hat{g}(\eta-x) f(\eta) d\eta \quad \eta-x = \eta' \\ &= \int \hat{g}(\eta') f(x+\eta') d\eta' \end{aligned}$$

$$(1) \quad g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x), \quad \varepsilon > 0: \quad \hat{g}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n} \hat{g}(\xi/\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \int g_\varepsilon(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi &= \varepsilon^{-n} \int \hat{g}(\xi/\varepsilon) f(x+\xi) d\xi \quad \frac{\xi}{\varepsilon} = \eta' \\ &= \int \hat{g}(\eta') f(x+\varepsilon\eta') d\eta' \end{aligned}$$

$$g(x) = e^{-|x|^2/2}: \quad \hat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$$

$\xi \rightarrow 0:$

$$\underbrace{g(0)}_{=1} \int \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = f(x) \underbrace{\int \hat{g}(\eta) d\eta}_{=(2\pi)^{n/2}}$$

Damit ist $\hat{\hat{f}} = f$ und entsprechend $\hat{\hat{g}} = g$. Fouriertransformationen sind beide Transformationen invertierbar.

Satz von der majorierten Konvergenz: f_n, f messbar (z.B. Lebesgue)

- 1) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ f.ü.
 - 2) $\exists g$ integrierbar, $|f_n| \leq g$
- $\Rightarrow \lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$

Beweis: Siehe Halmos, Measure Theory, S. 110.

Dummelement:

$$\int \underbrace{e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2 / 2}}_{f_n(\xi)} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \int \underbrace{e^{-|y|^2 / 2}}_{f_n} f(x+y) dy$$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$

$$f_n(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi}$$

$$|f_n(\xi)| \leq |f(\xi)|$$

$$f_n(y) \rightarrow e^{-|y|^2 / 2} f(x)$$

$$|f_n(y)| \leq e^{-|y|^2 / 2} \sup |f|$$

$$\Rightarrow \int \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \int e^{-|y|^2 / 2} f(x) dy$$

Korollar 1.2 (Parseval'sche Beziehung):

Für $f, g \in \mathcal{F}$ gilt

$$\int \hat{f} g d\xi = \int f \hat{g} d\xi$$

$$\int f \bar{g} d\xi = \int \hat{f} \bar{\hat{g}} d\xi$$

Beweis: Die erste Formel entsteht aus (*) für $x=0$. Wenden wir die erste Formel auf \tilde{f} anstelle von f an, so entsteht wegen $\tilde{\tilde{f}} = \hat{f}$

$$\int \hat{f} g d\xi = \int \tilde{\tilde{f}} g d\xi = \int \tilde{f} \hat{g} d\xi = \int \hat{f} \hat{g} d\xi$$

(1. Formel)

und dies ist die zweite Formel mit f, g vertauscht.

Bemerkung: 1) Die gleichen Beziehungen gelten auch für \sim anstelle von \wedge .

2) Führen wir das innere Produkt und die Norm

$$(f, g) = \int f \bar{g} \, dx, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}$$

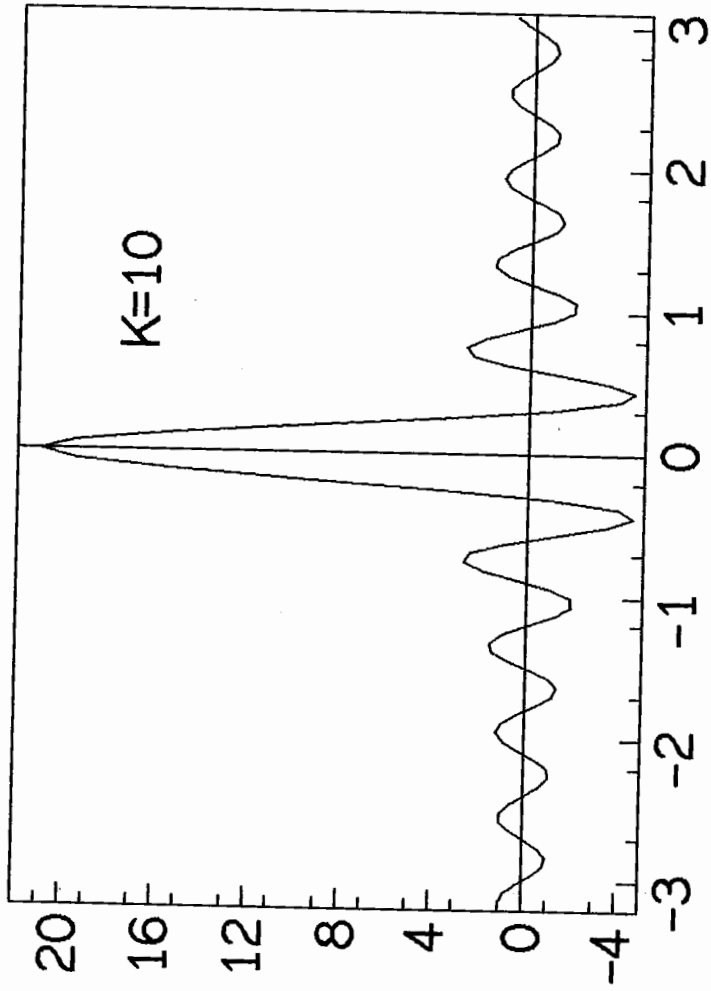
ein, so wird aus \mathcal{G} ein unitärer Raum. Seine Vervollständigung ist der Raum $L_2(\mathbb{R}^n)$ der messbaren quadratintegrablen Funktionen. Nach Parseval haben wir

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = (\tilde{f}, \tilde{g}),$$

$$\|f\| = \|\hat{f}\| = \|\tilde{f}\|.$$

Also können \wedge, \sim zu Isometrien von $L_2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.

$$\frac{\sin(K - \frac{1}{2})x}{\sin x/2}$$



§3 Fourier-Reihen

Bessel'sche Ungleichung: $2\pi \sum_k |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$

$f \in L_2([0, 2\pi]^m)$, $(f, g) = \int_{[0, 2\pi]^m} f \bar{g} \, d\mu$, $\|f\| = (f, f)^{1/2}$

$\hat{f}_k = (2\pi)^{-m} \int_{[0, 2\pi]^m} e^{-ik \cdot x} f(x) \, d\mu$, $k \in \mathbb{Z}^m$, Fourier-Koeff.

Satz 3.1: Sei $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ in allen Argumenten 2π -periodisch.

Dann gilt

$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} e^{ik \cdot x} \hat{f}_k$

mit gleichmäßiger Konvergenz. Weiter ist

$\|f\|^2 = (2\pi)^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\hat{f}_k|^2$, $(f, g) = (2\pi)^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$

Beweis: $n=1$.

$\sum_{|k| < K} e^{ikx} = \begin{cases} \frac{\sin(k - \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}, & x \neq 0 \\ 2K-1, & x = 0 \end{cases}$

$\sum_{|k| < K} e^{ikx} \hat{f}_k = (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} f(y) \sum_{|k| < K} e^{ik(x-y)} \, dy$

$= (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} f(y) \frac{\sin(k - \frac{1}{2})(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} \, dy$

$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} f(y) \frac{\sin(k - \frac{1}{2})(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} \, dy$

$\Rightarrow f(x) - \sum_{|k| < K} e^{ikx} \hat{f}_k = (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} (f(x) - f(y)) \frac{\sin(k - \frac{1}{2})(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} \, dy$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} g_x(y) \sin(k - \frac{1}{2})(x-y) dy, \quad g_x(y) = \frac{f(x) - f(y)}{i(x-y)}$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-1} \left\{ \int_{[0, 2\pi]} g_x'(y) \cos(k - \frac{1}{2})(x-y) dy - \left[g_x(y) \cos(k - \frac{1}{2})(x-y) \right]_{y=0}^{y=2\pi} \right\}$$

$$= O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\| \sum_{|k| < N} e^{ikx} \hat{f}_k \|^2 = 2\pi \sum_{|k| < N} |\hat{f}_k|^2 \quad \square$$

Bemerkungen: $f \in L_2([0, 2\pi])$ $I_N f^{(0)} = \sum_{|k| < N} \hat{f}_k e^{ikx}$
 $f_\varepsilon \rightarrow f$ in L_2 , $f_\varepsilon \in C^\infty$ und periodisch

$$\|I_N f - f\| \leq \|I_N(f - f_\varepsilon)\| + \|I_N f_\varepsilon - f_\varepsilon\|$$

$$\leq \|f - f_\varepsilon\| + \|I_N f_\varepsilon - f_\varepsilon\| < \varepsilon$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } \varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } k > k_0(\varepsilon)$$

Es gilt also das Parseval zum Satz von Plancherel:

$$f \in L_2 \Rightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx} \hat{f}_k \text{ in } L_2([0, 2\pi])$$

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$$

Satz 3.2: Sei g eine lokal quadratisch. Forml. mit der Periode 2π in allen Argumenten. Dann gilt

$$\hat{g} = (2\pi)^{m/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{g}_k \delta_k.$$

Beweis:

$$g(\xi) = \sum_k \hat{g}_k e^{i\xi \cdot k}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_g f &= T_g \hat{f} = \int g \hat{f} = \sum_k \hat{g}_k \int e^{i\xi \cdot k} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{m/2} \sum_k \hat{g}_k f(k) \quad \square \end{aligned}$$

(Satz 3.3: Sei $f \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\sum_{\ell} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi\ell}{h}\right) = (2\pi)^{-m/2} h^m \sum_k f(hk) e^{-i\xi \cdot kh}.$$

Insbesondere gilt (für $\xi=0$) die Poisson'sche Formel

$$\sum_{\ell} \hat{f}(2\pi\ell) = (2\pi)^{-m/2} \sum_k f(k)$$

oder

$$\hat{\mathbb{L}}_{2\pi} = (2\pi)^{-m/2} \mathbb{L}$$

$$\hat{\mathbb{L}}_{\frac{2\pi}{h}} = (2\pi)^{-m/2} h^m \mathbb{L}_h$$

Beweis: $g(\xi) = \sum_{\ell} \hat{f}(\xi - 2\pi\ell)$ 2π -periodisch

$$\hat{g}_k = (2\pi)^{-m} \int_{[0, 2\pi]^m} g(\xi) e^{-i\xi \cdot k} d\xi$$

$$= (2\pi)^{-m} \sum_{\ell} \int_{[0, 2\pi]^m} \hat{f}(\xi - 2\pi\ell) e^{-i\xi \cdot k} d\xi$$

$$= (2\pi)^{-m} \int \hat{f}(\eta) e^{-i\xi \cdot k} d\xi = (2\pi)^{-m/2} \hat{f}(k)$$

Fourier-Reihe für g :

$$\begin{aligned}g(\xi) &= \sum_h e^{i\xi \cdot k} \hat{g}_h \\ &= (2\pi)^{-m/2} \sum_k e^{i\xi \cdot k} \hat{f}(-k)\end{aligned}$$

Vergleich mit der Definition von g gilt

$$\sum_k \hat{f}(\xi - 2\pi l) = (2\pi)^{-m/2} \sum_k e^{i\xi \cdot k} \hat{f}(-k) \quad \square$$

Bemerkung: Die Poisson'sche Formel kann man auch in der Form

$$\hat{f}(0) = (2\pi)^{-m/2} \sum_k f(k) - \sum_{l \neq 0} \hat{f}(2\pi l)$$

oder

$$\int f(x) dx = \sum_k f(k) - (2\pi)^{m/2} \sum_{l \neq 0} \hat{f}(2\pi l)$$

schreiben. Werden wir sie an auf $f_h(x) = f(hx)$, so wird dann

$$\int f(hx) dx = \sum_k f(hk) - (2\pi)^{m/2} h^{-m} \sum_{l \neq 0} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{h} l\right)$$

oder

$$\int f(x) dx = h^m \sum_k f(hk) - (2\pi)^{m/2} \sum_{l \neq 0} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{h} l\right)$$

Dies kann man auffassen als eine Folgerung für die Trapezregel in \mathbb{R}^m .

§ 4 Das Plancherel Theorem von Schwarz

Def: $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ bandbeschränkt (mit Bandbreite b)

$$\Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = 0 \text{ für } |\xi| \geq b$$

Beispiel 1) $n=1$ $\chi_b(\xi) = \begin{cases} 1, & -1 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\tilde{\chi}_b(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^1 e^{ix \cdot \xi} d\xi = (2\pi)^{-1/2} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix}$$

$$= (2\pi)^{-1/2} 2 \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sinc} x$$

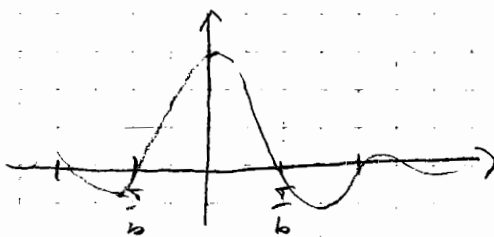
$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sinc}^\wedge = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \chi$$

$$\operatorname{sinc}_b x = \operatorname{sinc} b x$$

$$\operatorname{sinc}_b^\wedge = b^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \chi_{1/b}$$

Bandbreite b !



2) $n \geq 1$ $\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{sinc} x_1 \operatorname{sinc} x_2 \dots \operatorname{sinc} x_n$, $\chi(\xi) = \chi(\xi_1) \dots \chi(\xi_n)$

$$\operatorname{sinc}^\wedge = b^{-n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \chi_{1/b}$$

Bandbreite $\sqrt[n]{b}$!

3) $\chi_m(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \chi(|x|)$

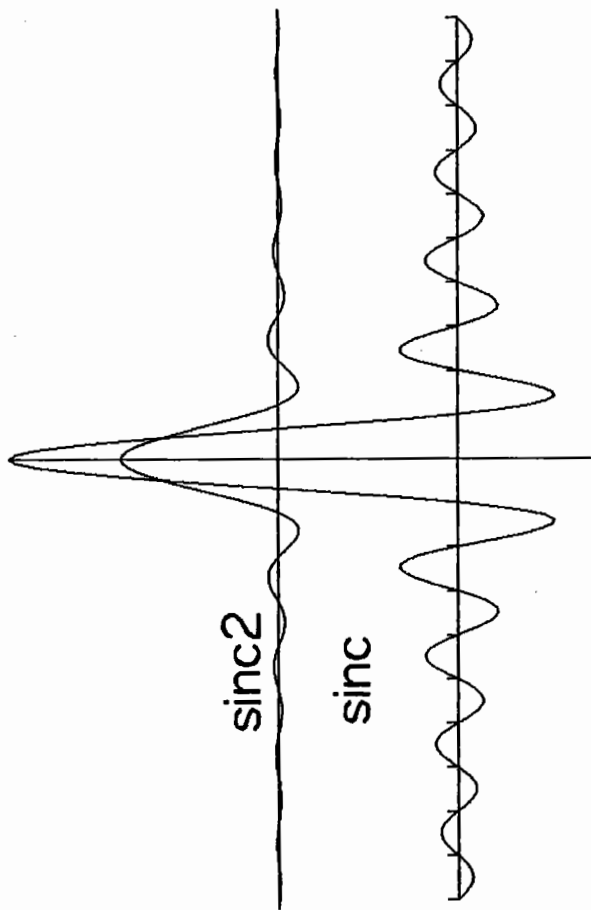
$$\tilde{\chi}_m(\xi) = |\xi|^{(2-m)/2} \int_0^\infty r^{m/2} J_{(m-2)/2}(\tau|\xi|) \chi(\tau) d\tau$$

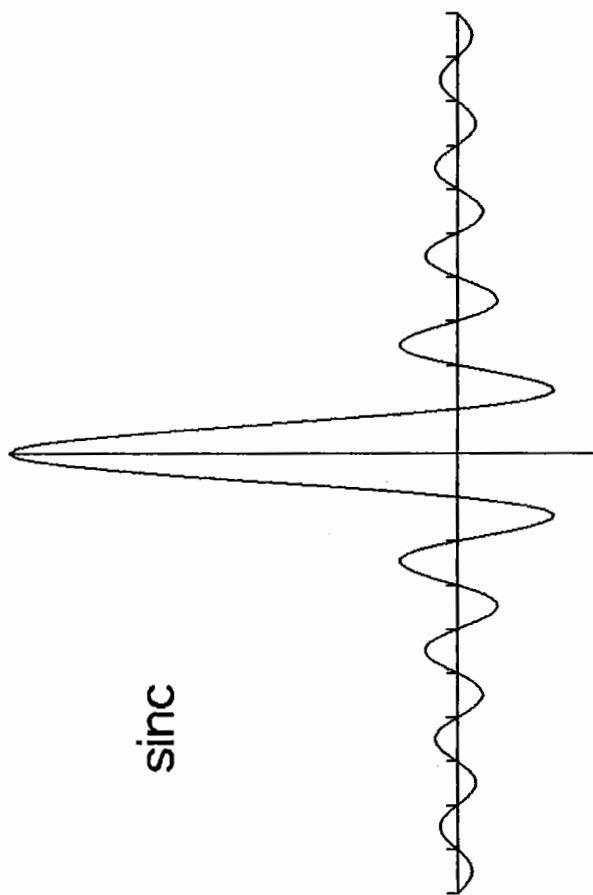
$$\int_0^z t^\nu J_{\nu-1}(t) dt = z^\nu J_\nu(z), \quad \nu \geq 0$$

(Abramowitz - Stegun 11.3.20)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{sinc}_2(x) = \frac{J_1(x)}{|x|}$$



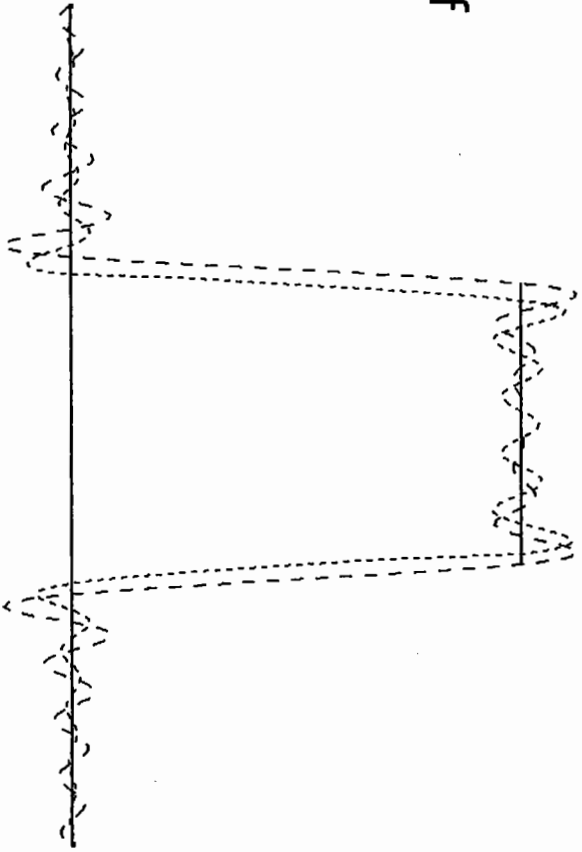


sinc

}

}

Punkte: fb
Striche: Shf



$$(x) \sqrt{(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi) d\xi \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi) d\xi = (x) f$$

$$(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi) d\xi \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi) d\xi = (\xi) f$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi) d\xi \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi) d\xi = (\xi) f$$

$$f(-x)$$

$$f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x+y)} d\xi dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x+y) dy = f(-x)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \text{sinc}\left(\frac{x-\xi}{h}\right) d\xi$$

f eindeutig bestimmt durch die Werte f(ξ), ξ ∈ ℝ, und es gilt

Sei f b-Bandbeschränkt und 0 ≤ h ≤ π. Dann ist



$$f(-z) =$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$g(z) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

3. Poisson'sche Formel:

$$= \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

2. ~~Poisson~~ Parseval:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

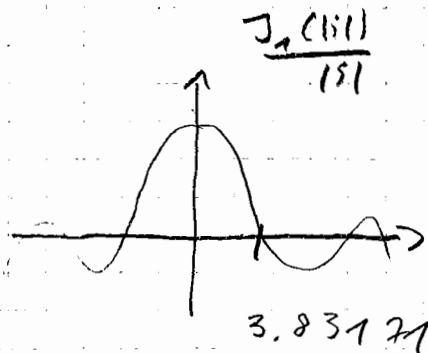
$$= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$

~~$$f(z) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(-z) dz$$~~

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_n(\xi) &= |\xi|^{(2-m)/2} \int_0^{|\xi|} r^{\frac{m}{2}} J_{(m-2)/2}(r|\xi|) dr & r|\xi| = r' \\ &= |\xi|^{(2-m)/2} \frac{1}{|\xi|^{m-1}} \int_0^{|\xi|} \left(\frac{r'}{|\xi|}\right)^{\frac{m}{2}} J_{(m-2)/2}(r') dr' \\ &= |\xi|^{-m} |\xi|^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(|\xi|) = \frac{J_{m/2}(|\xi|)}{|\xi|^{m/2}} \end{aligned}$$

$m=2$:



$(= \frac{1}{2} \text{ für } |\xi|=0)$

Satz 4.1 (Shannon): Sei f b -bandbeschränkt und $h \leq \frac{\sigma}{b}$. Dann ist f durch die Werte $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^m$, eindeutig bestimmt, und es gilt

$$f(x) = \sum_k f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\sigma}{h} (x - hk)$$

Sind f, g b -bandbeschränkt, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \bar{g} dx = h^m \sum_k f(hk) \bar{g}(hk)$$

Beweis: ②

Wir entwickeln \hat{f} in $[-\frac{\sigma}{h}, \frac{\sigma}{h}]^m$ in einer

Fourier-Reihe:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_k f_k e^{i\xi \cdot kh}$$

(wegen $b \leq \frac{\sigma}{h}$)

$$f_k = \left(\frac{2\sigma}{h}\right)^{-m} \int_{[-\frac{\sigma}{h}, \frac{\sigma}{h}]^m} e^{-i\xi \cdot kh} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Da \hat{f} außerhalb $[-\frac{\sigma}{h}, \frac{\sigma}{h}]^m$ verschwindet, ist $f_k = h^{-m} (2\sigma)^{-m/2} f(hk)$.

Also haben wir

$$\hat{f}(\xi) = h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_k f(-kh) e^{i\xi \cdot kh}$$

①

mit Konvergenz in $L_2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n)$. Mit der charakteristischen Funktion $\chi_{\frac{\pi}{h}}$ von $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ ist dann

$$\hat{f}(\xi) = h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_k f(-kh) \chi_{\frac{\pi}{h}}(\xi) e^{i\xi \cdot kh}$$

in Π^n mit Konvergenz in $L_2(\Pi^n)$. Da die inverse Fourier-Transformierte stetig ist, folgt

$$f(x) = h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_k f(-kh) \left(\chi_{\frac{\pi}{h}}(\xi) e^{i\xi \cdot kh} \right)^\wedge(x)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \left(\chi_{\frac{\pi}{h}}(\xi) e^{i\xi \cdot kh} \right)^\wedge(x) &= e^{ik \cdot kh} \left(\chi_{\frac{\pi}{h}} \right)^\wedge(x) \\ &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^n e^{ik \cdot kh} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n/2} \chi_{\frac{\pi}{h}}(x) \\ &= h^n (2\pi)^{-n/2} \chi_{\frac{\pi}{h}}(x) e^{ik \cdot kh} \end{aligned}$$

Dies beweist die Formel für die Sine-Reihe □

② Fourier-Reihe in $L_2([-a, a]^n)$:

$$f(x) = \sum_k \hat{f}_k e^{i\pi x \cdot ka}$$

$$\hat{f}_k = (2a)^{-n} \int_{[-a, a]^n} f(x) e^{-i\pi x \cdot ka} dx$$

$$(f, g) = (2a)^n \sum_k \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$$

① und die Parseval'sche Beziehung ergibt

$$\begin{aligned} \int f \overline{g} dx &= \int \hat{f} \overline{\hat{g}} dS = \int \hat{f} \overline{\hat{g}} dS = (2a)^n \sum_k \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k} \\ &= h^n \sum_k f(-kh) \overline{g(-kh)} \end{aligned}$$

Wella: $\hat{f}(\xi) = h^{-1} (2\pi)^{-m/2} \sum_k f(hk) e^{-i\xi hk}$

Bemerkungen 1) $h \leq \frac{\pi}{\omega}$ Nyquist - Bedingung, Ultrakont., Ultrastet.

2) $f \in L_2$ kann nicht gelte werden: $f = \sin$

3) $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-m/2} h^m \sum_k f(hk) e^{i\xi hk}$ in $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^m$.

Unterabtaktung: $f_S(x) = h^m \sum_k f(hk) \delta(x-hk)$

$f_S = h^m f \cup h$

Satz 4.2: $\hat{f}_S(\xi) = \sum_e \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h} e)$

Beweis: Poisson'sche Formel (Satz 3.3): $\hat{\cup}_{2\pi/h} = (2\pi)^{-m/2} \cup$

$\Rightarrow \hat{\cup}_{2\pi/h} = (2\pi)^{-m/2} h^m \cup/h$

Formel:

$\hat{f}_S = h^m (f \cup/h)^\wedge = h^m (2\pi)^{-m/2} \hat{f} * \hat{\cup}/h = \hat{f} * \cup_{2\pi/h}$

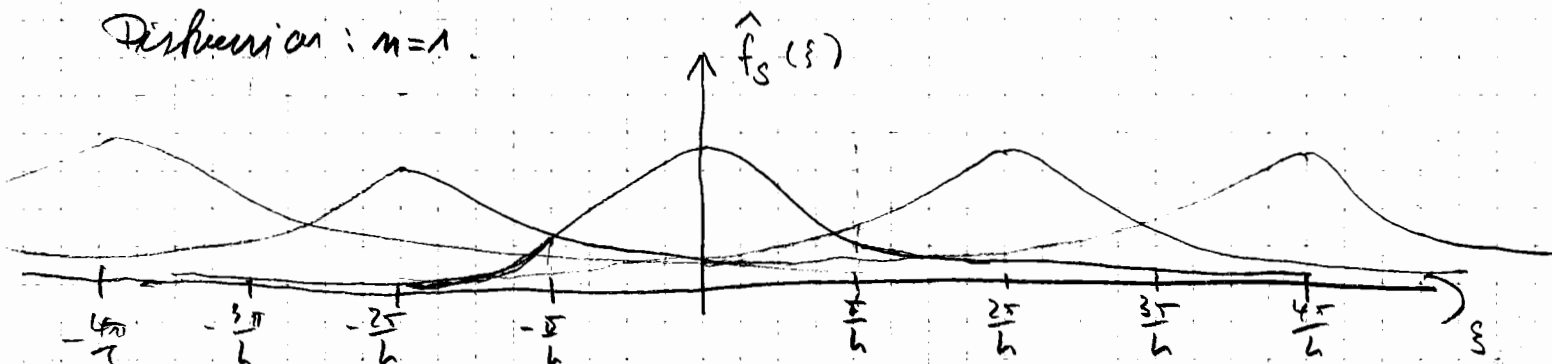
$\hat{f}_S(\xi) \stackrel{m}{=} \cup_{2\pi/h} \hat{f}_{-\xi} = \sum_k \hat{f}(\frac{2\pi}{h}k - \xi) = \sum_k \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h}k)$

Explizit:

$\hat{f}_S(\xi) = h^m (2\pi)^{-m/2} \sum_k f(hk) e^{-ikh \cdot \xi}$

(Satz 3.3) $= \sum_e \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h} e)$ □

Diskussion: $m=1$.



Wo weicht \hat{f}_S von \hat{f} ab?

1) Im hochfrequenten Bereich, d. h. $|\xi| \geq \frac{\sigma}{h}$. Dieser Bereich ist verantwortlich für die Darstellung von Details der Lyfz $\frac{2\sigma}{\sigma h} = 2h$ und kleiner. In Übereinstimmung mit Shannon sind diese bei Abtasten mit Schrittweite h gar nicht bestimmt. Man muß sie also mit gleichermaßen ignorieren. Daher schneidet man \hat{f}_S jenseits von $\frac{\sigma}{h}$ einfach ab, betrachtet also an Stelle von \hat{f}_S nur noch

$$\hat{f}_S \chi_{h/\sigma} \quad \chi_{h/\sigma}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \frac{\sigma}{h} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und betrachtet dann als Produktfunktion von f und \hat{f}_S :

$$\left(\hat{f}_S \chi_{h/\sigma} \right)^\sim = (2\sigma)^{-m/2} f_S * \tilde{\chi}_{h/\sigma}$$

$$\tilde{\chi}_{h/\sigma} = b \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{-m/2} \text{sinc}_{\sigma/h} \quad , \quad \tilde{\chi}_{h/\sigma} = \left(\frac{\sigma}{2} \right)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{-m/2} \text{sinc}_{\sigma/h} = (2\sigma)^{m/2} h^{-m} \text{sinc}_{\sigma/h}$$

$$\left(\hat{f}_S \chi_{\sigma/h} \right)^\sim(x) = h^{-m} f_S * \text{sinc}_{\sigma/h}(x)$$

$$= h^{-m} f_S \left(\text{sinc}_{\sigma/h} \right)^\vee$$

$$= \sum_k f(Lk) \text{sinc}_{\frac{\sigma}{h}}(x - Lk)$$

$$= S_h f(x)$$

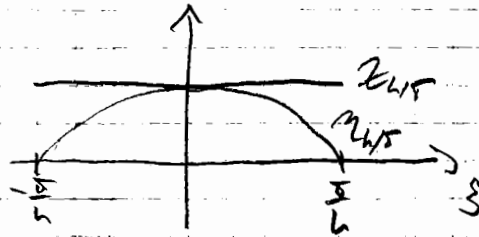
$$\text{Also: } (S_h f)^\wedge = \hat{f}_S \chi_{h/\sigma}$$

Beispiel:



Der Unterschied von $S_L f$ und f macht sich nicht nur in leicht zusehender Weise im hochfrequenten Bereich bemerkbar, und zwar durch zwei Effekte:

- Glättung von Unstetigkeiten. Dies liegt in der Natur der Sache.
- Über- und Unterschwingen (Gibbs-Effekt). Dies wird verursacht durch das abrupte Abklingen von \hat{f}_S . Man kann es abkürzen durch ein „sanftes“ Abklingen. Dazu ersetzt man $\chi_{\frac{1}{2L}}(\xi)$ durch die Funktion $\tilde{\chi}_{\frac{1}{2L}}$ mit $\tilde{\chi}(\xi) = \cos \frac{\pi}{2} \xi$.



Dadurch werden die hohen Frequenzen etwas gedämpft, der Glättungseffekt also etwas stärker (Bild). Aber der Gibbs-Effekt wird drastisch vermindert.

$$(E_h f)^\wedge = \hat{f}_S \tilde{\chi}_{\frac{1}{2L}}$$

$$E_h f = (2\pi)^{-n/2} f_S * \tilde{\chi}_{\frac{1}{2L}}$$

$$E_h f = (2\pi)^{-n/2} f_S(\tilde{\chi}_{\frac{1}{2L}})_-x = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_k \tilde{\chi}_{\frac{1}{2L}}(x-hk)$$

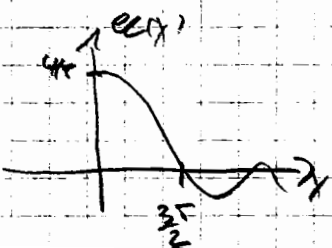
$$= (2\pi)^{-n/2} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{n/2} h^n \sum_k \tilde{\chi}\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right)$$

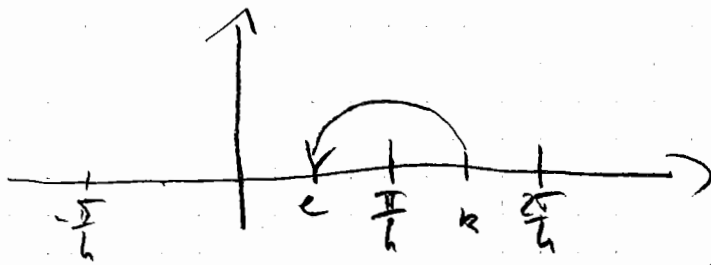
$n=1$:

$$\tilde{\chi}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^{+1} \cos \frac{\pi}{2} \xi e^{ix\xi} d\xi = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\cos x}{\frac{\pi^2}{4} - x^2}$$

$$E_h f(x) = \underbrace{(2\pi)^{-1/2} \frac{\pi}{h} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} h}_{\pi} \sum_k f(hk) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right)}{\frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right)^2}$$

$$= \sum_k f(hk) \operatorname{cc}\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right), \quad \operatorname{cc}(x) = \frac{\pi \cos x}{\frac{\pi^2}{4} - x^2}$$





$$\cos kx \\ \cos lx$$

$$h = \frac{\pi}{b}$$

$$\cos kx = \cos lx \text{ auf } \mathbb{R}h$$

$$\Leftrightarrow (k-l) \cdot h \equiv 0 \pmod{2\pi}, \forall j$$

$$\Leftrightarrow |k-l| = \frac{2\pi}{h} \text{ oder Vielfache}$$

Kann nicht passieren wenn $|k-l| < \frac{2\pi}{h}$.

Falls $k > \frac{\pi}{h}$: $l = k - \frac{2\pi}{h}$ oder $l = \frac{2\pi}{h} - k$ ergibt die gleich Funkt. auf \mathbb{R} !

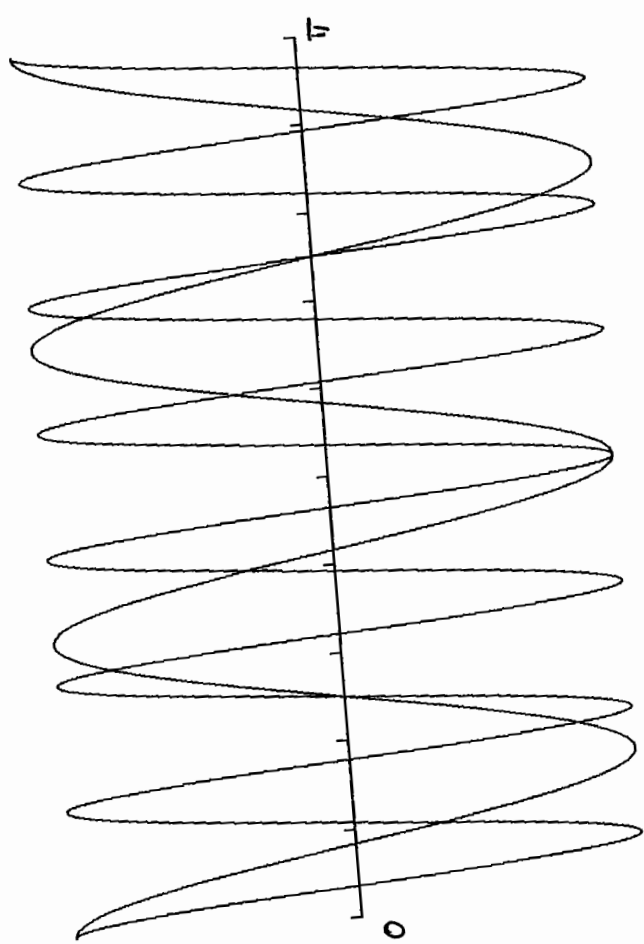
Beispiel: $b = 10$, $h = \frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{h} = 10$

$k = 14$, $l = 6$

()

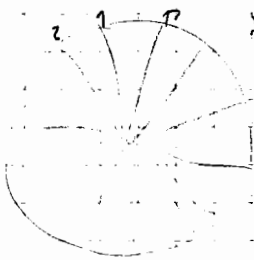
$h = \frac{h}{10}$, $l+k = 20$
cos 14 x } Stimmen auf h Z
cos 6 x } " " "

()



2) Im niedrigen Frequenzbereich: Die "Durchläufer" (siehe oben) der Replikate haben \hat{f} auch hier kleine $|\xi|$! Bei Ersetzen von \hat{f} durch \hat{f}_S bei nicht-erfüllten Nyquist-Bedingung entstehen daher auch niedrige Frequenz Fehler! Man spricht von Aliasing.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} e^{iPx} & |x| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $\varphi = \arg(x)$ ($x \in \mathbb{R}$)



$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i x \cdot \xi} dx$$

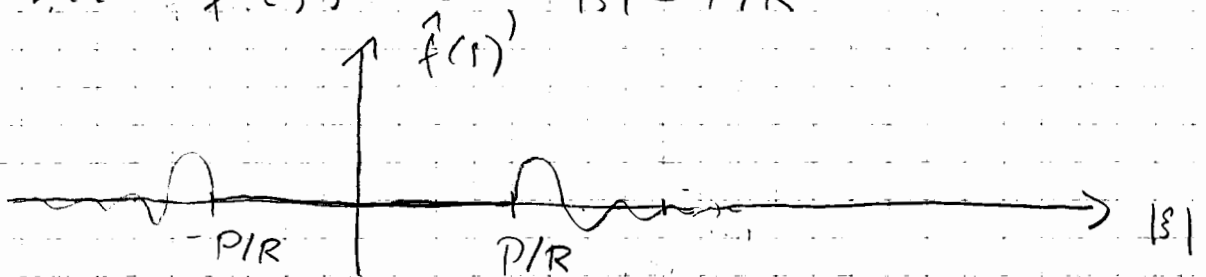
$$= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-i r \rho \cos(\varphi - \psi) + i r \rho \varphi} d\varphi dr$$

$x = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$
 $\xi = \rho \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$

$$J_p(\sigma) = \frac{1-p}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i \sigma r \cos \varphi} d\varphi, \quad p \text{ ganzzahlig}$$

$$\hat{f}(\xi) = i^p \int_0^1 r J_p(-r\rho) dr \sim 0 \text{ für } \rho < p/R$$

d.h. $\hat{f}(\xi) \sim 0$ für $|\xi| < p/R$



Da \hat{f} in $|\xi| < p/R$ kaum Masse hat, \hat{f}_S aber sehr wohl, ist der Aliasing-Effekt besonders ausgeprägt.

Quantitativ: Aliasing setzt ein ^{mindestens} für $\frac{p}{R} = \frac{\Sigma}{h}$, d.h. $R = \frac{p h}{\Sigma}$,
mit $R = N h$ also $N = \frac{p}{\Sigma}$

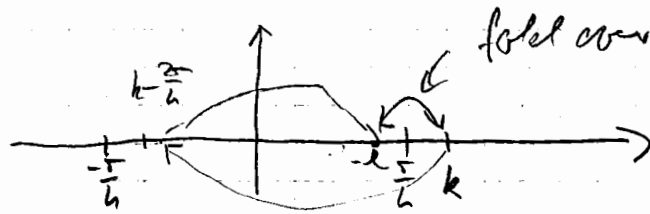
① Vermeidung von Übertragung: Ernt filtern, dann sampeln!

Filter: $w(\xi) = 0, |\beta| > b$

$$f \rightarrow (w * \hat{f})^{\sim} = (2\sigma)^{-n/2} \tilde{w} * f$$

Abhängig kann man auch herunterschreiben ($n=1$):

Man betrachte die Funktion $\cos kx$, $\cos x$ auf einem Gitter der Schrittweite h . Auf diesem stimmen die überein falls $l-h = \frac{2\pi}{h}$. Man kann also zwischen den Funktionen $\cos kx$, $\cos x$ nicht unterscheiden für $l-h = \frac{2\pi}{h}$ • gilt $|l|, |k| \leq \frac{\pi}{h}$ (Nyquist-Bedingung erfüllt) so kann das nicht passieren. Andernfalls kommt es zum Aliasing:



① Sid 4.9a

Satz 4.3: Sei $f \in \mathcal{G}$. Dann gilt

$$\|(S_h f - f)(\cdot)\| \leq 2 (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n - [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} (S_h f)^\wedge &= \hat{f}_S \chi_{h\mathbb{T}} \\ &= \chi_{h\mathbb{T}} \sum_{\xi} \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h} \ell) \\ &= \chi_{h\mathbb{T}} \hat{f}(\xi) + \chi_{h\mathbb{T}} \underbrace{\sum_{\ell \neq 0} \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h} \ell)}_{\hat{a}(\xi)} \end{aligned}$$

$$(S_h f - \hat{f})^\wedge = (\chi_{h\mathbb{T}} - 1) \hat{f} + \chi_{h\mathbb{T}} \hat{a}$$

$$(S_h f - f)(\cdot) = (2\pi)^{-n/2} \int \{ (\chi_{h\mathbb{T}} - 1) \hat{f} + \chi_{h\mathbb{T}} \hat{a} \} e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n - [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi + \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{a}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{a}(s) e^{ix \cdot s} ds \right| &= \left| \sum_{\epsilon \neq 0} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(s - \frac{2\pi}{h}\epsilon) e^{ix \cdot s} ds \right| \\
 &= \left| \sum_{\epsilon \neq 0} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] - \frac{2\pi}{h}\epsilon} \hat{f}(s') e^{ix \cdot (s' + \frac{2\pi}{h}\epsilon)} ds' \right| \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n - [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]} |\hat{f}(s)| ds
 \end{aligned}$$

Satz 4.4: Sei die diskrete Faltung erklärt durch

$$f \overset{h}{*} g(x) = h^m \sum_{\epsilon} f(x - h\epsilon) g(h\epsilon).$$

Dann gilt für $f, g \in \mathcal{G}$

$$(f \overset{h}{*} g - f \cdot g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{m/2} \hat{f}(\xi) \sum_{\epsilon \neq 0} \hat{g}(\xi - \frac{2\pi}{h}\epsilon).$$

Beweis:

$$(f \overset{h}{*} g)^\wedge(\xi) = h^m \sum_{\epsilon} e^{-i h \epsilon \cdot \xi} g(h\epsilon) \hat{f}(\xi)$$

$$\stackrel{(\text{Satz 3.3})}{=} (2\pi)^{m/2} \sum_{\epsilon} \hat{g}(\xi - \frac{2\pi}{h}\epsilon) \hat{f}(\xi)$$

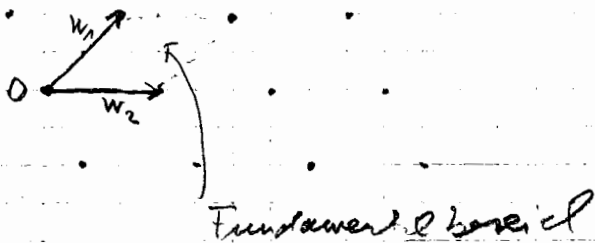
$$(f \overset{h}{*} g)^\wedge(\xi) = \underbrace{(2\pi)^{m/2} \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi)}_{(g * f)^\wedge(\xi)} = (2\pi)^{m/2} \sum_{\epsilon \neq 0} \hat{g}(\xi - \frac{2\pi}{h}\epsilon) \hat{f}(\xi) = 0$$

Als Vorbereit. zu Satz 4.2 können wir noch anmerken:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-m/2} h^m \sum_k f(hk) e^{-i h k \cdot \xi} = \sum_{\epsilon \neq 0} \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h}\epsilon)$$

§ 5 Das Abstrakt Theorem von Petersen - Middelton

Wir wollen die Resultate aus § 4 auf beliebige Abstraktgitter L übertragen. Ein solches wird erklärt durch ein reelle nicht-singuläre (n, n) -Matrix W als $L = W \mathbb{Z}^n$. Die Spalten von W bilden die Basis des Gitters. Die Menge $W [0, 1]^n$ ist der Fundamentelbereich, dessen hat das Volumen $|\det(W)|$.



Nachher wird gibt es zu einem Gitter mehrere Basen, aber $|\det(W)|$ ist für alle Basen gleich. Daher $\det(L) = |\det(W)|$

Zu L definiert man das reziproke Gitter $\hat{L} = 2\pi W^{-T} \mathbb{Z}^n$.

Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung der Matrix W .

Lemma: $L_1 = W_1 \mathbb{Z}^n$, $L_2 = W_2 \mathbb{Z}^n$, $L_1 = L_2 \Rightarrow W_1 = W_2 U$
mit einer ganzzahligen $n \times n$ Matrix U mit $\det(U) = \pm 1$.

Beweis: Zu jedem $l \in \mathbb{Z}^n$ gilt es $l' \in \mathbb{Z}^n$ mit $W_1 l = W_2 l'$
Die Zuordnung $l \rightarrow l'$ ist offenbar linear, d.h. $l' = U l$. Da l' für jedes $l \in \mathbb{Z}^n$ ganzzahlig ist, muß U ganzzahlig sein.
Das gleich muß für U^{-1} gelten, also $\det(U), \det(U^{-1})$ ganze
Wegen $\det(U^{-1}) = 1/\det(U)$ muß $\det(U) = \pm 1$ sein.

Satz 5.1 (Poisson'sche Formel): Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\textcircled{1} \quad \sum_{\gamma \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \gamma) = |\det(L)| (2\pi)^{-m/2} \sum_{x \in L} f(x) e^{-i\xi \cdot x}$$

Beweis: Sei $f_W(x) = f(Wx)$. Nach Satz 3.3 ist ($h=1$)

$$\sum_k \hat{f}_W(\xi - 2\pi k) = (2\pi)^{-m/2} \sum_k f_W(k) e^{-i\xi \cdot k}$$

Nach Aufgabe 7 ist

$$\hat{f}_W(W^T \xi) = \frac{1}{|\det(W)|} \hat{f}(\xi) \quad \text{oder} \quad \hat{f}_W(\xi) = \frac{1}{|\det(W)|} \hat{f}(W^{-T} \xi)$$

Dies haben wir

$$\sum_k \hat{f}_W(W^{-T}(\xi - 2\pi k)) = |\det(W)| (2\pi)^{-m/2} \sum_k f(Wk) e^{-i\xi \cdot k}$$

Mit $W^{-T} \xi = \xi'$ wird hieraus die Behauptung □

Die Distribution \mathbb{W}_L wird nun wie folgt als

$$\mathbb{W}_L = \sum_{\gamma \in L} \delta_\gamma$$

und f_L als

$$f_L = \int f \mathbb{W}_L \quad \text{oder} \\ f_L(x) = \sum_{\gamma \in L} f(x) \delta(x - \gamma)$$

erkennt. Satz 4.2 liefert nun

Satz 5.2:
$$\hat{f}_L(\xi) = \sum_{\gamma \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \gamma)$$

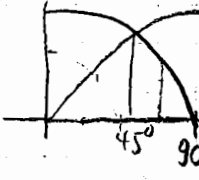
① Insbesondere ist für $\xi = 0$

$$\hat{\mathbb{W}}_L = (2\pi)^{-m/2} |\det(L)| \mathbb{W}_L$$

- I. S. 2 -

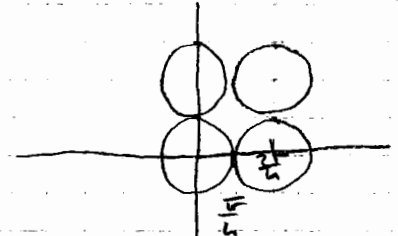
Beweis: $\hat{f}_L = \det(L) (f \circ W_L)^{\wedge} = \det(L) (W_L f)^{\wedge} = \det(L) (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^n \hat{f}_j(x_j)$
 $= W_L^{\wedge} * \hat{f}$
 $\hat{f}_L(\xi) = W_L^{\wedge} \hat{f}_{-\xi} = \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\eta - \xi) = \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \eta)$

Def: L erfüllt bezüglich K die Nyquist-Bedingung, wenn die Mengen $K + \xi_j, \xi_j \in \hat{L}$ paarweise fremd sind.



Beispiele: 1) $W = hI, K = [-b, b]^m, h \leq \frac{\pi}{b}$.

2) $W = hI, K = B(0, b), h \leq \frac{\pi}{b}$



3) $K = B(0, b), 2\pi W^{-T} = b \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

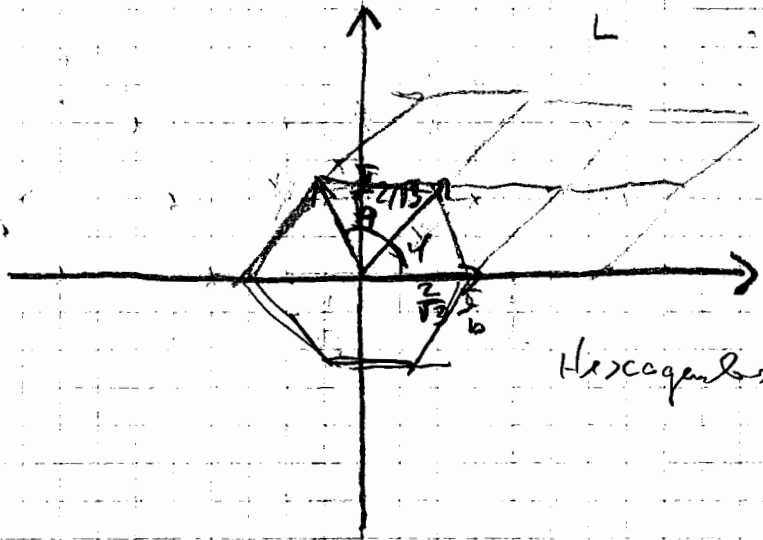
$$W^{-1} = \frac{b}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{2\pi}{b} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{b} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



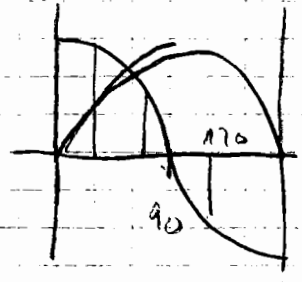
$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$u_2 = 2b \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$



Hexagonales Raster

$$\cos \varphi = \frac{-215}{415} = -\frac{1}{2}, \varphi = 120^\circ, 240^\circ$$



Satz 3 (Petersen-Mittelwertsatz): Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$, und sei $\hat{f} = 0$ außerhalb K . L erfüllt bezüglich K die Nyquist-Bedingung. Dann ist f durch sein Wert auf L eindeutig bestimmt.
Beweis: In K ist $\hat{f}_L = \hat{f}$, außerhalb ist $\hat{f} = 0$.

Effizienz des Abtastens:

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ gegeben. Bestimme L mit möglichst wenig Punkten pro Einheitsvolumen, so daß alle f mit $\hat{f} = 0$ außerhalb K lokal rekonstruiert werden können von den Wert. alle

Punkt pro Einheitsvolumen: $\frac{1}{\det(L)} = (2\pi)^{-m} \det(\hat{L})$

$(\det(\hat{L}) = (2\pi)^m / \det(L))$

Man muß also $\det(\hat{L})$, i.e. das Volumen des Fundamentallbereiches möglichst klein machen, und zwar unter der Nebenbedingung, daß die Nyquist-Bedingung erfüllt ist! Offensiv muß $\det(\hat{L}) \geq |K|$ sein. Wir definieren deshalb die Effizienz $\eta(L, K)$ des Gitters L bezüglich K durch

$\eta = \frac{|K|}{\det(L)} = \frac{|K| \det(\hat{L})}{(2\pi)^m} = \frac{|K| \det(L)}{(2\pi)^m}$

Es ist dann $0 \leq \eta(L, K) \leq 1$. $\eta(L, K) = 1$ bedeutet, daß die Mengen $K + \xi$, $\xi \in \hat{L}$ den \mathbb{R}^m lückenlos überdecken

Beispiel 1) $\eta = \frac{(2b)^m}{(2\pi)^m} h^m = \left(\frac{bh}{\pi}\right)^m = 1$ für $L = \frac{\pi}{b}$.

2) $\eta = \frac{b^m \omega_m}{(2\pi)^m} h^m$, $\omega_m = \text{Volumen des } m\text{-lin. Einheitskugels}$

η	m
1	1
0.785	2
0.523	3

3) $\eta = \frac{\pi b^2}{2\sqrt{3} b^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.907$

In höheren Dimensionen:

m	$\eta_{\text{opt.}}$	η_{opt}
1	1	1
2	0.785	0.907
3	0.524	0.742
4	0.308	0.612
5	0.165	0.466
6	0.081	0.373
7	0.037	0.295
8	0.005	0.081

Endo, P. et al: Lattice Points

Gangman, New York 1989

Sei $\hat{\pi}_K$ die charakteristische Familie von K . Das Analogon zur sinc-Funktion ist dann

$$\text{Sinc}_{L,K} = \det(L) (2\pi)^{-n/2} \hat{\pi}_K$$

und die sinc-Reihe sein f lautet nun

$$\textcircled{1} \quad S_{L,K} f(x) = \sum_{y \in L} f(y) \text{Sinc}_{L,K}(x-y)$$

Satz 5.4: Sei $f \in \mathcal{G}$. Erfüllt die Nyquist-Bew. bei K . Dann gilt

$$\|S_{L,K} f - f\| \leq 2 (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\hat{f}(\sigma)| d\sigma$$

Beweis: Vergl. Satz 4.3:

$$\begin{aligned} (S_{L,K} f)^\wedge(\sigma) &= (\hat{f}_L \hat{\pi}_K)(\sigma) \\ &= \hat{\pi}_K(\sigma) \sum_{\gamma \in L} \hat{f}(\sigma-\gamma) \\ &= \hat{\pi}_K(\sigma) \hat{f}(\sigma) + \sum_{\substack{\gamma \in L \\ \gamma \neq 0}} \hat{\pi}_K(\sigma) \hat{f}(\sigma-\gamma) \end{aligned}$$

$$(S_{L,K} f - f)^\wedge(\sigma) = (\hat{\pi}_K(\sigma) - 1) \hat{f}(\sigma) + \sum_{\substack{\gamma \in L \\ \gamma \neq 0}} \hat{\pi}_K(\sigma) \hat{f}(\sigma-\gamma)$$

① Es gilt dann

$$\begin{aligned} (S_{L,K} f)^\wedge(\sigma) &= \sum_{\gamma \in L} f(\gamma) e^{-i\gamma \cdot \sigma} \det(L) (2\pi)^{-n/2} \hat{\pi}_K(\sigma) \\ &= (\hat{f}_L \hat{\pi}_K)(\sigma) \end{aligned}$$

$$(S_{L,4} f - f)(x) = -(2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m - K} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi + (2\pi)^{m/2} \int_K e^{ix \cdot \xi} \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ \eta \neq 0}} \hat{f}(\xi - \eta) d\xi$$

$$\left| \int_K e^{-ix \cdot \xi} \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ \eta \neq 0 \\ \xi - \eta = \xi'}} \hat{f}(\xi - \eta) d\xi \right| \leq \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ \eta \neq 0}} \int_K |\hat{f}(\xi - \eta)| d\xi$$

$$= \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ \eta \neq 0}} \int_{K - \eta} |\hat{f}(\xi)| d\xi$$

$$(\text{Nyquist-Bew.}) \leq \int_{\mathbb{R}^m - K} |\hat{f}(\xi)| d\xi$$

□

Satz 5.5: $f \stackrel{L}{*} g = \det(L) \sum_{\nu \in L} f(x - \nu) g(\nu)$

Dann gilt für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$(f \stackrel{L}{*} g - f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{m/2} \hat{f}(\xi) \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ \eta \neq 0}} \hat{g}(\xi - \eta)$$

Beweis:

$$(f \stackrel{L}{*} g)^\wedge(\xi) = \det(L) \sum_{\nu \in L} e^{-i\nu \cdot \xi} \hat{f}(\nu) g(\nu)$$

$$(\text{Parseval}) = (2\pi)^{m/2} \hat{f}(\xi) \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi - \eta)$$

$$= (2\pi)^{m/2} (\hat{f} \hat{g})(\xi) + (2\pi)^{m/2} \hat{f}(\xi) \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ \eta \neq 0}} \hat{g}(\xi - \eta)$$

□

§ 6 Die diskrete Fourier-Transformierte

$$\hat{Y}_k = \frac{1}{P} \sum_{j=0}^{P-1} e^{-2\pi i j k / P} Y_j$$

Yain P

$$\tilde{Y}_k = \sum_{j=0}^{P-1} e^{2\pi i j k / P} Y_j$$

n-dim. Fourier-Transformierte kann durch wiederholte 1-dim. Fourier-Transformierte erhalten werden:

$n=2$:

$$\hat{Y}(k_1, k_2) = \frac{1}{P} \sum_{j_1=0}^{P-1} \sum_{j_2=0}^{P-1} e^{-2\pi i (j_1 k_1 + j_2 k_2) / P} Y_{j_1 j_2}$$

$$= \frac{1}{P} \sum_{j_1=0}^{P-1} e^{-2\pi i j_1 k_1 / P} \underbrace{\sum_{j_2=0}^{P-1} e^{-2\pi i j_2 k_2 / P} Y_{j_1 j_2}}_{\substack{\text{1-dim. FT für jede } j_1 \\ \text{P log P Operationen}}}$$



$P \log P$ Operationen

Diskrete Faltung:

$$Z_k = \sum_{e=0}^{P-1} W_{k-e} Y_e, \quad k=0, \dots, P-1$$

$$Z = W * Y$$

Zyklische Faltung: $W_k = W_{k-1} P e_i, \quad i=1, \dots, m$

$$(W * Y)_k = P^m \hat{W}_k \hat{Y}_k$$

Schnelle zyklische Faltung:

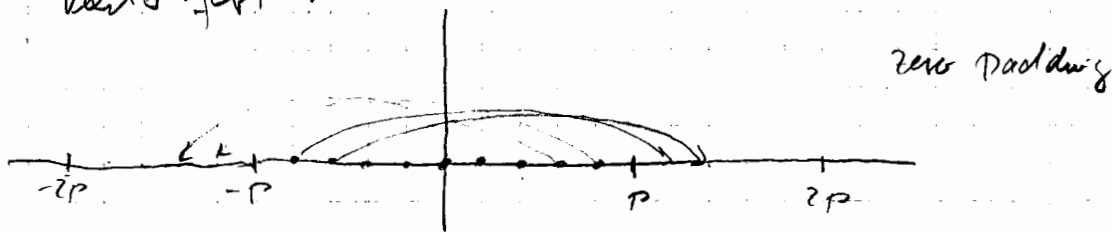
$$Y \rightarrow \hat{Y} \rightarrow \hat{Y} \hat{W} \rightarrow (W * Y)_k \rightarrow W * Y$$

$P^m \log P$ Operationen

Schnelle Faltung:

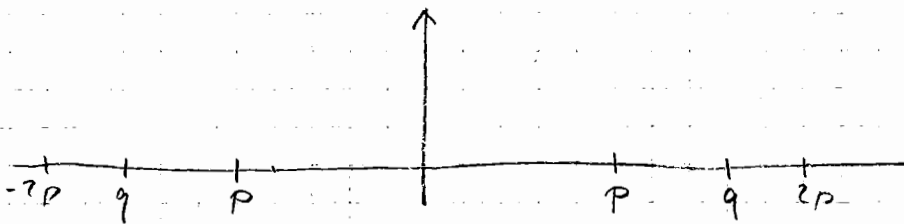
$$z_k = \sum_{l=0}^{2P-1} w_{k-l} Y_l, \quad Y_P = \dots = Y_{2P-1} = 0$$

Es treten nur w_{1-P} bis w_{P-1} auf. Setze w zu $2P$ -periodischen
Vektors fort:



Dann bekommt man eine zyklische Faltung der Länge $2P$.

Wrap around - Fehler: Bei unvollständiger zero-padding



$$z_k = \sum_{l=0}^{q-1} w_{k-l} Y_l, \quad Y_P = \dots = Y_{q-1} = 0$$

Rechenwert durch FT der Länge q wird halbiert, wenn w die Periode q
hat. $2(P-n+1) \leq q$

Für $\pi \leq k \leq P-n+1$ treten nur $w_{\pi-P+1}, \dots, w_{P-n+1}$ auf. Falls $2(P-n) \leq q$,
d.h. $\pi \geq P - \frac{q+1}{2}$, kann w zu q -periodisch Vektor fortgesetzt werden.

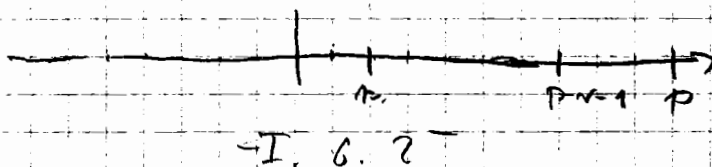
Setze nun die

$$z'_k = \sum_{l=0}^{q-1} w_{k-l} Y_l,$$

so ist dies eine zyklische Faltung der Länge q , und es gilt

$z'_k = z_k$ für $\pi \leq k \leq P-n+1$. Außerhalb dieses Intervalls

entsteht der periodische wrap around - Fehler:

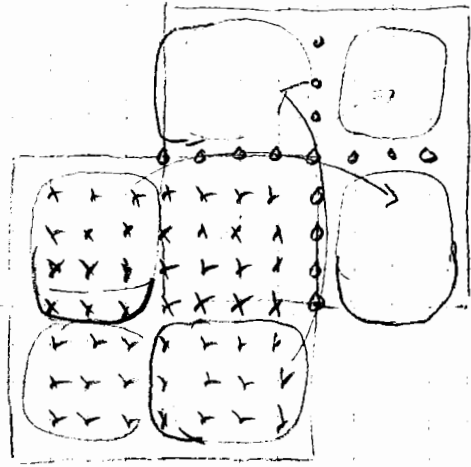
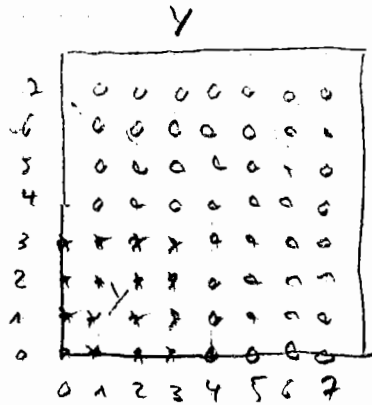


$P = 10$
 $n = 2$
 $q = 15$

Schnelle Faltung

2D:

$D=4$.



Teil II: Bildverarbeitung

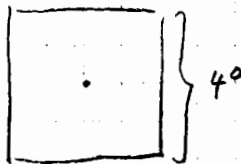
§1 Das menschliche Auge

Ziel: Mathematisches Modell des einfarbigen Sehens bei unbeweglichen Szenen

$I(x)$ = Intensität eines Bildes im Punkt x , also

$$I(x) = \frac{\text{Strahlungsenergie}}{\text{Zeiteinheit} \cdot \text{Flächeneinheit}}$$

x wird in Winkelgraden gemessen:



Bei 30 cm Abstand:

$$\text{Seitenlänge } 30 \text{ mm} \cdot 4 \frac{25}{360} \approx 2 \text{ cm}$$

7 Schritte:

1. Die Linse bildet $I(x)$ auf die Netzhaut ab und bewirkt gleichzeitig eine Tiefpass-Filtrierung:

$$\hat{I}_F(\xi) = \begin{cases} \hat{I}(\xi) & |\xi| < b \\ 0 & |\xi| > b \end{cases}$$

b wird in Zyklen/° mit etwa 64 angegeben. 1 Zyklen/° entspricht $e^{2\pi i x}$, d.h. für $x=1$ ist $b = 25.64 \approx 400$.

2. Die Sehzellen der Netzhaut sampeln I_F mit der Schrittweite $h = \frac{1}{120}^\circ$. Es ist $\frac{b}{h} = \frac{1}{120} \approx h$, die Nyquist-Bed. also näherungsweise erfüllt.

3. Übergang zum Gegenstand:

$$z = \ln I_F = \ln (I_0 + I_F - I_0)$$

$$= \ln I_0 + \frac{I_F - I_0}{I_0} + \dots$$

$$= \ln I_0 + \frac{I_F - I_0}{I_0} + \dots$$

Dadurch kann das Flug- oder Turbulenzbereich $1 - 10^4$ bearbeitet.
Empfindlichkeit: $\frac{T_F - T_0}{T_0} \approx 0,02$

4. Die weitere Verarbeitung folgt nach Frequenz getrennt in verschiedenen Kanälen:

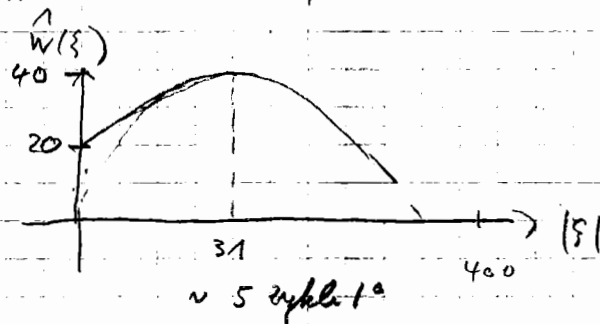
$$\hat{z}_k(\xi) = \begin{cases} \hat{z}(\xi) & , \quad |1 - p_k| < \alpha, \quad \alpha \approx 16 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bauprototypen!

5. In jedem der oben 12 Kanäle wird z_k mit einem Fakt. w_k multipliziert:

$$v_k = w_k z_k$$

Dies bedeutet, daß \hat{z} mit einer Funktion $\hat{w}(\xi)$ multipliziert wird: $w_k(\xi) = w_k$, $|1 - p_k| \leq \alpha$.

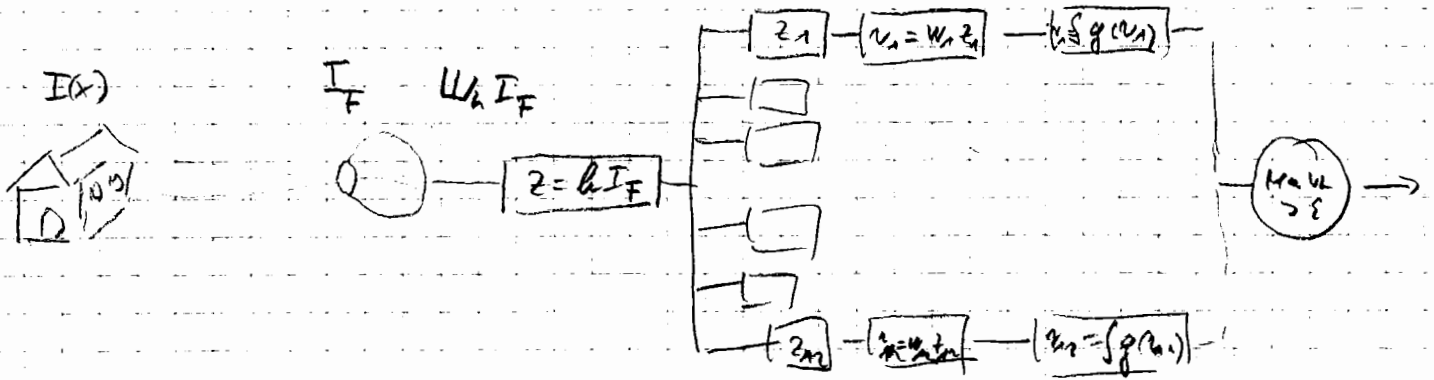


5 Zyklen pro Grad = 1 Zyklen pro 115 Grad, bei 30 m Abstand ist das 1. Zyklen auf $30 \cdot \sin \frac{1}{5}^\circ = 30 \cdot \sin \frac{1}{5} \frac{2\pi}{360} \approx \frac{\pi}{30} \approx 1 \text{ mm}$

6. In jedem Kanal wird $v_k = \int g(v_k) dt$ gebildet mit einer nichtlinearen Funktion g .

7. Übernehmen hier v_k einer gewissen Schwelle wird, so werden die v_k an der Logik weitergeleitet.

Schema :



2 Stochastische Bildmodelle von Bernoulli in Statistik:

1. Zufallsgrößen in \mathbb{R}^1

(Reale) Zufallsgröße $\xi = (\text{Wertwertiges}) \Rightarrow$ Experiment mit ungewissem Ausgang.

Nur die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs ist bekannt:

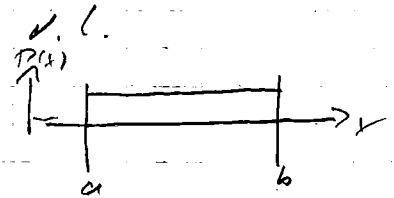
$$P(x \leq \xi \leq x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} P(x) dx, \quad P \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$$

P heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von ξ .

Realisierung von ξ : konkretes Resultat des Experiments.

Beispiel 1) ξ gleichverteilt in $[a, b]$, d.h.

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

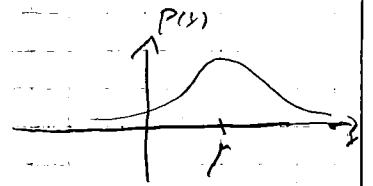


$$P(x \leq \xi \leq x+\Delta x) = \frac{\Delta x}{b-a}, \quad a \leq x \leq x+\Delta x \leq b$$

2) ξ (μ, σ) -Normalverteilt, d.h.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

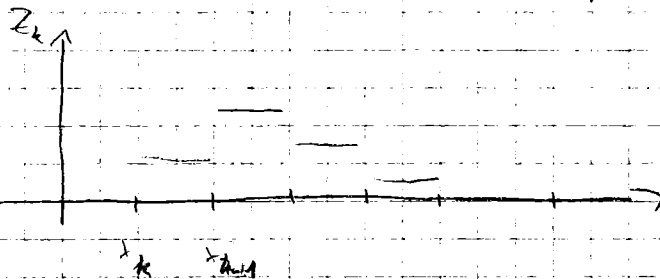
μ Mittelwert, σ Standardabweichung.



Verteilungssystem: Unterteile die x -Achse durch Punkte x_k und führe

Experiment m -mal durch. Dies ergibt die Realisierungen ξ^1, \dots, ξ^m von ξ .

$$z_k = \frac{\#\{e: x_k \leq \xi^e < x_{k+1}\}}{m(x_{k+1} - x_k)}$$



Wegen $P(x_k \leq \xi < x_{k+1}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx \sim P(x_k)(x_{k+1} - x_k)$

erwarten wir:

$$P(x_k) \sim z_k$$

Erwartungswert: $E\xi = \int x P(x) dx$

$$\sim \sum_k x_k P(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\sim \sum_k x_k z_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_k x_k \#\{\omega : x_k \leq \xi < x_{k+1}\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\omega=1}^n x_{k_\omega}, \quad x_{k_\omega} \leq \xi < x_{k_\omega+1}$$

$$\sim \frac{1}{n} \sum_{\omega=1}^n \xi^\omega$$

Ist F eine Funktion, so ist mit ξ auch $F(\xi)$ Zufallsgröße.

$$E F(\xi) = \int F(x) P(x) dx \sim \frac{1}{n} \sum_{\omega=1}^n F(\xi^\omega)$$

Varianz: $\sigma^2(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = \int (x - E(\xi))^2 P(x) dx$

$$\sim \frac{1}{n} \sum_{\omega=1}^n (\xi^\omega - E(\xi))^2$$

$\sigma(\xi)$ Standardabweichung.

Beispiel: 1) $E(\xi) = \frac{b-a}{2}$, $\sigma(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ 2) $E(\xi) = 1$, $\sigma(\xi) = \sigma$.

2. Zufallsgrößen in \mathbb{R}^m .

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \quad \xi_j \text{ Zufallsgrößen in } \mathbb{R}^1.$$

$$P(\xi \in B) = \int_B P(x) dx$$

P Dichte von ξ oder gemeinsame Dichte von ξ_1, \dots, ξ_m .

Die gemeinsame Dichte von ξ_1, \dots, ξ_n legt die Dichte P_i jedes ξ_i fest

$$P(x_1 \leq \xi_1 \leq x_1 + \Delta x_1) = P(\xi \in B) \quad \text{mit } B = [x_1, x_1 + \Delta x_1) \times \mathbb{R}^{n-1}$$

$$= \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x_1, x') \, dx' \, dx_1$$

v.l.

$$P_i(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x_i, x') \, dx'$$

Genau so ergeben sich die gemeinsamen Dichte P_{ij} von ξ_i und ξ_j aus P .

Umgekehrt ist dies nicht der Fall, v.l. P_{12}, \dots, P_n bestimmen nicht

P .

$$\xi_1, \dots, \xi_n \text{ unabhängig} \Leftrightarrow P(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1) \cdots P_n(x_n)$$

$$\Leftrightarrow \underline{P}(x_i \leq \xi_i < x_i + \Delta x_i, i=1, \dots, n) = \prod_{i=1}^n \underline{P}(x_i \leq \xi_i < x_i + \Delta x_i)$$

Mit ξ_1, \dots, ξ_n ist auf $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein Zufallsvektor, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$E F(\xi) = \int F(x) P(x) \, dx$$

Inbesondere:

$$\mu = E \xi = \int_{\mathbb{R}^n} x P(x) \, dx \in \mathbb{R}^m$$

$$\mu_i = E \xi_i = \int_{\mathbb{R}^n} x_i P(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_i P_i(x_i) \, dx_i$$

$$\text{Kovarianz: } \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i - E(\xi_i))(\xi_j - E(\xi_j))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) P(x) \, dx$$

$$\sigma^2(\xi_i) = \text{Cov}(\xi_i, \xi_i)$$

$$\text{Korrelationskoeffizient: } \rho(\xi_i, \xi_j) = \frac{\text{Cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sigma(\xi_i) \sigma(\xi_j)}$$

Er gilt $-1 \leq \rho(\xi_i, \xi_j) \leq +1$.

Bew: Führe inneres Produkt $(f, g) = \int f g$ über ein

$$f(x) = x_i - \mu_i, \quad g(x) = x_j - \mu_j$$

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \frac{(f, g)}{(f, f)^{1/2} (g, g)^{1/2}}$$

Das Resultat folgt mit Cauchy-Schwarz. \square

ξ_i, ξ_j heißen $\left. \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{un-} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$ korreliert, wenn $\rho(\xi_i, \xi_j) \left. \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right\}$

Die Kovarianzen und die Korrelationskoeffizienten der

Covarianz- und die Korrelationsmatrix von ξ . Die Kovarianzmatrix ist positiv semidefinit (symmetrische Matrix).

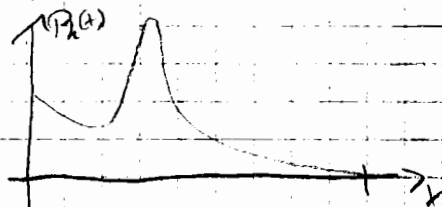
Stoch. Bed. Modelle: Der Erwartungswert jeder Prizel ist ein Zufallsgröße, dies werden zur Zufallsgröße $f = (f_1, \dots, f_N)^T$, $N = \# \text{Prizel}$, zusammengefasst.

In der Regel: Alle f_k haben die gleiche Verteilung.

$$\mu = E f_k, \quad \sigma^2 = E (f_k - \mu)^2$$

Die Kovarianzmatrix (und damit die Korrelationsmatrix) ist positiv definit.

Fazit 1: Die Verteilung der f_k ist sehr ungleichförmig!



Fazit 2: Bezahlbare Prizel sind hoch korreliert!

$$(\rho \approx 0.85 - 0.95)$$

Exponentialisches Modell: $p(f_k, f_e) = \sigma^2 e^{-\lambda \|f_k - f_e\|_2}$

Exponentialisches repariertes Modell: $p(f_k, f_e) = \sigma^2 e^{-\lambda \|f_k - f_e\|_1}$

$x_k =$ Mittelwert von Prozess k .

§ 3 Effiziente Kodierung von Bildern (Datenreduktion)

Problem: Bild $f = (f_1, \dots, f_N)$ durch ein anderes $g = (g_1, \dots, g_M)$ zu ersetzen, das

1. f aus g mit tolerierbarem Fehler wieder zu rekonstruieren ist
2. g weniger Information enthält als f (z.B. $M < N$ oder viele der g_k haben einen bekannten Wert (z.B. 0), der nicht übermittelt werden muss).

(Bandbreitenreduktion)

Heuristische Methoden:

1. Run - Coding.

In der Folge f gibt es häufig "runs", d.h. $f_k = f_{k+1} = \dots = f_{k+l}$ (Gleichheit innerhalb tolerierbarer Genauigkeit).
Man speichert dann statt f_k, \dots, f_{k+l} das Paar $(l-k, f_k)$.

2. Predictive Coding.

Annahme: $\mu = E f_k$, $\rho = \rho(f_k, f_{k+1})$, $\sigma = \sigma(f_k)$

Schätzung für f_{k+1} nach Kodierung von f_k :

$$\hat{f}_{k+1} = \rho f_k + (1-\rho)\mu \quad (\text{DPCM = differential pulse code modulation})$$

Statt f_{k+1} wird nun $f_{k+1} - \hat{f}_{k+1} = d_{k+1}$ übertragen.

$$\begin{aligned} E d_{k+1}^2 &= E (f_{k+1} - \rho f_k - (1-\rho)\mu)^2 \\ &= E (f_{k+1} - \mu - \rho(f_k - \mu))^2 \\ &= \sigma^2 + \rho^2 \sigma^2 - 2\rho \text{Cov}(f_{k+1}, f_k) \\ &= \sigma^2 + \rho^2 \sigma^2 - 2\rho \rho(f_{k+1}, f_k) \sigma^2 \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 (1 - \rho^2)$$

$$E d_{k+1} = \mu - \rho(\mu - (1-\rho)\mu) = 0$$

$$\text{Faktor: } \frac{\sigma(d)}{\sigma(f)} = \left(\frac{\sigma^2 (1-\rho^2)}{\sigma^2} \right)^{1/2} = \sqrt{1-\rho^2} < 1$$

($\rho = 0.9$, $\sqrt{1-\rho^2} \approx 0.5$, praktisch wird ein Reduktionsfaktor von der Faktor 1/2 erreicht)

Transformationsmethoden:

() Sei U unitäre (N, N) -Matrix

$$1) \quad g = U f$$

$$2) \quad g^M = \begin{cases} g_k, & k=1, \dots, M \\ b_k, & k=M+1, \dots, N \end{cases} \quad \text{Codieren}$$

$$3) \quad f^M = U^* g^M \quad \text{Rekonstruieren}$$

Satz 3.1: Sei $f = (f_1, \dots, f_N)^T$ ein Vektor mit

$E f = \mu$ und der Kovarianzmatrix K_f . Sei $b = U \mu$.

Dann gilt

$$E \|f - f^M\|^2 = \sum_{i=M+1}^N u_i^T K_f u_i, \quad U = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_N^T \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$f - f^M = f - U^* g^M = U^* (g - g^M) = \sum_{k=M+1}^N (g_k - b_k) u_k$$

$$\begin{aligned} \|f - f^M\|^2 &= \sum_{k=M+1}^N (g_k - b_k)^2, \quad b_k = u_k^* \mu, \quad g_k = u_k^* f \\ &= \sum_{k=M+1}^N u_k^* (f - \mu) (f - \mu)^* u_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \|f - f^M\|^2 &= \sum_{k=M+1}^N u_k^* E (f - \mu)(f - \mu)^* u_k \\ &= \sum_{k=M+1}^N u_k^* K_f u_k \quad \square \end{aligned}$$

Ziel: Wähle U so, dass $E \|f - f^M\|^2$ möglichst klein!

Satz 3.2: Seien f, f^M wie in Satz 3.1. Seien $V_f = (v_1, \dots, v_N)$ die normierten Eigenvektoren und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ die Eigenwerte der Kovarianzmatrix von f . Dann ist

$$\min_{\substack{U \\ U^*U=I}} E \|f - f^M\|^2 = \lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N$$

und das Minimum wird für $U = V_f^T$ angenommen.

Bemerkung: 1) Die Transformation $g = V_f^T f$ heißt Karhunen-Loève-Transformation oder Hotelling-Transformation zu V_f .
2) $f^M = V_f g^M = \sum_{i=1}^M v_i g_i$, v_i "Basis-Rücken".

Beweis: 1. Nach Satz 3.1 ist zu zeigen:

$$\min_{\substack{U \\ (u_i, u_h) = \delta_{ih} \\ i, h = M+1, \dots, N}} \sum_{i=M+1}^N u_i^* K_f u_i = \lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N$$

(a) $M=0$. Dann ist für $(u_i, u_h) = \delta_{ih}$, $i, h = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i^T K_f u_i &= \text{Spur}(U K_f U^T) = \text{Spur}(K_f) \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_N \end{aligned}$$

(b) $M > 0$. Durch Einsetzen der Lagrange-Multiplikatoren finden wir, dass die u_i stationär sind von

$$\sum_{i=M+1}^N u_i^* K_f u_i - \sum_{i, h=M+1}^N B_{ih} (u_i^* u_h - 1)$$

sein müssen.

Bilden wir die Lagrange-Funktion nach u_e , so erhalten wir:

$$2 K_f u_e - \sum_{i=M+1}^N (\lambda_i + \mu_i) u_i = 0, \quad e = M+1, \dots, N$$

Die optimalen Vektoren bilden also einen invarianten Unterraum von K_f der Dimension $N-M$. Dieser hat notwendig die Gestalt

$W = \text{sp} \{ v_1, \dots, v_{N-M} \}$ mit gewissen Eigenvektoren von K_f .
Wir haben also

$$\begin{aligned} \min_{\substack{u_i^* u_i = \delta_{ik} \\ i, k = M+1, \dots, N}} \sum_{i=M+1}^N u_i^* K_f u_i &= \min_{\substack{u \in V \\ u_i^* u_i = \delta_{ik} \\ i, k = M+1, \dots, N}} \sum_{i=M+1}^N u_i^* K_f u_i \end{aligned}$$

Hier können wir K_f durch seine Restriktion K_W auf W ersetzen. K_W hat die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-M}$. Also gilt nach (a)

$$= \lambda_1 + \dots + \lambda_{N-M}$$

Dies wird offenbar minimal für $W = \text{sp} \{ v_{M+1}, \dots, v_N \}$. \square

Beispiel 1) Die diskrete Cosinus-Transformation (DCT).

Wir gehen aus von der DFT der Länge $2N$:

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-\pi i k l / 2N} \sum_{l=-N}^{N-1} e^{-\pi i k l / 2N} f_l, \quad k = -N, \dots, N-1$$

mit geringfügig geänderter Normierung und Phase. Diese Transformation ist unitär. Wenn nehmen wir f symmetrisch an, genauer $f_l = f_{-l-1}$, $l = -1, \dots, -N$. Dann ist

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{l=-N}^{N-1} e^{-\pi i k (l+1/2) / N} f_l$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N}} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} e^{-\pi i k (l+1/2)/N} f_l + \sum_{l=-1}^{-N} e^{-\pi i k (l+1/2)/N} f_l \right\}$$

$$= \sum_{l=-1}^{-N} e^{-\pi i k (l+1/2)/N} f_{l-N}$$

$$\begin{aligned} -l-1 &= l' \\ l+1 &= -l' \\ l &= -\frac{1}{2} - (l'+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} e^{\pi i k (l+1/2)/N} f_l$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \cos \pi k (l+1/2)/N f_l$$

Offensichtlich sind die g_k gerade, und $g_N = 0$. Das ist

$$\sum_{k=-N}^{N-1} |g_k|^2 = |g_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} |g_k|^2 = \sum_{k=-N}^{N-1} |f_k|^2 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$$

$$\frac{1}{2} |g_0|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} |g_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$$

Dannad ist

$$g_k = C_k \sum_{l=0}^{N-1} \cos \pi k (l+1/2)/N f_l, \quad C_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k=0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & k>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g = Uf$$

ein unitäre Transformation. Sie heißt DCT (Discrete Cosinus-Transformation) U . Sie hat folgende interessante Eigenschaften:

Satz 3.3: Sei $K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho^{N-1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$KU^T = U^T \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \mathcal{D} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} + \mathcal{D}$$

mit $\lambda_k = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos k\pi/N}$ und $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{k\ell})_{k,\ell=0, \dots, N-1}$,

$$\mathcal{D}_{k\ell} = (\rho-1) \frac{\rho^{\ell+1} + (-1)^k \rho^{N-\ell}}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos k\pi/N} \cos \ell\pi/N = -\frac{\lambda_k}{1+\rho} \left(\rho^{\ell+1} + (-1)^k \rho^{N-\ell} \right) \cos k\pi/N$$

$$|\mathcal{D}_{k\ell}| \leq 2 \lambda_k$$

Beweis:

$$v = U u_k, \quad C = \begin{pmatrix} v_0^T \\ \vdots \\ u_{n-1}^T \end{pmatrix}, \quad u_k = \begin{pmatrix} \cos k(\ell + \frac{1}{2})\pi / m \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad k=0, \dots, m-1$$

$$v_m = \sum_{\ell=0}^{m-1} \rho^{m-\ell-1} \cos k(\ell + \frac{1}{2})\pi / m, \quad m=0, \dots, m-1$$

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \rho^{m-\ell-1} e^{ik(\ell + \frac{1}{2})\pi / m}$$

$$\sum_{\ell=m}^{m-1} \rho^{\ell} = \frac{\rho^m - \rho}{1 - \rho}$$

$$= \sum_{\ell=m}^{m-1} \rho^{m-\ell-1} e^{ik(\ell + \frac{1}{2})\pi / m} + \sum_{\ell=0}^{m-1} \rho^{m-\ell-1} e^{ik(\ell + \frac{1}{2})\pi / m}$$

$$= \rho^{-m} e^{ik\pi/2m} \sum_{\ell=m}^{m-1} (\rho e^{ik\pi/m})^{\ell} + \rho^m e^{ik\pi/2m} \sum_{\ell=0}^{m-1} (\frac{1}{\rho} e^{ik\pi/m})^{\ell}$$

$$= \rho^m e^{ik\pi/2m} \frac{\rho^m e^{ik\pi m/m} - \rho^m (-1)^k}{1 - \rho e^{ik\pi/m}} + \rho^m e^{ik\pi/2m} \frac{1 - \rho^{-m} e^{ik\pi m/m}}{1 - \frac{1}{\rho} e^{ik\pi/m}}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \rho e^{ik\pi/m}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho} e^{ik\pi/m}} \right) e^{ik\pi(m+\frac{1}{2})/m} + \left(\frac{\rho^m}{1 - \frac{1}{\rho} e^{ik\pi/m}} - \frac{(-1)^k \rho^{-m}}{1 - \rho e^{ik\pi/m}} \right) e^{ik\pi/2m}$$

$$= \frac{(\rho - \frac{1}{\rho}) e^{ik\pi/m}}{1 - (\rho + \frac{1}{\rho}) e^{ik\pi/m} + e^{ik\pi}} + \frac{(\rho - (-1)^k \rho^{-1}) e^{ik\pi(m+\frac{1}{2})/m}}{1 - (\rho + \frac{1}{\rho}) e^{ik\pi/m} + e^{ik\pi}}$$

$$= \frac{(\rho - \frac{1}{\rho})}{2 \cos k\pi/m - (\rho + \frac{1}{\rho})} e^{ik\pi(m+\frac{1}{2})/m} + \frac{(\rho - (-1)^k \rho^{-1}) e^{-ik\pi/2m} - (\rho - (-1)^k \rho^{-1}) e^{ik\pi/2m}}{2 \cos k\pi/m - (\rho + \frac{1}{\rho})}$$

$$v_m = \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \lambda_k u_{km} + d_k, \quad d_{km} = \frac{\rho^{-m+1} (-1)^k \rho^{-m-m} - (\rho^{-m+1} \rho^{-m} - (\rho^{-m+1} \rho^{-m})) \cos k\pi/2m}{\rho + \frac{1}{\rho} - 2 \cos k\pi/m}$$

$$= \frac{\rho^{-m} (\rho - 1) + (-1)^k \rho^{-m-m} (1 - \rho)}{\frac{1}{\rho} (\rho^2 + 1 - 2 \rho \cos k\pi/m)} \cos k\pi/2m = (\rho - 1) \frac{\rho^{-m+1} + (-1)^k \rho^{-m-m}}{\rho^2 + 1 - 2 \rho \cos k\pi/m}$$

$$v_{km} = \sum_{l=0}^{M-1} \rho^{|m-l|} \underbrace{C_k \cos k(l+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{N}}_{u_{kle}}$$

$$v_{ek} = \sum_{m=0}^{N-1} \rho^{|k-m|} u_{ekm}$$

$$= \lambda_k \underbrace{C_k \cos k(m+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{N}}_{u_{kmm}} - \frac{\lambda_k C_k}{1+\rho} (\rho^{m+1} + (-1)^k \rho^{N-m}) \cos k\pi/N$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} C_k \cos k(m+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{N} v_{km} = \lambda_k \delta_{ke} - \frac{\lambda_k C_k \cos k\pi/N}{1+\rho} \sum_{m=0}^{N-1} \cos k(m+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{N} (\rho^{m+1} + (-1)^k \rho^{N-m})$$

$$= \lambda_k \delta_{ke} - \frac{\lambda_k C_k \cos k\pi/N}{1+\rho} \left\{ \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} u_{ekm} \rho^m}_{v_{e0}} + (-1)^k \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} u_{ekm} \rho^{N-1-m}}_{v_{e,N-1}} \right\}$$

$$v_{e0} = \lambda_e C_e \cos \frac{k\pi}{2N} - \frac{\lambda_e C_e}{1+\rho} (\rho + (-1)^k \rho^N) \cos \frac{k\pi}{2N}$$

$$v_{e,N-1} = \lambda_e C_e \underbrace{\cos k \frac{(N-1)\pi}{N}}_{(-1)^k \cos \frac{k\pi}{2N}} - \frac{\lambda_e C_e}{1+\rho} (\rho^N + (-1)^k \rho) \cos \frac{k\pi}{2N}$$

$$v_{e0} = \lambda_e C_e \cos \frac{k\pi}{2N} \left(1 - \frac{\rho + (-1)^k \rho^N}{1+\rho} \right) \quad (1) = \frac{1 - (-1)^k \rho^N}{1+\rho}$$

$$v_{e,N-1} = \lambda_e C_e \cos \frac{k\pi}{2N} \left((-1)^k - \frac{\rho^N + (-1)^k \rho}{1+\rho} \right) \quad (1) = \frac{(-1)^k - \rho^N}{1+\rho}$$

$$= \lambda_k \delta_{ke} - \rho \frac{\lambda_k C_k \lambda_e C_e \cos \frac{k\pi}{2N} \cos \frac{k\pi}{2N}}{(1+\rho)^2} \left\{ \underbrace{1 - (-1)^k \rho^N + (-1)^{k+l} (1 - (-1)^k \rho^N)}_{(1 - (-1)^k \rho^N) (1 + (-1)^{k+l})} \right\}$$

$$U_k U^T = \Lambda - D,$$

$$|d_{kk}| \leq \frac{\rho \rho}{(1+\rho)^2 N} \lambda_k \lambda_e$$

$$k, l = 1, \dots, N-1$$

	0.324	0.471	0.470	0.429	0.367	0.289	0.199	0.102
	0.349	0.425	0.221	-0.073	-0.340	-0.486	-0.463	-0.280
	0.366	0.294	-0.167	-0.482	-0.358	0.091	0.459	0.415
KL	0.374	0.105	-0.450	-0.279	0.349	0.415	-0.189	-0.489
	0.374	-0.105	-0.450	0.279	0.349	-0.415	-0.189	0.489
	0.366	-0.294	-0.167	0.482	-0.358	-0.091	0.459	-0.415
	0.349	-0.425	0.221	0.073	-0.340	0.486	-0.463	0.280
	0.324	-0.471	0.470	-0.429	0.367	-0.289	0.199	-0.102

	0.354	0.490	0.462	0.416	0.354	0.278	0.191	0.098
	0.354	0.416	0.191	-0.098	-0.354	-0.490	-0.462	-0.278
	0.354	0.278	-0.191	-0.490	-0.354	0.098	0.462	0.416
DCT	0.354	0.098	-0.462	-0.278	0.354	0.416	-0.191	-0.490
	0.354	-0.098	-0.462	0.278	0.354	-0.416	-0.191	0.490
	0.354	-0.278	-0.191	0.490	-0.354	-0.098	0.462	-0.416
	0.354	-0.416	0.191	0.098	-0.354	0.490	-0.462	0.278
	0.354	-0.490	0.462	-0.416	0.354	-0.278	0.191	-0.098

KL	6.203	1.007	0.330	0.165	0.104	0.076	0.061	0.055
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

DCT	19.000	1.292	0.354	0.169	0.105	0.076	0.062	0.055
-----	--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

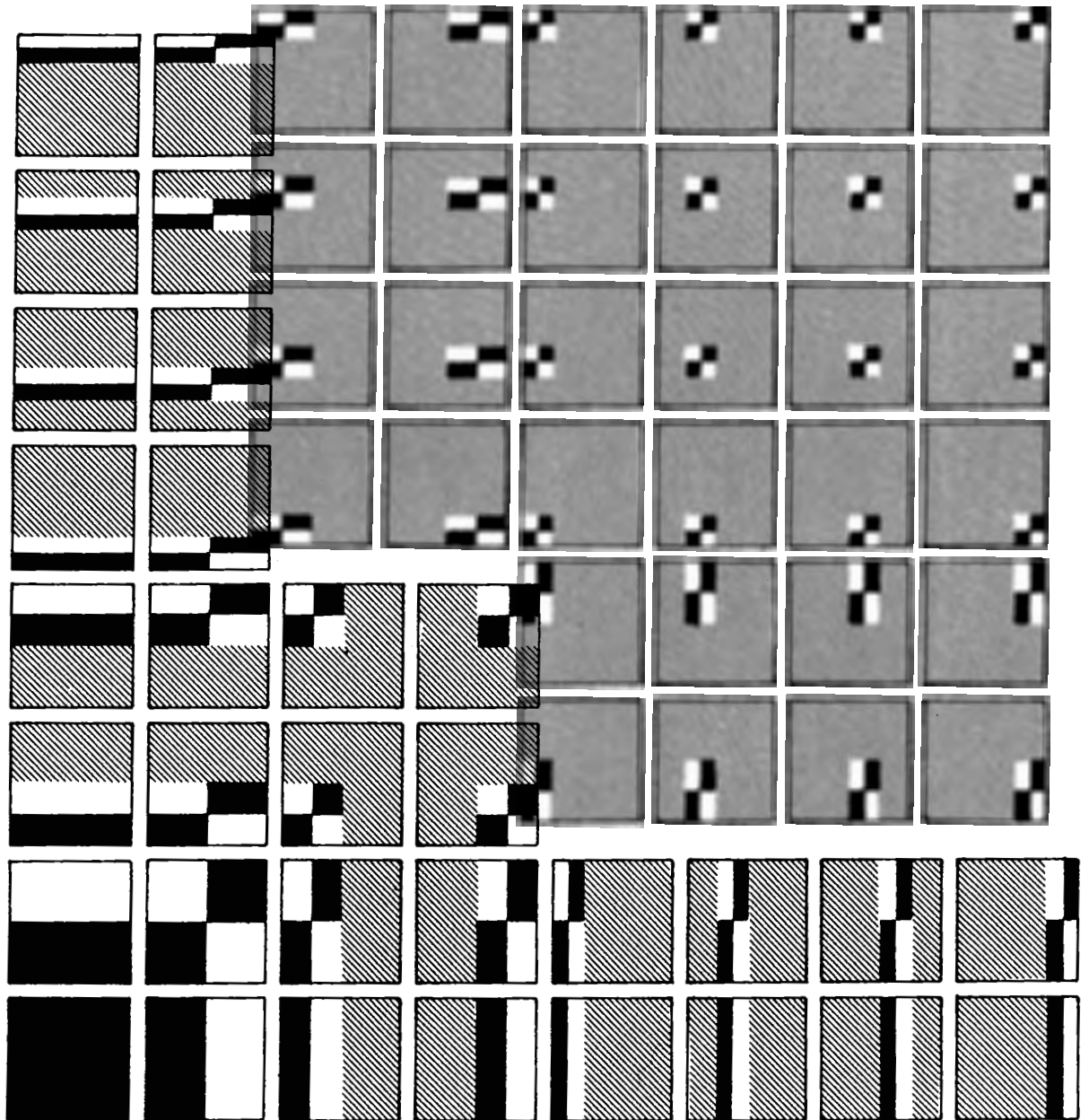


FIGURE 10.6-2. Haar transform basis planes for $N=8$. Black = +1; white = -1; cross-hatched = 0.

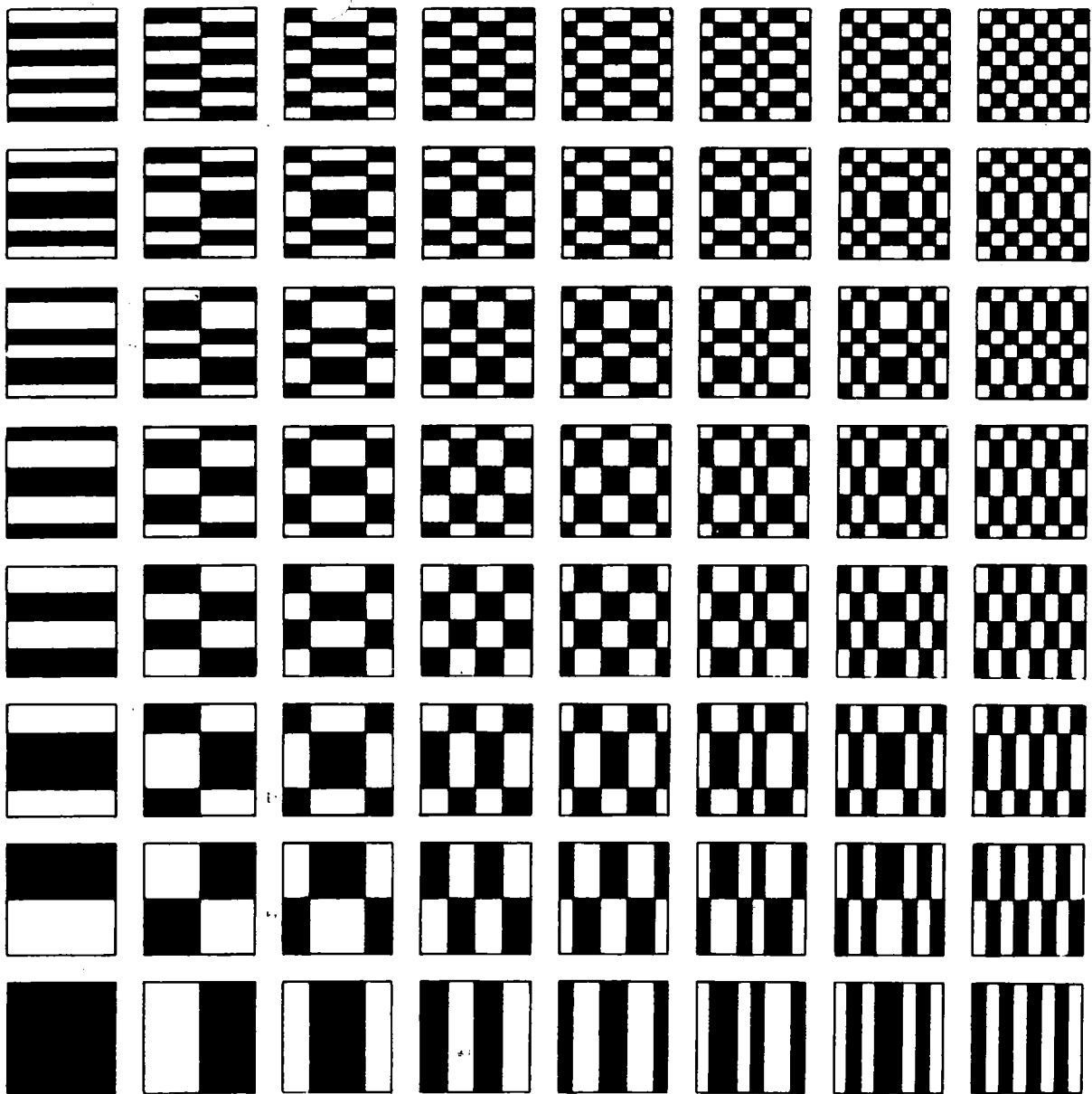


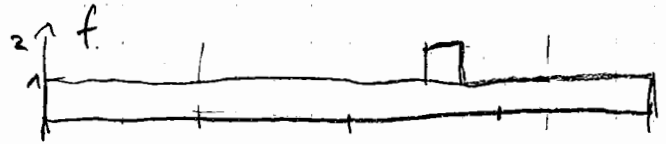
FIGURE 10.5-3. Hadamard transform basis planes for $N=8$. Black = +1; white = -1.

$N=16$

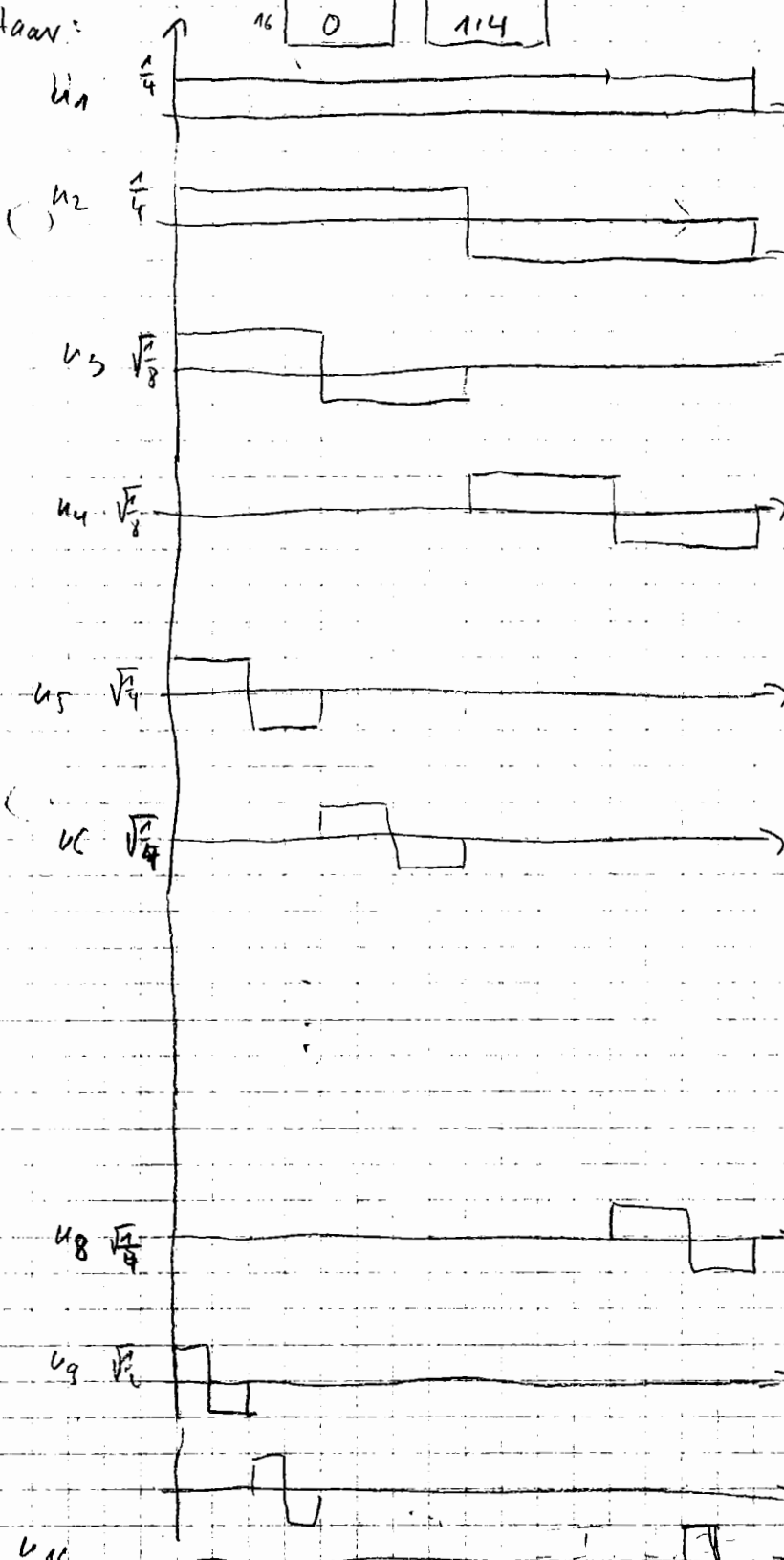
$f = H_{16} g =$

$g =$

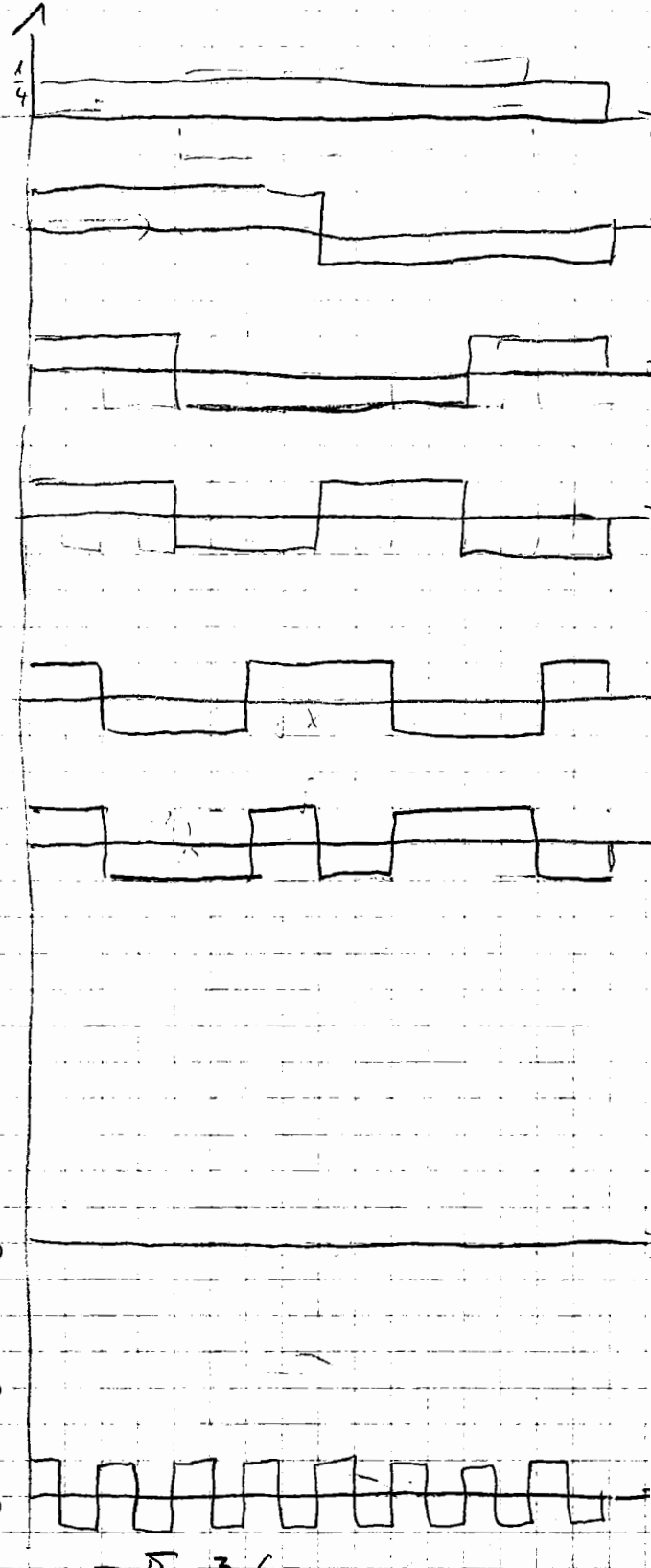
	Haar	Hadamard
1	1/4	1/4
2	-1/4	-1/4
3	0	-1/4
4	$\sqrt{2}$	1/4
5	0	-1/4
6	8	.
7	-1/2	.
8	0	.
9	0	.
10	0	.
11	0	.
12	0	.
13	0	.
14	$\sqrt{2}$.
15	0	.
16	0	1/4



Haar:



Hadamard:



2) Die Hadamard-Transformierte

H_N Hadamard-Matrix von Ordnung N , $U = N^{-1/2} H_N$

$$H_{2N} = \begin{pmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Basenbilder von $U \otimes U$ in Prax zeigen.

3) Die Haar-Transformierte

$$H_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$N=8=2^P, P=3$

$U = D H_N, D^2 = I$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 8 & & & & & & & \\ & 4 & & & & & & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Basen-Bilder von $U \otimes U$ in Prax zeigen.

Schnelle Haar-Transformierte: $g = D^2 H_N f$

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8				
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8				
$f_1 + f_2$	$f_1 - f_2$	$f_3 + f_4$	$f_3 - f_4$	$f_5 + f_6$	$f_5 - f_6$	$f_7 + f_8$	$f_7 - f_8$				
$f_1 + f_2 + f_3 + f_4$	$f_1 + f_2 - f_3 - f_4$	$f_5 + f_6 + f_7 + f_8$	$f_5 + f_6 - f_7 - f_8$								
$f_1 + f_2 + f_3 - f_4$	$f_1 + f_2 - f_3 + f_4$	$f_5 + f_6 + f_7 - f_8$	$f_5 + f_6 - f_7 + f_8$								
$f_1 + f_2 - f_3 - f_4$	$f_1 - f_2 + f_3 + f_4$	$f_5 + f_6 - f_7 - f_8$	$f_5 - f_6 + f_7 + f_8$								
$f_1 - f_2 + f_3 - f_4$	$f_1 - f_2 - f_3 + f_4$	$f_5 - f_6 + f_7 - f_8$	$f_5 - f_6 - f_7 + f_8$								

Die Haar-Transformierte als Wavelet-Transformierte:

$$L_P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_P^{-1} = 2 L_P^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_P L_P^{-1} = I_{2^P}$$

Blurring / Glättung / Reduktion
fine-to-coarse

Erweiterung
coarse-to-fine

$$H_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_p H_p^T = I_{2^p-1}$$

$$H_p^T = 2 H_p =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_p^T H_p = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_p^T H_p + L_p^T L_p = I_{2^p}$$

$$H_p^T L_p = O_{2^p-1}$$

Codierung:

$$f^p = f$$

$$f^{j-1} = L_j f^j, \quad j = p, \dots, 1$$

$$g^j = H_j g^{j-1}$$

$$\Rightarrow f^0, g^0, \dots, g^{p-1}$$

$$1 + 1 + 2 + \dots + 2^{p-1} = 2^p = N \text{ Komponenten}$$

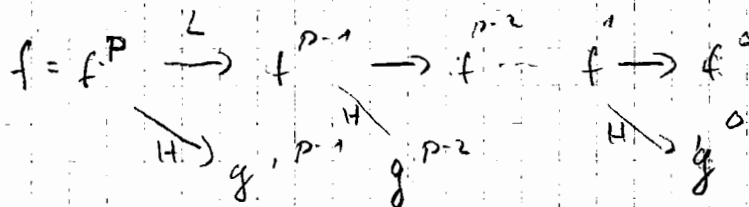
Rekursionsrelation:

$$f^j = (H_j^T H_j + L_j^T L_j) f^j = H_j^T g^{j-1} + L_j^T f^{j-1}, \quad j = 1, \dots, p$$

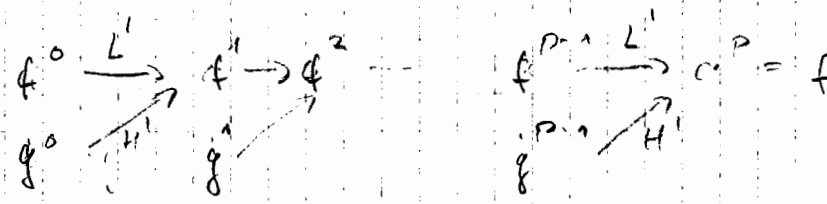
Pyramiden-

Dies nennt man Mallot's Algorithmus:

Codierung:



Rekursionsrelation:



$$d^{j-1} = f^j - L_j^T g^{j-1} = (I - L_j^T L_j) f^j$$

Detail der Stufe j-1

Rekursive Block-Codierung (RBC):

1D: $f = (f_0, \dots, f_N)$ $E f_k = \mu$ $\sigma^2(f_k) = \sigma^2$, $\rho_{he} = \rho$ ^{1h-el}

$$\hat{f}_k = \alpha f_{k-1} + \beta f_{k+1} + \gamma$$

$$d_k = f_k - \hat{f}_k$$

Bestimme α, β, γ so, dass $E d_k^2$ minimal. O.B.d.A.: $\mu = 0$.

$$\alpha = \beta, \gamma = 0$$

$$E d_k^2 = \sigma^2 (1 + 2\alpha^2 - 2\alpha\rho + 2\alpha^2\rho^2), \text{ minimal f\u00fcr } \alpha = \frac{\rho}{1+\rho^2}$$

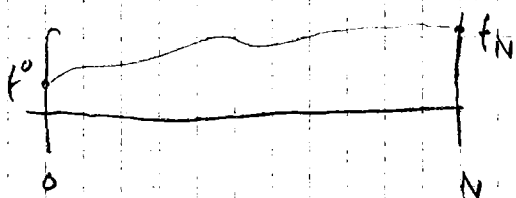
$$E d_k^2 = \sigma^2 \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$$

$$f_k = \hat{f}_k - d_k = \alpha (f_{k-1} + f_{k+1}) + d_k \quad k=1, \dots, N-1$$

$$Tf = b + d, \quad b = \begin{pmatrix} -\alpha f_0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha f_N \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & & \\ -\alpha & 1 & -\alpha & & & \\ & -\alpha & \dots & -\alpha & & \\ & & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\rho}{1+\rho^2} \leq \frac{1}{2}$$



Preis abtast h

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2ah^2} T f \right)_k &= \frac{1}{h^2} (-f_{k-1} + \frac{1}{2} f_k + \frac{1}{2} f_{k+1}) \\ &= \frac{1}{h^2} (-f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1}) + \left(\frac{\frac{1}{2}-2}{h^2} \right) f_k \end{aligned}$$

Codierung: $f \rightarrow Tf, f_0, f_N$

Rekonstruktion: Gebe $Tf = b + d$

$$-f'' + q \cdot f = \frac{d}{ah^2}$$

$f(0), f(N)$ gegeben

a) Derscht: $O(N)$ Operationen

b) Nach Aufgabe 25: $U^T T U = \Lambda, \lambda_k = 1 + 2\alpha \cos \frac{k\pi}{N}$
 U DST.
 $k=1, \dots, N-1$

$$\lambda = \frac{1+2a+2b}{1+b} = \frac{1+2a+2b}{1+b}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + b \right) \left(f_{k_1, k_2} - \alpha (f_{k_1, k_2-1} + f_{k_1, k_2+1}) + \beta (f_{k_1, k_2-2} + f_{k_1, k_2+2}) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2a} + b \right) f_{k_1, k_2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\alpha} \right) (f_{k_1, k_2-1} + f_{k_1, k_2+1}) + \frac{1}{\beta} (f_{k_1, k_2-2} + f_{k_1, k_2+2})$$

$$+ \frac{1}{f_{k_1, k_2-1} - f_{k_1, k_2}} + \frac{1}{f_{k_1, k_2+1} - f_{k_1, k_2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + b f = \frac{(f_{k_1, k_2} - f_{k_1, k_2-1}) - (f_{k_1, k_2} - f_{k_1, k_2+1})}{f_{k_1, k_2} - f_{k_1, k_2-1}} + \frac{1}{f_{k_1, k_2+1} - f_{k_1, k_2}} + \frac{1}{f_{k_1, k_2-1} - f_{k_1, k_2}}$$

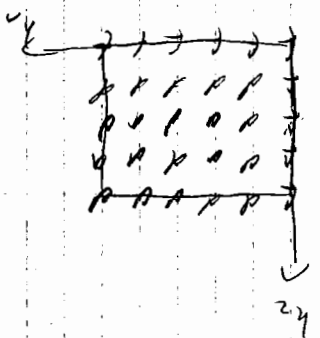
$$f_{k_1, k_2} = \alpha (f_{k_1, k_2-1} + f_{k_1, k_2+1}) - \beta (f_{k_1, k_2-2} + f_{k_1, k_2+2}) + \alpha_{k_1, k_2}$$

Dr. Albrecht: 2. Ordnung: Rekurrenz

fr. bedingt fr. $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$.

Rekurrenzbedingung: $f_k = \sum_{\pm 0} \alpha f_{k \pm 1} + \alpha k, k_1, k_2 > 0$

Codierung: $f_k \rightarrow \sum_{\pm 0} \alpha f_{k \pm 1} = \alpha k, k_1, k_2 > 0$

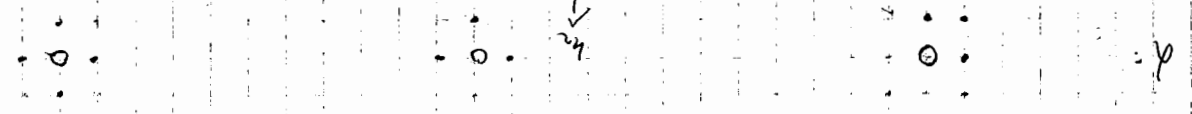


1) Vorne.

$$d_{k_1} = 0, k_1 \text{ oder } h_2 > 0 \quad d_k = 0, k_2 > 0$$

haupteck \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow

quadrat-haupteck



2D: $f_k = \sum_{\pm 0} \alpha f_{k \pm 1} = \alpha k, k_1, k_2 > 0$

Def: $f = T^{-1} (b + \alpha f) = U \cdot V \cdot U^{-1} (b + \alpha f) = U g$

Cod: $g = V^{-1} U^{-1} (b + \alpha f) = U^{-1} f$

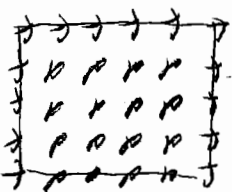
$$d = T f - b = U V U^{-1} f - b$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} \right) dx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + a \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + b f = \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} \right) dx$$

2) Separation, Lagrange-Methode, Ansatz mit h_1, h_2 Einfeld, $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} f &\rightarrow f_1 - \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k f_{k,1} = dx \\ f_1 &= 0 \text{ oder } h_1 = 0 \end{aligned} \right\} \text{Separation}$$



Rechenregeln: $f_1 - \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k f_{k,1} = dx$, $0 = h_1 = N, h_2 > 0$

f_1 bekannt: $h_1 = 0, N$ und $h_2 = 0$

mit f_1 wird ein h_1 Spielraum mit T definiert

Differentialgleichung: Bemerkung

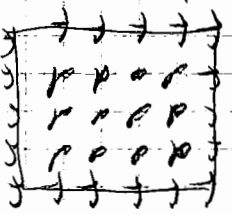
$$f_{k,1} = \alpha (f_{k+1,1} + f_{k-1,1}) + \beta f_{k,2-1} - f_{k-1,1} + 2f_{k,1} - f_{k+1,1} + \alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + a \frac{\partial f}{\partial x_2} + b f$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} \right) f_{k,1} - \frac{1}{a} \frac{\partial f_{k,1}}{\partial x_2}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + a \frac{\partial f}{\partial x_2} + b f = \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} \right) dx$$

3) Separation, Lagrange-Methode, Ansatz mit h_1, h_2 Einfeld, $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} f &\rightarrow f_1 - \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k f_{k,1} = dx \\ f_1 &= 0 \text{ oder } h_1 = 0 \text{ oder } h_2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{Separation}$$



Rekursionsrelation: $f_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k f_{n-k} = d_n$, $0 \leq n, l_2 < N$

f_n givet för $n_1 = 0$ och N och $l_2 > 0$ alla N

Differensialgleichung: Beispiel

$$f_{n+1} = \lambda (f_{n+1} + f_{n+1} + f_{n+1} + f_{n+1})$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + af = \left(\frac{4}{l^2+a}\right) f_{n,l_2} - \frac{1}{l^2} (f_{n-1,l_2} + \dots)$$

$$= \left(\frac{4}{l^2+a}\right) \left\{ f_{n,l_2} - \dots \right\},$$

$$\lambda = \frac{1}{4+al^2}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + af = \left(\frac{4}{l^2+a}\right) \lambda$$

Elliptisch, Randwert problem. Existenz und Stabilität für $a \geq 0$.

§4 Bildanalyse.

f Bild, g Objekt (= andere Bild).

Frage: Ist g (oder ebenfalls eine bewegte, skalierte Version) in f enthalten?

Unter g stelle man sich vor: Punkte, Geraden, Kreise, gezeichnete Objekte, Textur, ...

1. Punkte

$$f = (f_k)_{k=(1,1), \dots, (N,N)}$$

$$\text{Bildes } h_k = f_k - \frac{1}{P} \sum_{l \in N_k} f_l$$

Benachbart

N_k Umgebung von k mit P Punkten $l \in N_k$.

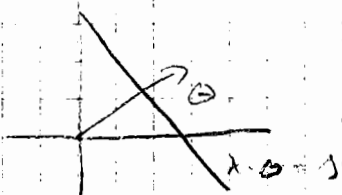
Falls $|h_k| > \Delta$ = k ist Punkt.

Bei stark verrauschten Bildern: Ersetze Pixel k durch einen ganzen Fleck von Pixeln und f_k durch das Mittelwert, N_k durch eine Nachbarschaft des Flecks.

2. Geraden

Hough - oder Radon - Transformations:

$$\begin{aligned} (Rf)(\theta, \rho) &= \int f(x, \theta + \rho \theta^\perp) dx \\ &= \int_{x \cdot \theta = \rho} f(x) dx \end{aligned}$$



Gerade in f \Leftrightarrow Punkt in Rf .

3. Geometrische Objekte

Vergleich f mit g .

(a) geht f aus g durch Translation hervor?

Falls ja, $|\hat{f}| = |\hat{g}|$

(b) geht f aus g durch Bewegung hervor?

Falls ja $\int_{S^1} \hat{f}(\rho\omega) d\omega = \int_{S^1} |\hat{g}(\rho\omega)| d\omega, \text{ d.h.}$

$$N_f = N_g, \quad N_f(\rho) = \int_{S^1} |\hat{f}(\rho\omega)| d\omega$$

(c) geht f aus g durch Streckung (+ Translation) hervor?

$$f_r(u) = f(r \cdot u), \quad \hat{f}_r(\xi) = r^{-2} \hat{f}(\xi/r)$$

$$\begin{aligned} \int |\hat{f}_r(\rho\omega)| \rho d\rho d\omega &= r^{-2} \int |\hat{f}(\frac{\rho}{r}\omega)| \rho d\rho d\omega \\ &= r^{-2} r^2 \int |\hat{f}(\rho'\omega)| \rho' d\rho' \end{aligned}$$

$$P_f(\omega) = \int_0^\infty |\hat{f}(\rho\omega)| d\rho$$

Falls ja, $P_f = P_g$.

(d) $T_f = \int_{S^1} P_f(\omega) d\omega$

$T_f = T_g$, falls f aus g durch Ähnlichkeit + Translation hervorgeht.

4. Enthält f eine Textur, d.h. besitzt f (annähernd) zweifach periodische Strukturen?

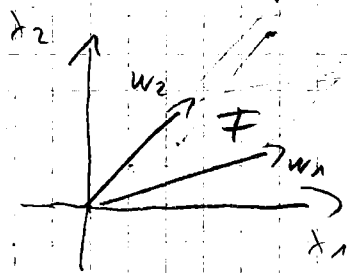
Falls f die Periode 2π in beiden Angewinkeln hat gilt auch

Satz 3.2

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k \delta(\xi - k),$$

$$\hat{f}_k = (2\pi)^{-2} \int_{[0, 2\pi]^2} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Falls f das Periodizitätsgitter W hat, d.h. $f(x) = f(x + Wl)$, $l \in \mathbb{Z}^2$



$$F = W [0, 1]^2$$

hat $f_{\frac{1}{2\pi}W}(x) = f(\frac{1}{2\pi}Wx)$ die Periode 2π in allen Argumenten:

$$f_{\frac{1}{2\pi}W}(x + 2\pi l) = f(\frac{1}{2\pi}W(x + 2\pi l)) = f(\frac{1}{2\pi}Wx) = f_{\frac{1}{2\pi}W}(x)$$

Daher:

$$\hat{f}_{\frac{1}{2\pi}W}(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\frac{1}{2\pi}W, k} \delta(\xi - k),$$

$$\hat{f}_{\frac{1}{2\pi}W, k} = (2\pi)^{-2} \int_{[0, 2\pi]^2} f_{\frac{1}{2\pi}W}(x) e^{-ikx} dx$$

$$x = 2\pi W^{-T} \gamma \quad = (2\pi)^{-2} \int_{[0, 2\pi]^2} f(\frac{1}{2\pi}Wx) e^{-ikx} dx, \quad \frac{1}{2\pi}Wx = \gamma$$

$$= \frac{1}{|\det(W)|} \int_F f(x') e^{-2\pi i k W^{-T} \gamma} dx'$$

$$\text{Nach Aufgabe 7:} \quad = \frac{2\pi}{\det(W)} (\hat{f}_{\frac{1}{2\pi}W})^\wedge(2\pi W^{-T} k)$$

$$\hat{f}_{\frac{1}{2\pi}W}(\xi) = \frac{1}{\det(\frac{1}{2\pi}W)} \hat{f}^\wedge(2\pi W^{-T} \xi)$$

$$\Rightarrow \hat{f}^\wedge(2\pi W^{-T} \xi) = (2\pi)^2 \det(W) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\frac{1}{2\pi}W, k} \delta(\xi - k)$$

$$\hat{f}(s) = (2\pi)^{-1} \det(W) \sum_k \hat{f}_{\frac{2\pi}{\alpha} W, k} \delta\left(\frac{1}{2\pi} W^T s - k\right)$$

$$\int \delta(A s) g(s) ds = |\det(A)| \int \delta(s') g(A^{-1} s') ds'$$

$$A s = s'$$

$$= \left| \frac{1}{\det(A)} \right| g(0), \text{ u. s.}$$

$$\delta_A = \left| \frac{1}{\det(A)} \right| \delta$$

$$\hat{f}(s) = (2\pi)^{-1} \sum_k \hat{f}_{\frac{2\pi}{\alpha} W, k} \delta(s - 2\pi W^{-T} k)$$

\hat{f} hat also Perioden an den Punkten des reziproken Gitters.

Im Wirklichkeit kann man nicht \hat{f} berechnen, sondern nur $(\mathcal{R}_{1/a} f)^\wedge$ mit einer Abtastfunktion $\mathcal{R}_{1/a} = \mathcal{R}_{[-a, a]^2}$, wobei $[-a, a]^2$ viele F 's enthält. Dann gilt

$$(f \mathcal{R}_{1/a})^\wedge = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{\mathcal{R}}_{1/a}$$

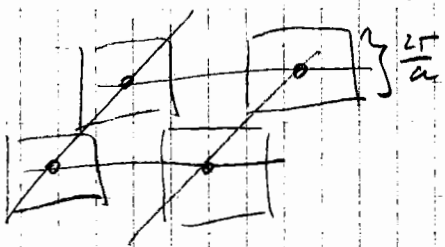
Wegen

$$\delta_{-x} * \mathcal{R}_{1/a} = \int \delta(s-x-\eta) \mathcal{R}_{1/a}(\eta) d\eta = \mathcal{R}_{1/a}(s-x)$$

folgt

$$(f \mathcal{R}_{1/a})^\wedge(s) = \sum_k \hat{f}_{\frac{2\pi}{\alpha} W, k} \hat{\mathcal{R}}_{1/a}(s - 2\pi W^{-T} k)$$

$$= \alpha^2 \frac{2\pi}{\alpha} \sum_k \hat{f}_{\frac{2\pi}{\alpha} W, k} \text{sinc}\left(\alpha(s - 2\pi W^{-T} k)\right)$$



Damit sich das Produkt $2\pi W^{-T} \mathbb{Z}^2$ nicht mit mir überdecken kann, muß $\frac{2\pi}{\alpha}$ klein α als der Abstand der Gitterpunkte sein.

5. Sind zwei Funktionen (bis auf Bezugsgeraden) identisch?

(a) $\Gamma = x = \gamma(\tau)$, $0 \leq \tau \leq L$, γ Bogenlänge, d.h. $|\dot{\gamma}| = 1$

$$\text{Distributions: } \delta_{\Gamma} g = \int_{\Gamma} g = \int_0^1 g(\gamma(\tau)) d\tau$$

$$\hat{\delta}_{\Gamma} g = \hat{\delta}_{\Gamma}(\hat{g}) = \int_0^1 \hat{g}(\gamma(\tau)) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int e^{-i x \cdot \gamma(\tau)} g(\tau) d\tau d\tau$$

$$= \int g(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-i x \cdot \gamma(\tau)} d\tau d\tau$$

d.h. $\hat{\delta}_{\Gamma}$ ist eine Fkt., und man

$$\hat{\delta}_{\Gamma}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-i x \cdot \gamma(\tau)} d\tau$$

(b) Γ der von a_0, \dots, a_{p-1} erzeugt Polynom.

1. Möglichkeit:

$$f_{\Gamma}(z) = \sum_{j=0}^{p-1} \delta(z - a_j)$$

$$\hat{f}_{\Gamma}(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-i s \cdot a_j}$$

Bemerkung:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i j k / p} a_j, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

(Fourier-Deskriptoren, DC)

Numerierung: $\hat{a}_0 = 0$ (d.h. $a_j \rightarrow a_j - \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} a_j$)

Numerierung der a_j : gegen Uhrzeiger.

Wahl des Ursprungs punkts beeinflusst nicht

$|\hat{a}_k|$. Nummeriere so, dass für $\psi_j = \arg(a_j)$ gilt

$$0 < \psi_0 < \psi_1 < \dots < \psi_{p-1} < 2\pi$$

Drehung der a_j um φ gegen den Uhrzeiger: $a_j \rightarrow e^{i\varphi} a_j$
 $\hat{a}_k \rightarrow e^{i\varphi} \hat{a}_k$

Also bleibt $|\hat{a}_k|$ invariant gegenüber Bewegungen.

Bei Drehbewegungen: $|\hat{a}_k| \rightarrow \lambda |\hat{a}_k|$, λ Streckungsfaktor.

Weitere DC's von Kurven:

Γ : $x = \gamma(s)$, λ Bogenlänge, $0 \leq s \leq L$, $\gamma(0) = \gamma(L)$

$$k(s) = \text{Krümmung in } \gamma(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}$$

$\varphi(s) =$ Winkel zwischen der Tangente in $\gamma(s)$ und x_1 -Achse

$$= \arctan \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1}, \quad \dot{\gamma}_2 \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 = k(s) (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = 1)$$

$$\hat{k}_e(\Gamma) = \int_0^L k(s) e^{-2\pi i s/L} ds$$

Invariant gegenüber Ähnlichkeitstransf.

Invariant gegenüber Bewegungen ist klar.

bleibt zu zeigen: Invariant gegenüber Streckungen.

$$\Gamma_\nu: x = \gamma_\nu(s), \quad 0 \leq s \leq \nu L$$

$$= \nu \gamma(s/\nu)$$

$$\frac{d}{ds} \gamma_\nu(s) = \dot{\gamma}(s/\nu), \quad \frac{d^2}{ds^2} \gamma_\nu(s) = \frac{1}{\nu} \ddot{\gamma}(s/\nu)$$

$$k_\nu(s) = \frac{1}{\nu} k(s/\nu)$$

$$\hat{k}_{e,\nu}(\Gamma_\nu) = \int_0^{\nu L} k_\nu(s) e^{-2\pi i s/\nu L} ds$$

$$= \frac{1}{\nu} \int_0^{\nu L} k(s/\nu) e^{-2\pi i s/\nu L} ds \quad \frac{s}{\nu} = s'$$

$$= \int_0^L k(s') e^{-2\pi i s'/L} ds' = \hat{k}_e(\Gamma)$$

6. Invarianten gegenüber Bewegungen auf Moment-Basis:

Moment $m_k(f) = \int x^k f(x) dx$, $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2}$
 der Ordnung $|k| = k_1 + k_2$.

Zentriertes Moment $\mu_k(f) = \int (x-m)^k f(x) dx$,

m Schwerpunkt von f, v.l. $\int (x-m) f(x) dx = 0$

$$m = \frac{1}{m_0} \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{01} \end{pmatrix} = \frac{\int x f(x) dx}{\int f(x) dx}$$

$$m = m(f)$$

Translationen: $f_y(x) = f(x+y)$, $m(f_y) = m(f) + y$

$$\begin{aligned} \mu_k(f_y) &= \int (x-m-y)^k f(x+y) dx, \quad x+y=y \\ &= \mu_k(f) \end{aligned}$$

Rotationen: $f_U(x) = f(U^{-1}x)$, $U = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$m(f_U) = \frac{1}{m_{00}} \int x f_U(x) dx = \frac{1}{m_{00}} \int x f(U^{-1}x) dx, \quad x=Ux'$$

$$= \frac{1}{m_{00}} \int Ux' f(x') dx' = U m(f)$$

$$\mu_k(f_U) = \int (x - \frac{Um(f)}{m_{00}})^k f(Ux) dx = \int (U(x - m(f)))^k f(x) dx$$

$$= \int (U \bar{x})^k f(x) dx, \quad \bar{x} = x - m(f)$$

$$(\mu_{20} + \mu_{02})(f_U) = \int \{ (U \bar{x})_1^2 + (U \bar{x})_2^2 \} f(x) dx = \int |U \bar{x}|^2 f(x) dx$$

$$= \int |\bar{x}|^2 f(x) dx = (\mu_{20} + \mu_{02})(f)$$

Dies ist $\mu_{20} + \mu_{02}$ invariant gegenüber Bewegungen.

Weitere Invarianten:

$$(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2$$

$$(\mu_{30} - 3\mu_{12})^2 + (3\mu_{21} - \mu_{03})^2$$

$$(\mu_{30} + \mu_{12})^2 + (\mu_{21} + \mu_{03})^2$$

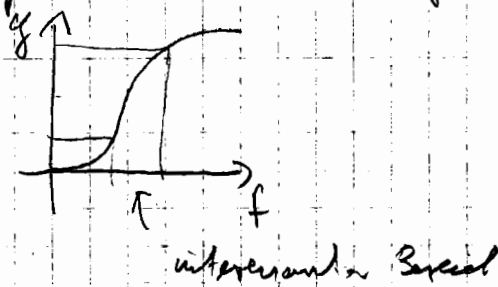
Alle diese Invarianten sind homogen, d.h. bei $f \rightarrow \alpha f$ multiplizieren sie sich mit einem Faktor α^k

§ 5 Bildaufbereitung (Enhancement)

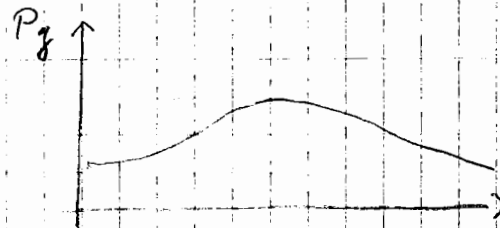
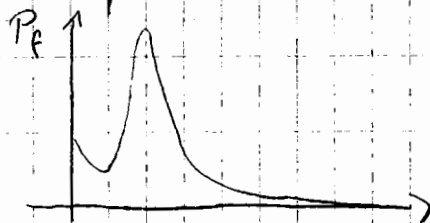
1. Kontrastverbesserung

Änderung der Graywertskala

$$g = \Phi(f), \quad \Phi \text{ monoton wachsend}$$



Verteilungsfunktion



P_g gegeben. Bestimme Φ so, dass $g = \Phi(f)$ die Verteilungsfunktion P_g hat:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g \leq \Phi(x)) &= \mathbb{P}(f \leq x) \\ \int_0^{\Phi(x)} P_g(x') dx' &= \int_0^x P_f(x') dx' \end{aligned}$$

Beispiel: 1)

$$P_g(x) = \begin{cases} 0, & x < g_0 \\ 1/(g_1 - g_0), & g_0 \leq x \leq g_1 \\ 0, & x > g_1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\Phi(x)} P_g(x') dx' = \begin{cases} 0, & \Phi(x) < g_0 \\ (\Phi(x) - g_0) / (g_1 - g_0), & g_0 \leq \Phi(x) \leq g_1 \\ 1, & g_1 \leq \Phi(x) \end{cases} = \mathbb{P}(f \leq x)$$

$$\Phi(x) = (g_1 - g_0) \mathbb{P}(f \leq x) + g_0$$

$$2) \quad P_g(x) = \begin{cases} \alpha \exp\{-\lambda(g - g_0)\} & , \quad g \geq g_0 \\ 0 & , \quad g < g_0 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = g_0 - \frac{1}{2} \ln(1 - P_f(x))$$

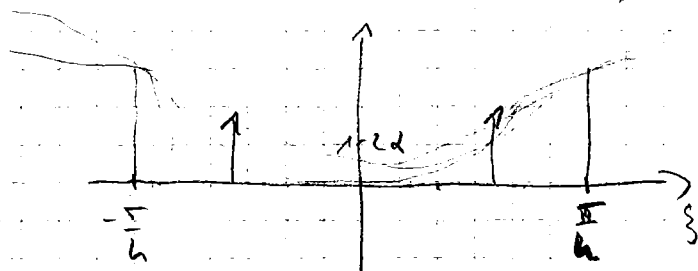
2. Kontinuierliche Verteilung (Hervorhebung klein Δ und)

$$\begin{aligned} \text{(a) Dicht. } g(x) &= \sum_k a_k f(x - h_k), \quad g_e = g(h_e) \\ &= S * f, \quad S(x) = \sum_k a_k \delta(x - h_k) \end{aligned}$$

$$(S * f)^{\wedge}(\eta) = (\mathcal{Z}_\sigma)^{m/2} \hat{S} \hat{f}$$

$$\hat{S}(\xi) = (\mathcal{Z}_\sigma)^{-m/2} \sum_k a_k e^{-i h_k \xi}$$

$$\text{(c) } (S * f)^{\wedge}(\eta) = \underbrace{\sum_k a_k e^{-i h_k \xi}}_{H(\xi)} \hat{f}(\xi)$$



$$0 < \alpha \leq \pi/2$$

Beispiele 1) 1D $g(x) = f(x) - \alpha (f(x-h) + f(x+h))$

$$H(\xi) = 1 - \alpha (e^{i h \xi} + e^{-i h \xi}) = 1 - 2\alpha \cos \xi h$$

2) 2D $g(x) = f(x) - \alpha (f(x-h_1) + f(x-h_2))$

$$H(\xi) = 1 - \alpha (e^{i h_1 \xi_1} + e^{-i h_1 \xi_1} + e^{i h_2 \xi_2} + e^{-i h_2 \xi_2})$$

$$= 1 - 2\alpha (\alpha_1 \cos \xi_1 h_1 + \alpha_2 \cos \xi_2 h_2)$$

(b) Im Fourier-Raum:

$$\hat{g} = H \hat{f}$$

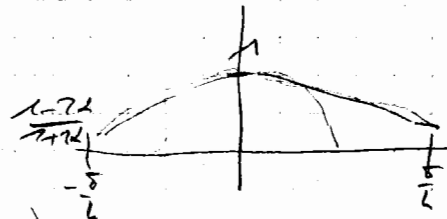
H. Hochpass, d.h. $|H(\xi)|$ klein für $|\xi|$ klein.

3. Übung

(a) Direkt

Beispiel 1) 1D $g(x) = \frac{1}{1+2d} (f(x) + d(f(x-L) + f(x+L)))$

$$H(\xi) = \frac{1+2d \cos \xi L}{1+2d}, \quad 0 < d \leq \frac{1}{2}$$



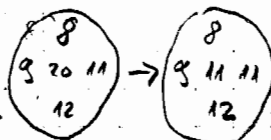
2) 2D $g(x) = \frac{1}{1+4d} (f(x) + d(\dots))$

$$H(\xi) = \frac{1+2d \cos \xi_1 L + 2d \cos \xi_2 L}{1+4d}$$

(b) Im Fourier-Raum

$$\hat{g} = H \hat{f}$$

(c) Median-Filter: Ersetzt Zahlen durch Median z.B.



Beispiel 1) Idealer Tiefpass der Abtastfrequenz b

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \tilde{h}(x) = \frac{\mathcal{J}_1(x/b)}{x/b}$$

2) Butterworth der Ordnung n in der Abtastfrequenz b

$$H(\xi) = \frac{1}{1 + (|\xi|/b)^{2n}}$$

Ordnung 1, Dämpfung 2: $\tilde{h}(x) = H_0(x/b)$



4. Coefficient rooting, Cepstrum

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\hat{f}(\xi)|}$$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\hat{f}(\xi)|} \ln(\alpha + b |\hat{f}(\xi)|)$$

5. Image Restoration.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x-y) f(y) dy + n(x)$$

Typical: $B(x) = e^{-|x|^2/c^2}$

$$|\hat{m}(y)| = \sigma$$

$$\hat{g} = \hat{B} \hat{f} + \hat{n}$$

Restoration:

$$\hat{f}_w = \hat{W} \hat{g} = \hat{W} \hat{B} \hat{f} + \hat{W} \hat{n}$$

$$\hat{f}_w - \hat{f} = (\hat{W} \hat{B} - 1) \hat{f} + \hat{W} \hat{n}$$

Wien or Tollen W minimiert

$$|\hat{W} \hat{B} - 1|^2 |\hat{f}|^2 + |\hat{W}|^2 |\hat{n}|^2 \quad (= E|\hat{f}_w - \hat{f}|^2)$$

Lemma: $f(w) = |w-z|^2 + w|w|^2$ minimal in \mathbb{C}

$$\Leftrightarrow w = (1+w^{-1})z \quad \text{Es ist dann } f(w) = \frac{w}{1+w} |z|^2$$

Beweis: $w = u + iv, z = x + iy$

$$f(w) = (u-x)^2 + (v-y)^2 + w(u^2 - v^2)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u-x + wu = 0 \\ v-y - wv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1+w)w = z \quad \square$$

Answer dem auf

$$|\hat{W} \hat{B} - 1|^2 |\hat{f}|^2 + |\hat{W}|^2 |\hat{n}|^2 = |\hat{B} \hat{f}|^2 \left(|\hat{W} - \hat{B}^{-1}|^2 + \frac{|\hat{n}|^2}{|\hat{f}|^2} |\hat{W}|^2 \right)$$

$$\hat{W} = \frac{1}{1 + \frac{|\hat{n}|^2}{|\hat{f}|^2} \frac{1}{|\hat{B}|^2}} \frac{1}{\hat{B}} = \frac{|\hat{B}|^2}{|\hat{B}|^2 + \frac{|\hat{n}|^2}{|\hat{f}|^2}} \quad f(\hat{w})$$

$$= \frac{\hat{\beta}^*}{|\hat{\beta}|^2 + \frac{|\hat{\epsilon}|^2}{|\hat{f}|^2}}, \quad |\hat{f} - \hat{f}_w|^2 \leq 2 \frac{|\hat{m}|^2}{|\hat{m}|^2 - |\hat{\beta}|^2 |\hat{f}|^2} |\hat{f}|^2$$

$$= 2 \frac{1}{1 + \beta \hat{\epsilon}^2 / |\hat{m}|^2} |\hat{f}|^2$$

Zur Umkehrung: $\hat{\beta}$ ist nicht mehr bekannt

$$\hat{m} = \int m(y) \bar{m}(y-x) dy = c^2 \delta(x)$$

(Weißes Rauschen)

$$m * \bar{m} = c^2 \delta$$

Fourier-Transform: $(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{m}|^2 = c^2 (2\pi)^{-n/2}$, d.h. $|\hat{m}| = (2\pi)^{-n/2} c$

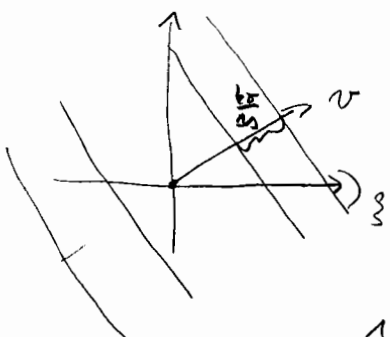
\hat{f} : Typisches Ableitungsmodell $|\beta|^{-\beta}$, $\beta \sim 3/2$

Beispiel 1), $B = \delta(2\pi)^{n/2}$, $\hat{\beta} = 1$

$$\hat{w}(\beta) = \frac{1}{1 + c |\beta|^{2/\beta}}$$

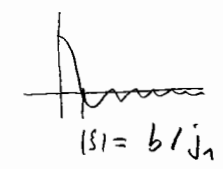
Bildmagn. Ordnung β .

2) Aufg. 9:
 $\hat{B}(\xi) = \frac{1}{4b} e^{i \Delta \xi} \cdot \text{sinc}(\xi \Delta \tau)$



$\frac{v \cdot \xi}{|v|} = \frac{2k \xi}{\Delta \tau |v|} = \frac{2k \xi}{\Delta \tau}$
 Anteile $e^{i x \cdot \xi}$
 f sind verloren. $\xi = \frac{v}{|v|}$

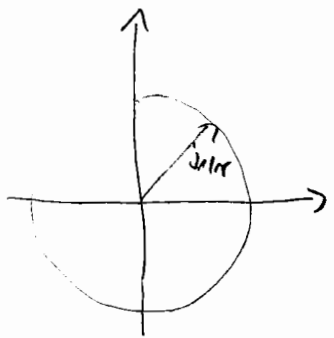
$(\mathcal{F} \hat{f}) = \tilde{f} * f$
 \mathcal{F} ist linear Transformations, und \hat{f} ist $\frac{J_1(1.51b)}{1.51b}$



$\tilde{f} = \int_0^\infty r J_0(\pi |x| r) \frac{dr}{1 + (\frac{r}{b})^2}$
 Hankel-Nicholson 11.4.44
 $\int_0^\infty \frac{r J_0(\pi r)}{r^2 + b^2} dr = K_0(|x|b)$
 K₀ mod. Bessel-Fkt. 1.1.1

3) $B(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$
 $\hat{B}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{J_1(\pi |\xi|)}{|\xi|}$

$x \cdot \xi = \frac{h \xi}{\Delta \tau |v|} = \frac{2k \xi}{\Delta \tau}$
 $e^{i x \cdot \xi} = e^{i \frac{2k \xi}{\Delta \tau}}$



$j_1 = 3.831771$

4) $B(x) = c e^{-|x|^2/2}$
 $\hat{B}(\xi) = c e^{-|\xi|^2/2}$

eigentlich: $e^{-\frac{1}{2} |x|^2}$
 τ bleibt ein Parameter

5) Aufg. 10
 $f = \sum_k f_k e^{i k y}$ $g = \sum_k g_k e^{i k y}$

$g_k = \frac{1}{i k \omega} (e^{i k \omega t} - 1) f_k$

Für $k \neq \frac{2\pi p}{\omega \Delta t}$: $f_k = \frac{i k \omega}{e^{i k \omega \Delta t} - 1} g_k$

Für $k = \frac{2\pi p}{\omega \Delta t}$: $e^{i k y} = e^{\frac{2\pi i p}{\omega \Delta t} y}$ hat Periode $\omega \Delta t$

Dieser Teil des Bildes wird natürlich nicht zu sehen.

Teil III: Bilinearrekompaktifizierung

§ 1 Das allgemeine Rekompaktifizierungsproblem
 $Af = g$

$$(Af)(x) = \int_Y K(x, y) f(y) dy, \quad x \in X$$

Integralgleichung 1. Art

Bemerkung 1) $Af = g$: allg. nicht eindeutig lösbar. Raum: $K=1$.

2) Selbst wenn $Af = g$ eindeutig lösbar ist, braucht f nicht stetig von g abhängen. Beispiel: $X=Y=[0, 2\pi]$, $K \in L_2(X \times Y)$

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \|f_k\| = 1, \quad g_k = Af_k$$

$$g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} K(x, y) e^{iky} dy$$

$$\sum_k |g_k(x)|^2 = \int_0^{2\pi} |K(x, y)|^2 dy$$

$$\sum_k \|g_k\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

Denn $|g_k| \rightarrow 0$, aber $\|f_k\| = 1$.

Definition: Seien F, G Hilbert-Räume, und sei $A: F \rightarrow G$ linear und stetig. Dann heißt die Aufgabe $Af = g$ gut gestellt, wenn

- (i) $Af = g$ für jede $g \in G$ sind lösbar
- (ii) A^{-1} stetig ist.

Im anderen Fall heißt $Af = g$ schlecht gestellt (von F, G).

Beispiele 1) Der Operator $(Af)(x) = \int_0^{\Delta t} f(x+tv) dt$ aus
 Aufgabe 9. $F = G = L^2(\mathbb{R}^2)$.

$$|(Af)(x)|^2 \leq \Delta t \int_0^{\Delta t} f^2(x+tv) dt$$

$$\|Af\|^2 \leq \Delta t \int_0^{\Delta t} \int f^2(x+tv) dx dt$$

$$= (\Delta t)^2 \|f\|^2,$$

also ist $\|A\| \leq \Delta t$ und damit A stetig.

Für $g \in G$ bedeutet $Af = g$ $\hat{g} = \frac{1}{4\pi} e^{i\alpha} \text{Ker}(\alpha) \hat{f}(\xi)$
 mit $\alpha = \Delta t \sqrt{|\xi|^2}$. Also ist f nicht notwendig in F und
 damit $Af = g$ nicht für alle g lösbar. $Af = g$ ist selbst gelöst.

2) Die Radon-Transformation $F = L_2(\mathbb{R}^2)$, $G = L_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2)$

$$|(Rf)(\theta, \eta)|^2 \leq \left(\int_{-\sqrt{\eta^2-1}}^{+\sqrt{\eta^2-1}} |f(\eta\theta + t\theta^\perp)| dt \right)^2$$

$$\leq 4 \int |f(\eta\theta + t\theta^\perp)|^2 dt$$

$$|\int (Rf)(\theta, \eta)|^2 ds \leq 4 \iint |f(\eta\theta + t\theta^\perp)|^2 dt ds$$

$$= 4 \int |f(x)|^2 dx$$

$$\Rightarrow \|Rf\|^2 \leq 8\pi \|f\|^2$$

Also ist R stetig. Nach Aufgabe 31 ist $(Rf)^\wedge = (R\pi)^{1/2} \hat{f}$, also
 ist R injektiv. Also $Rf = g$ ist nicht für jedes g lösbar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} g(\theta, \eta) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} (Rf)(\theta, \eta) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} \int_x f(\eta\theta + t\theta^\perp) dt ds$$

$$= \int (x \cdot \theta)^m f(x) dx = g_m(\theta)$$

Überdies ist $g(\theta, \eta) = g(-\theta, \eta)$, d.h. g gerade.

Setzen wir nun $G_0 = \{ \varphi \in C : \int_{S^m} \varphi(\theta, 1) d\theta = \varphi_0(\alpha), \varphi \text{ genau } \}$

und fragen wir uns, ob $Rf = g$ bei F, C_0 gut oder schlecht gestellt ist. $Rf = g$ bedeutet $\hat{g} = (2\sigma)^{1/2} \hat{f}$ oder

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 = \int |\hat{f}(\sigma)|^2 d\sigma = \int \int_{S^1} \sigma |\hat{f}(\sigma, \theta)|^2 d\sigma d\theta$$

$$(*) = \frac{1}{2\sigma} \int \int_{S^1} \sigma |\hat{g}(\sigma, \theta)|^2 d\sigma d\theta$$

Anderserseits ist

$$\|g\|^2 = \int_{S^1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} |\varphi(\theta, \tau)|^2 d\tau d\theta$$

$$= \int_{S^1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} |\hat{g}(\theta, \sigma)|^2 d\sigma d\theta = 2 \int_{S^1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} |\hat{g}(\theta, \sigma)|^2 d\sigma d\theta$$

Wegen des Faktors σ in (*) läßt sich $\|f\|$ nicht gegen $\|g\|$ abschätzen: R^{-1} ist nicht stetig.

3) $k = e^{-ix \cdot y}$ (MRI) 4) $(Af)(x, \theta) = \int_{S^1} f(x + \tau \theta) d\theta$ (SAR)

Bei schlecht gestellten Problemen entsteht folgende

Scheitervariante: Ist $g = Af$ nun näherungsweise bekannt, ist g_δ mit $\|g - g_\delta\| \leq \delta$, so gilt für die Lösung f_δ von $Af_\delta = g_\delta$

$$f - f_\delta = A^{-1}(g - g_\delta),$$

und $\|f - f_\delta\|$ bleibt wegen der Unstetigkeit von A^{-1} nicht klein zu sein.

Ein wirksames Instrument zur Analyse und effektiven Lösung schlecht gestellter Probleme ist die Singulärwertzerlegung (SVD) von A . Daraus ergibt sich von dem adjungierten Operator $A^*: G \rightarrow F$. Er ist definiert durch

$$(A^*g, f)_F = (g, Af)_G$$

Beispiele: 1) $F = \mathbb{C}^m$, $G = \mathbb{C}^m$: $A^* = \bar{A}^T$

2) $F = L_2(Y)$, $G = L_2(X)$, $Af(x) = \int K(x,y) f(y) dy$

$$A^*g(y) = \int \overline{K(x,y)} f(x) dx$$

3) F bel., $G = \mathbb{C}^m$, $(Af)_k = (f, u_k)$, $k=1, \dots, m$
mit $u_k \in L_2(X)$.

$$(Af, g)_{G^*} = \sum_{k=1}^m (f, u_k) \bar{g}_k = (f, \sum_{k=1}^m g_k u_k)_F$$

d.h. $A^*g = \sum_{k=1}^m g_k u_k$

4) $F = L_2(|x| < 1)$, $G = L_2(S^1 \times [-1, 1])$, $A = R$

$$\int_{-1}^1 R f(\theta, \lambda) g(\theta, \lambda) d\lambda = \int_{-1}^1 \int_{S^1} f(\theta - t\theta^2) dt g(\theta, \lambda) d\lambda$$

$$= \int_{|x| < 1} f(x) g(\theta, x \cdot \theta) dx$$

$$\int_{S^1} \int_{-1}^1 R f(\theta, \lambda) g(\theta, \lambda) d\lambda d\theta = \int_{|x| < 1} f(x) \int_{S^1} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta dx$$

d.h. $(R^*g)(x) = \int_{S^1} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta$

Rückprojektion.

SVD von A : $(f_k), (g_k)$ Orthonormalsysteme in F, G .

$$A f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k) g_k, \quad \sigma_k > 0$$

$$A^* g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (g, g_k) f_k$$

Es gilt dann:

$$A^* g_k = \sigma_k f_k, \quad A f_k = \sigma_k g_k$$

$$A^* A f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (f, f_k) f_k, \quad A A^* g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (g, g_k) g_k$$

Beispiel: 1) $F = \mathbb{C}^m, G = \mathbb{C}^n$. $\sigma = \text{Ker}(m, n)$, A hat Rang r .

Dann ist $A^* A$ positiv semi-definit mit Rang r . Also hat $A^* A$ r positive Eigenwerte $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ mit zugehörigen ^{normierten} EVen f_1, \dots, f_r .

Aus $A^* A f_k = \sigma_k^2 f_k$ folgt $A A^* A f_k = \sigma_k^2 A f_k$, d.h.

$g_k = \frac{1}{\sigma_k} A f_k$ sind Eigenvektoren von $A A^*$, und ergibt

$$\begin{aligned} \|g_k\|^2 &= (g_k, g_k) = \frac{1}{\sigma_k^2} (A f_k, A f_k) = \frac{1}{\sigma_k^2} (A^* A f_k, f_k) \\ &= (f_k, f_k) = 1. \end{aligned}$$

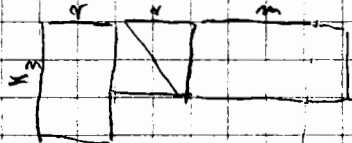
$$A^* g_k = \frac{1}{\sigma_k} A^* A f_k = \sigma_k f_k$$

Matrix-Schreibweise der SVD: $F = (f_1, \dots, f_r) = m \times r$

$$A f = G \Sigma F^* f, \quad \text{d.h.} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix} = n \times r$$

$$A = G \Sigma F^*$$

$$G = (g_1, \dots, g_r) = m \times r$$



$$A^* = F \Sigma^* G^*$$

$$2) \quad Af = \begin{pmatrix} (f, u_1) \\ \vdots \\ (f, u_m) \end{pmatrix}, \quad A: F \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$A^*h = \sum_{k=1}^m h_k u_k, \quad AA^* = \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad AA^* = ((u_k, u_l))$$

σ_k sind Eigenwerte von $((u_k, u_l))$, g_k die zugehörigen Eigenvektoren,

$$f_k = \frac{1}{\sigma_k} A^* g_k = \frac{1}{\sigma_k} \sum_{l=1}^m g_{kl} u_l$$

Lösung von $Af = g$ mit SVD:

Verallgemeinert Lösung $f = A^+g$:

$$(i) \quad \|A^+g - f\| \leq \|A^+g\|, \quad \forall f \in F$$

(ii) Unter allen f^+ mit (i) ist A^+g das mit kleinster Norm.

Satz 1 A besitzt eine SVD. Dann gilt

$$A^+g = \sum_k \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} f_k$$

Beweis: $F_0 = \text{sp} \{ f_1, f_2, \dots \}, \quad F_0^\perp = \{ f \in F : f \perp F_0 \}$

$$Af = \sum_k \sigma_k (f, f_k) g_k$$

$$g = \sum_k \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} g_k + g^\perp$$

$$\|Af - g\|^2 = \sum_k (\sigma_k (f, f_k) - \frac{(g, g_k)}{\sigma_k})^2 - \|g^\perp\|^2$$

$$\text{Minimal} \Leftrightarrow (f, f_k) = \frac{(g, g_k)}{\sigma_k}$$

Daher ist f bestimmt bis auf $f' \in F_0^\perp$. Minimal Norm hat dies f mit $f' = 0$

Bemerkung: A invertierbar, $A = G \Sigma F^*$, $A^+ = F \Sigma^{-1} G^*$

Falls stattd. g nur g_δ mit $\|g - g_\delta\| = \delta$ bekannt ist:

$$A^+ g - A^+ g_\delta = \sum_k \frac{(g - g_\delta, f_k)}{\sigma_k} f_k,$$

$$\|A^+ g - A^+ g_\delta\|^2 = \sum_k \left| \frac{(g - g_\delta, f_k)}{\sigma_k} \right|^2$$

Also: Kleine Singulärwerte erzeugen bei Daten-Fehlern große Fehler!
Dies macht in der Praxis ein „Abkürzen“ der SVD notwendig:

$$A_w^+ g = \sum_{\sigma_k \geq w} \frac{(g, f_k)}{\sigma_k} f_k$$

Satz 2: Sei $\|g - g_\delta\| = \varepsilon$. Dann ist

$$\|A^+ g - A_w^+ g_\delta\| \leq \left(\sum_{\sigma_k < w} |(g, f_k)|^2 \right)^{1/2} + \delta \left(\sum_{\sigma_k \geq w} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{1/2}$$

Beweis:

$$\|A^+ g - A_w^+ g_\delta\| \leq \|(A^+ - A_w^+) g\| + \|A_w^+ (g - g_\delta)\|$$

$$\leq \left(\sum_{\sigma_k < w} \left| \frac{(g, f_k)}{\sigma_k} \right|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\sigma_k \geq w} \left| \frac{(g - g_\delta, f_k)}{\sigma_k} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{\sigma_k < w} |(g, f_k)|^2 \right)^{1/2} + \delta \left(\sum_{\sigma_k \geq w} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{1/2} \quad \square$$

Bemerkung 1) $\left(\sum_{\sigma_k < w} |(g, f_k)|^2 \right)^{1/2}$ gibt an, wie genau f durch

die f_k mit $\sigma_k \geq w$ dargestellt werden kann

2) $\left(\sum_{\sigma_k \geq w} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{w}$ Fehler verkleinern.

3) Sei $F = L_2(X)$.

$$A^* \omega = \sum_{\sigma_k \geq \omega} (f_k(x), f_k(x))$$

$$= \int (f(x)) \sum_{\sigma_k \geq \omega} f(x) \bar{f}_k(x) dx$$

$$= \int (f(x)) d\omega(x, y) dx, \quad \text{Point-mass-funk.}$$

$$d\omega(x, y) = \sum_{\sigma_k \geq \omega} f_k(y) \bar{f}_k(x) \quad \text{an Abgabewerten \& VD}$$

Die SVD ist für praktische Rechnen häufig zu aufwendig. Deshalb benutzt man die Tychonoff-Plattens-Regularisierung:

Regularisierung:

$$\text{Minimiere } \|Af - g\|^2 + \omega \|f\|^2$$

Satz 3: $f_{\omega} = \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} (g, g_k) f_k$

$$Af \stackrel{!}{=} 0$$

Basis:

$$Af = \sum_k \sigma_k (f, f_k) g_k, \quad f = \sum_k (f, f_k) f_k = f^0,$$

$$g = \sum_k \sigma_k (g, g_k) g_k + g^0, \quad A^* g^0 = 0$$

$$\|Af - g\|^2 + \omega \|f\|^2 = \sum_k |\sigma_k (f, f_k) - (g, g_k)|^2 + \omega^2 \sum_k |(f, f_k)|^2 + \|g^0\|^2 + \omega \|f^0\|^2$$

Lemma aus I, S. 4: $f(\omega) = \|u - \tau\|^2 + \omega \|v\|^2$ minimal

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}}$$

$$(f, f_k) = \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}}$$

Satz 4:

$$(A^* A + \omega^2 I) f_{\omega} = A^* g$$



Beweis: $(A^T A + \omega^2 I) f_k = (\sigma_k^2 + \omega^2) f_k$

$$\begin{aligned} (A^T A + \omega^2 I) f_k &= \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \frac{\sigma_k^2 - \omega^2}{1 + \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} (q_k, q_k) f_k \\ &= \sum_k \sigma_k (q_k, q_k) f_k = A^T y \end{aligned}$$

□

Iteration Lösung von $AF = g$:

$$f^{t+1} = f^t - \tau A^* (A f^t - g) \quad (\text{Gauß-Seidel})$$

$$f^t = \sum_k c_k^t f_k \quad \text{falls } f^0 \in \text{span}(A^*)$$

z.B. $f^0 = 0$

$$A f^t = \sum_k c_k^t \sigma_k g_k$$

$$A^* (A f^t - g) = \sum_k (\sigma_k^2 c_k^t - \langle g, g_k \rangle) f_k$$

$$c_k^{t+1} = (1 - \tau \sigma_k^2) c_k^t + \tau \sigma_k \langle g, g_k \rangle$$

Rekursion:

$$c^{t+1} = \tau c^t + a$$

$$= \tau (\tau c^{t-1} + a) + a$$

$$= \tau^2 c^{t-1} + \tau a + a$$

$$= \tau^2 (\tau c^{t-2} + a) + \tau a + a$$

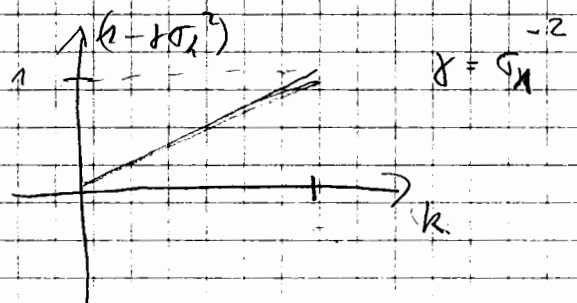
$$= \tau^3 c^{t-2} + (\tau^2 - \tau + 1) a$$

$$c^t = \tau^t c^0 + \underbrace{(1 + \tau + \dots + \tau^{t-1})}_{\frac{1 - \tau^t}{1 - \tau}} a$$

$$c_k^t = (1 - \tau \sigma_k^2)^t c_k^0 + \frac{1 - (1 - \tau \sigma_k^2)^t}{1 - (1 - \tau \sigma_k^2)} \tau \sigma_k \langle g, g_k \rangle$$

Satz 5: $f^0 = 0$, $|1 - \tau \sigma_k^2| < 1$, d.h. $\tau < \frac{2}{\sigma_k^2}$

$$f^t = \sum_k \frac{\langle g, g_k \rangle}{\sigma_k} \left(1 - (1 - \tau \sigma_k^2)^t \right) f_k$$



Minimierung unter Nebenbedingungen:

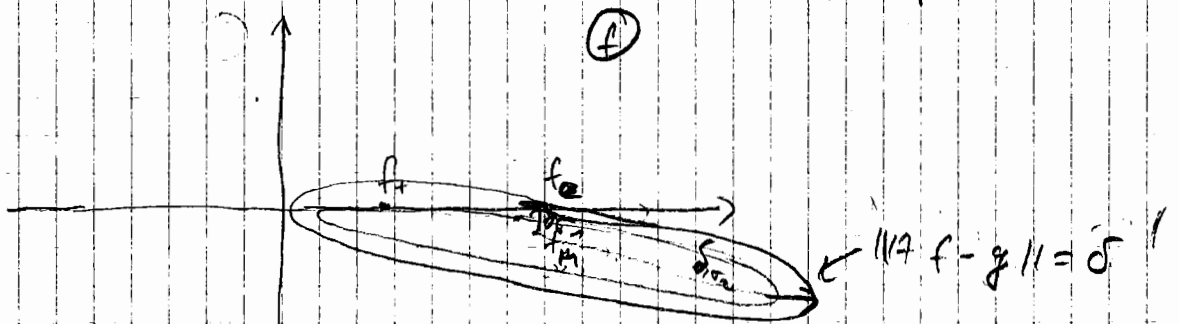
$$\min_{f \geq 0} \|A f - g\|$$

Einfachste Möglichkeit: Iterationsverfahren

$$f^{t+1} = \left(f^t - \alpha A^* (A f^t - g) \right)_+$$

$$f_+ = \begin{cases} f, & f \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Rg}(A) = 2$



Exakte Lösung: $f_e \geq 0$

$$f_M = \min_{f \in \mathbb{R}^2} \|A f - g\| \quad A f_M = g$$

Nur wenn: $\|A f - g\| = \delta$ Mittelwert f_M und Halbachsen $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}$

in Richtung f_1, f_2 , wo $A^* A f_i = \sigma_i^2 f_i$

$$f_+ = \min_{f \geq 0} \|A f - g\|$$

Also f_+ schlechter als f_M !

§ 2 Die Poisson-Transformationen in \mathbb{R}^m

$$(Rf)(\theta, 1) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x\theta + y) dy$$

Satz 1.1: $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^m)$

$$(Rf)^\wedge(\theta, \sigma) = (2\pi)^{(m-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta)$$

Satz 1.2: $R(f * g) = Rf * Rg$, $f, g \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^m)$

Beweis: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-z) g(z) dz$

$$(R(f * g))(\theta, 1) = \int_{\mathbb{R}^m} (f * g)(1\theta + y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(1\theta + y - z) g(z) dz dy$$

$$\begin{aligned} z &= t\theta + y' \\ y &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^1} f((1-t)\theta + y - y') g(t\theta + y') dt dy dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^1} (Rf)(\theta, 1-t) g(t\theta + y') dt dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} (Rf)(\theta, 1-t) (Rg)(\theta, t) dt$$

$$= (Rf * Rg)(\theta, 1)$$

$$(R^*g)(x) = \int_{S^{m-1}} g(\theta, 1, \theta) d\theta$$

$$g \in \mathcal{Y}(Z), \quad Z = S^{m-1} \times \mathbb{R}^1$$

$$\mathcal{Y}(Z) = \left\{ g \in C^\infty(Z), \sup_{\theta, \sigma} |1 + D^\beta g(\theta, 1)| < \infty \right\}$$

Satz 1.3 : $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ $g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$.

$$(R^* g) * f = R^* (g * R f)$$

Beweis :

$$R^* g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} R^* g(x-y) f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta, (x-y) \cdot \theta) d\theta f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta, (x-y) \cdot \theta) f(y) dy d\theta$$

$$\begin{aligned} y = \theta + y' \\ y' \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, x \cdot \theta - \lambda) f(\theta + y') dy' d\lambda d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, x \cdot \theta - \lambda) (R f)(\theta, \lambda) d\lambda d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (g * R f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

$$= R^* (g * R f)(x)$$



Satz 1.5 (Radon-Nikodym Inversion Formel) : Sei $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ und $g = R f$. Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-i)^{m-1/2} R^* H g^{(m-1)} & , m \text{ gerade} \\ (i)^{m-1/2} R^* g^{(m-1)} & , m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis :

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix \cdot \sigma \cdot \theta} \hat{f}(\sigma \theta) \sigma^{n-1} d\sigma d\theta$$

*

$$\text{Def: } Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(y)}{x-y} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} T^* f, \quad Tf = \int \frac{f(y)}{x} dy$$

Nach Satz 2.2 und Proprietät 1.4:

$$\text{Satz 1.4: } (Hf)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{1/2} \frac{1}{\pi} \hat{T} \hat{f}, \quad \hat{T} = -i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \text{sgn } \xi$$

$$= -i \text{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

$$(H^m f)^\wedge(\xi) = (-i)^m (\text{sgn}(\xi))^m \hat{f}(\xi)$$

$$H^m = \begin{cases} (i)^{m/2} I & m \text{ gerade} \\ -i (i)^{m/2} \text{sgn}(\xi) & m \text{ ungerade} \\ (-i)^{m/2} H & \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} (2r)^{m+1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{i\sigma \cdot \theta} f(\theta, \sigma) |\sigma|^{m-1} d\sigma$$

$$(\text{Satz 1.1}) = \frac{1}{2} (2r)^{-m+1/2} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma \cdot \theta} \hat{q}(\theta, \sigma) |\sigma|^{m-1} d\sigma d\theta$$

$$(2r)^{1/2} I^{1-m} q(\theta, x \cdot \theta)$$

$$= \frac{1}{2} (2r)^{-m+1} \mathcal{R} I^{1-m} q(x)$$

$$(\mathcal{I}^{1-m} \hat{q})^\wedge(\theta, \sigma) = |\sigma|^{m-1} \hat{q}(\theta, \sigma)$$

$$= (\text{sgn } |\sigma|)^{m-1} \sigma^{m-1} \hat{q}(\theta, \sigma)$$

Nach Bemerkung (a) aus § I. 1:

$$(q^{(m-1)})^\wedge = i^{-m-1} \sigma^{m-1} \hat{q}$$

\Rightarrow

$$(\mathcal{I}^{1-m} \hat{q})^\wedge(\theta, \sigma) = i^{1-m} (q^{(m-1)})^\wedge (\text{sgn } |\sigma|)^{m-1}$$

$$= (-i)^{m-1} \hat{q}$$

$$I^{1-m} = (-i)^{m-1} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \mathcal{H} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} I \end{cases}$$

m gerader
ungerade

□

§3 gefilterte Poissonregel: a.

$$W_b * f = R^* (W_b * R f), \quad W_b = R^* W_b$$

$$\hat{W}_b(\xi) = (2\sigma)^{-n/2} \hat{\Phi}(|\xi|/b)$$

$$0 \leq \hat{\Phi} \leq 1, \quad \hat{\Phi}(0) = 0 \text{ für } \sigma > 1.$$

Bemerkung: Φ ideal liefert:

$$W_b(x) = (2\sigma)^{-n/2} b^n \frac{J_{n/2}(b|x|)}{(b|x|)^{n/2}}$$

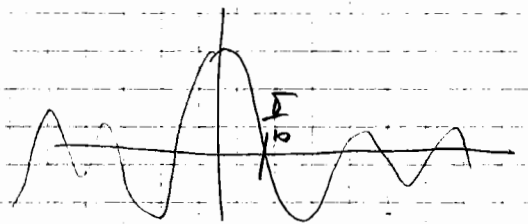
Nach Poisson UB:

$$\hat{W}_b(\xi) = 2 (2\sigma)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \hat{W}_b\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right)$$

$$\hat{W}_b(\sigma) = \frac{1}{2} (2\sigma)^{n/2-n} |\sigma|^{n-1} \hat{\Phi}(|\sigma|/b)$$

Bemerkung: Ideale Tiefpass $n=2$:

$$W_b(x) = \frac{b^2}{4x^2} u(b|x|),$$



$$u(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ x^2, & x = 0. \end{cases}$$

Diskretisierung: $W_b * g \sim W_b^h * g$, $(W_b^h * g)(\theta_j) = h \sum_{\ell} W_b(\theta_j - \ell h) g(\theta_j + \ell h)$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v(\theta) d\theta \sim \sum_{j=0}^{R-1} \alpha_j v(\theta_j)$$

$$R_p^* g(x) = \sum_{j=0}^{R-1} \alpha_j g(\theta_j, x \cdot \theta_j)$$

$$f_{FB} = R_p^* W_b^h * g$$

Annahme:

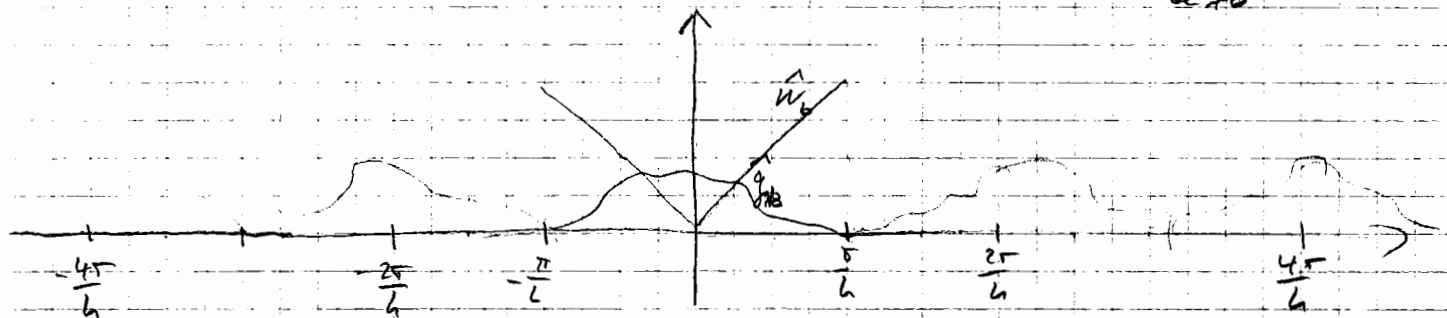
1) $f=0$ außerhalb $|x|<1$

2) $\hat{f}(\xi) \sim 0$ $|\xi|>b$.
(f ist lokal b-beschränkt)

(a) Falluntersuchen.

Nach Sat I.5.5: $L = h \mathbb{Z}$, $\hat{L} = \frac{2\pi}{h} \mathbb{Z}$

$$(w_b * g - w_b * g)^\wedge(\theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \hat{w}_b(\theta) \sum_{\ell \neq 0} \hat{g}(\theta, \sigma - \frac{2\pi \ell}{h})$$



Nach Sat 1.1: $\hat{g}(\theta, \sigma) \sim 0$, $|\sigma| > b$

(c) Falluntersuchen: $h \leq \frac{\pi}{b}$

(b) Riemannsummenansatz

$n=2$, $\Theta_j = (\cos \varphi_j; \sin \varphi_j)$, $\varphi_j = \frac{2\pi}{p} j$, $j=0, \dots, p-1$

$$R_p^* g(x) = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=0}^{p-1} g(\Theta_j, x \cdot \Theta_j) \quad \text{Trapez-Regel}$$

Nach Analyse 8: $h = \frac{2\pi}{p}$, $m=1$:

$$h \sum_{j=0}^{p-1} w_b * g(\Theta_j, x \cdot \Theta_j) = R_p^* w_b * g(x) + 2\pi \sum_{\ell \neq 0} c_{\ell p}^{(2)}$$

$c_\ell(x) =$ Fouri-Koeff. von $g \rightarrow w_b * g(\Theta, x \cdot \Theta)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi} w_b * g(\Theta, x \cdot \Theta) d\varphi$$

$$c_\ell(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi} \int_{-b}^b \underbrace{(w_b * g)^\wedge(\theta, \sigma)}_{\hat{w}_b \hat{g} (2\pi)^{1/2}} e^{+i\sigma x \cdot \Theta} d\sigma d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi} \int_{-b}^b \underbrace{\hat{w}_b(\sigma) \hat{g}(\theta, \sigma)}_{(2\pi)^{1/2} \hat{f}(\sigma\theta)} e^{+i\sigma x \cdot \Theta} d\sigma d\varphi$$

$$= (2\pi)^{112} \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} \int_{-b}^b \hat{w}_b(\sigma) \hat{f}(\sigma\theta) e^{+i\sigma x \cdot \theta} d\sigma d\varphi$$

$$= (2\pi)^{-112} \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} \int_{-b}^b \hat{w}_b(\sigma) \int_{|y|<1} f(y) e^{-i\varphi \cdot \sigma y} dy e^{+i\sigma x \cdot \theta} d\sigma d\varphi$$

$$= (2\pi)^{-112} \int_{|y|<1} f(y) \int_{-b}^b \hat{w}_b(\sigma) \int_0^{2\pi} e^{\sigma \theta \cdot (x-y) - i\varphi} d\varphi d\sigma dy$$

$$x-y = |x-y| \cos \varphi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\sigma |x-y| \cos(\varphi-\varphi') - i\varphi} d\varphi$$

$$\varphi - \varphi' = \varphi'$$

$$= e^{i\varphi} \int_0^{2\pi} e^{\sigma |x-y| \cos \varphi' - i\varphi'} d\varphi'$$

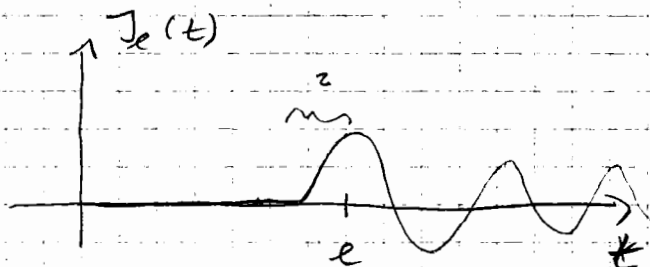
I. 4 :

$$2\pi i^2 J_e(\sigma |x-y|)$$

$$= (2\pi)^{112} i^2 \int_{|y|<1} \int_{-b}^b \hat{w}_b(\sigma) J_e(\sigma |x-y|) d\sigma dy$$

Debye'sche Formel: $0 < \nu < 1$, $\nu \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq J_\nu(\nu e) \leq (2\nu e)^{-112} (1-\nu) e^{-\frac{e}{3}(1-\nu^2)^{3/2}}$$



Also: C_ν , $\nu \neq 0$ verallgemeinerbar für $2b \leq |e|$

\Rightarrow Rückwärtstr. & felder verallgemeinerbar, falls $2b \leq \rho$.

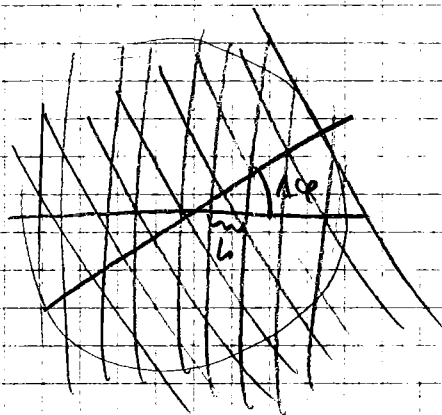
Satz 3.1: Der FFT-Algorithmus rechnet sich für (reelles) b -band beschriebene Funktionen mit Träger im Einheitskreis zusammen; die Funktionen $W_b * f$, falls $P \geq 2b$, $h \leq \frac{\pi}{b}$ und b hinreichend groß.

Bemerkungen 1) $h \leq \pi/b$ ist unbedingt einzuhalten. Verstärken von $P \geq 2b$ nicht so schlimm (unmöglich in der Medizin)

2) # Daten = $\frac{2}{h} P = \frac{4}{\pi} b^2$.

Falls P gerade: $g(\theta_{j+P/2}, 1) = g(\theta_j, -1)$, also hat man nur $\frac{2}{\pi} b^2$ Daten.

3) Standort paralleler Symmetrie:



$$\sin \phi = \frac{2h}{2b} = \frac{h}{b}$$

$$h = \frac{\pi}{b}$$

Multiplizieren $\frac{2\pi}{b}$.

Beispiel: $P = 128$ (d.h. 64 Richtungen in $[0, \pi]$)

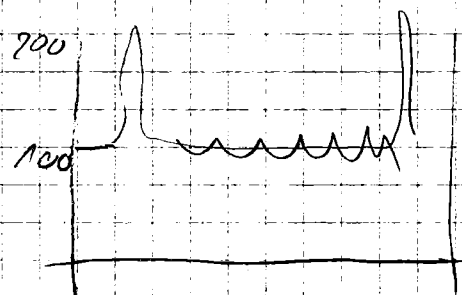
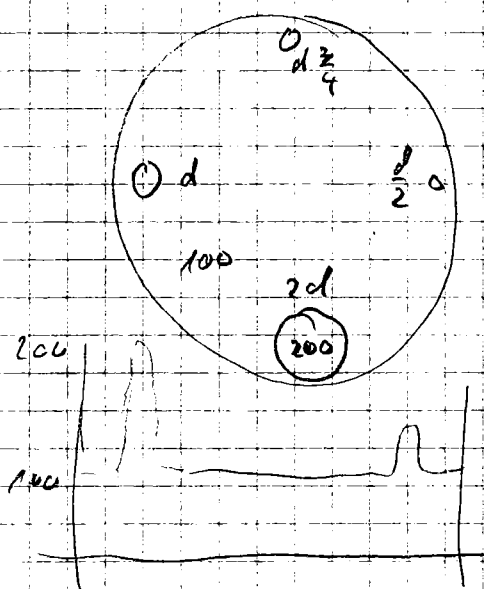
$b = 128$, d.h. $\frac{2\pi}{b} = 0.05 = d$

$h = 0.025$ d.h. nach Theorie:

$h = 0.0125$, d.h. wenn

halt Wert d Theorie:

oder $b = 256$



4)

$$P = 25 \text{ q}$$

Beispiel : $P = 40$, $q = 6$, v. l. 13 Detektoren.

Steuer muss sich ändern weil Abstand bei Detektor 13.

§ 4 Das Abtasttheorem der Cauchy-Transformen

$n=2$, $g = R f$, $f(x) = 0$, $|x| > 1$. $\hat{f}(\xi) \neq 0$, $|\xi| > b$.

Fourier-Transformierte auf $\mathcal{G}(\underbrace{S^1 \times \mathbb{R}^1}_{\mathbb{C}^2}) = \mathcal{G}([0, 2\pi) \times \mathbb{R}^1)$

$$\hat{g}(k, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-ik\varphi - i\sigma\tau} g(\varphi, \tau) d\varphi d\tau$$

\hat{g} ist also auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1$ definiert.

$$\tilde{g}(\varphi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ik\varphi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\sigma\tau} \hat{g}(k, \sigma) d\sigma$$

Gitter L auf $\mathbb{C} = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^1$: $W = (w_1, w_2)$ 2×2 -Matrix

$W \mathbb{Z}^2$ 2π -periodisch in der ersten Komponente,
i.d. $2\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \mathbb{Z}^2$. $L = W \mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{C}^2$

Beispiel 1) $W = \begin{pmatrix} 2\pi/p & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2\pi \\ p \end{pmatrix} j, \ell h \right\} : j=0, \dots, p-1, \ell \in \mathbb{Z}^1$

2) $W =$

Duales Gitter $\hat{L} = 2\pi W^{-T} \mathbb{Z}^2$.

Lemma: Die erste Komponente der Punkte von \hat{L} liegt ganz!

Beweis: $e^{i\tau} 2\pi W^{-T} \in \mathbb{Z}^2$.

Satz 4.1 (Poisson'sche Formel): Sei $g \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^2)$. Dann gilt

$$\sum_{x \in L} g(x) e^{-i\xi \cdot x} = \frac{2\pi}{\det(L)} \sum_{\gamma \in \hat{L}} \hat{g}(\xi - \gamma), \quad \xi \in \hat{L}$$

(Vergl. Defn. 8)

Satz 4.2 (Petersen-Middleton): Sei $K \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1$. Sei

$g \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^1)$ und $\hat{g}(\gamma) = 0$ für $\gamma \notin K$. Die Menge

$K + \gamma$, $\gamma \in \hat{L}$, seien paarweise disjunkt. Dann ist g durch sein Wert auf L eindeutig bestimmt.

Satz 4.3: Seien f, g wie in Satz 4.2. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f g \, ds \, d\varphi = \det(L) \sum_{\lambda \in L} f(\lambda) g(\lambda)$$

Sei nun $g = Rf$. Wir berechnen \hat{g} .

$$\hat{g}(k, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\sigma \cdot s} g(s) \, ds}_{(2\pi)^{1/2} \hat{f}(\sigma \Theta), \Theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}} \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \hat{f}(\sigma \Theta) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i\sigma \Theta \cdot x} \, dx \, d\varphi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi - i\sigma \Theta \cdot x} \, d\varphi}_{e^{-ik\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\sigma \cos \varphi x_1 + \sigma \sin \varphi x_2)} \, d\varphi} \, dx$$

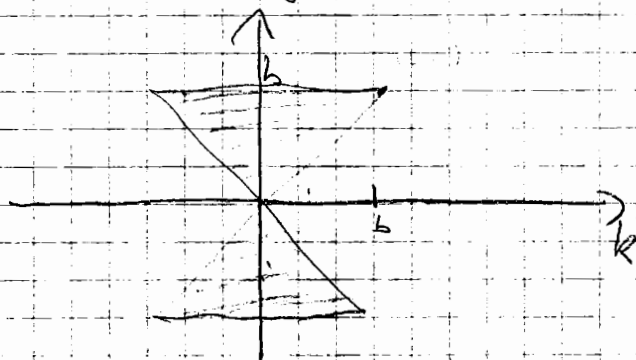
$$\Theta \cdot x = |x| \cos(\varphi - \varphi')$$

$$x = |x| \begin{pmatrix} \cos \varphi' \\ \sin \varphi' \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = \varphi - \varphi$$

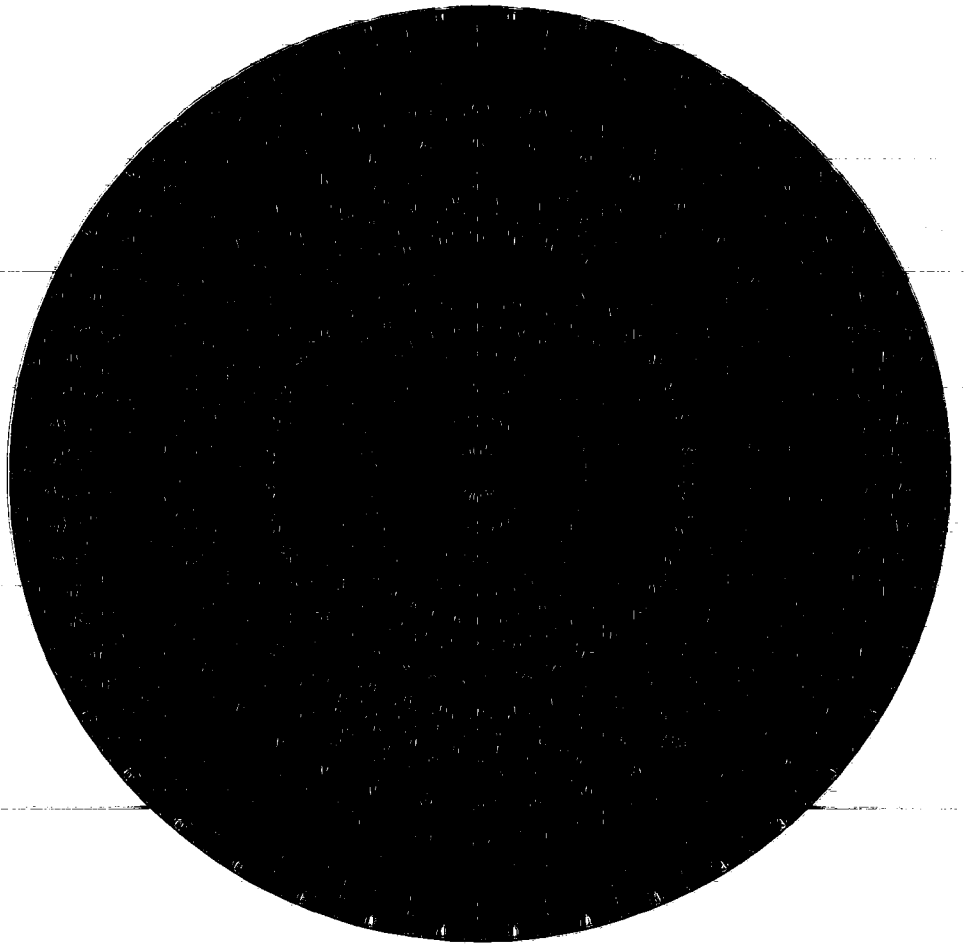
$$= e^{-ik\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\sigma \cos \varphi x_1 + \sigma \sin \varphi x_2)} \, d\varphi = e^{-ik\varphi} J_0(-\sigma |x|)$$

$$|\hat{g}(k, \sigma)| \leq \begin{cases} 2\pi \max_{|s| \leq \sigma} |\hat{f}(s)| & \sigma \geq 0, \sigma \leq b \\ \int_{|x| \leq \sigma} |f(x)| |J_0(\sigma |x|)| \, dx & \sigma < 0, |\sigma| < |k| \end{cases}$$



STANDARD-PARALLEL

p = 20 q = 15



20 directions

34 detectors

Optimal # detectors: 15

Pattern changes at

detector 15

Das hat man mit graph gemacht:

$$W_b \times f(x) = \det(L) \sum_{(\theta, \tau) \in L} W_b (x \cdot \theta - \tau) q(\theta, \tau)$$

$$= \frac{2\pi^2}{b} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{\tau \in \text{gerade}} W_b (x \cdot \theta_j - \tau_e) q(\theta_j, \tau_e), \quad \theta_j = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{b} j \\ \frac{2\pi}{b} j \end{pmatrix}, \quad \tau_e = h e$$

Daten:

$$\theta_{j+p} = -\theta_j,$$

$$q(\theta_{j+p}, \tau_e) = q(-\theta_j, -\tau_e)$$

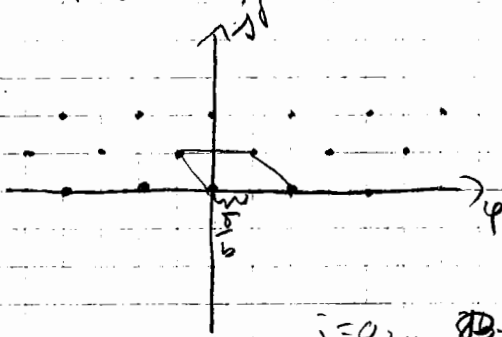
$$\# = \frac{p}{2} \cdot \frac{2}{2 \cdot h} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2}{2 \cdot \frac{b}{2}} = \frac{1}{2} b^2$$

Nach Aufgabe 12:

$$2\pi W^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & b \end{pmatrix}$$

$$W^{-1} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ b & b \end{pmatrix} = \frac{b}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{\pi}{b} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$j=0, \dots, P-1$

$$\varphi_j = j \Delta \varphi$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi}{b}$$

$$\Delta \psi = \Delta \varphi$$

$$h = \frac{\pi}{b}$$

j -te gerade

Parallel Interleaved Geometrie

b gerad, also $2\pi e_1 \in L$

$$P=2b$$

Der FB-Algorithmus für die interleaved-Geometrie:

$$W_b * f(x) = R^*(W_b * g) \quad (*)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} W_b(x \cdot \Theta - 1) g(\Theta, \sigma) d\sigma d\Theta, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

Fourier-Transform

Wir zeigen, dass die Funk. $\hat{h}: (\varphi, \sigma) \rightarrow W_b(x \cdot \Theta - 1)$ ebenfalls aufserhalb K vernachlässigt werden kann.

$$\hat{h}(k, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} W_b(x \cdot \Theta - 1) e^{-i(k\varphi + \sigma\psi)} d\sigma d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \int_{\mathbb{R}^1} W_b(\sigma') e^{-i(x \cdot \Theta - 1)\sigma'} d\sigma' d\varphi \quad \sigma' = x \cdot \Theta - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \hat{W}_b(-\sigma) e^{-ix \cdot \Theta \sigma} d\varphi \quad x = |x| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2\pi} \hat{W}_b(-\sigma) e^{ik\varphi} \int_{\mathbb{R}^1} \hat{h}(\sigma |x|)$$

≈ 0 falls $\left. \begin{array}{l} |\sigma| > b \text{ oder} \\ |\sigma| < k \end{array} \right\}$

§ 5 Bildrekonstruktion aus Streifenintegralen.

$$g_{je} = \int_{\mathbb{R}^n} z_e(\theta) g(\theta_j, \theta) d\theta, \quad g = Rf$$

$$\begin{aligned} R_{je} f &= \int z_e(\theta) \circ g(\theta_j, \theta) d\theta \\ &= \int z_e(x \cdot \theta_j - \theta) f(\theta) d\theta \\ &= (f, z_{je}) \end{aligned}$$

$$R_j^* = \begin{pmatrix} R_{j1} \\ \vdots \\ R_{jq} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_0 \\ \vdots \\ R_{p-1} \end{pmatrix}, \quad Rf = g$$

(1) Tychonoff-Phillips:

$$\min_f \|Rf - g\|^2 + \omega^2 \|f\|^2$$

Nach

Satz 1.4: $(R^*R + \omega^2 I) f_\omega = R^*g$

$$f_\omega = R^*h$$

$$R^*(R R^* + \omega^2 I) h = R^*g$$

$$(R R^* + \omega^2 I) h = g$$

$$R R^* = R_i R_j^*, \quad R_j^* h_j = \sum_e h_{je} z_{je}$$

$$(R_i R_j^*)_{ke} = (z_{ik}, z_{je})$$

Lösung von $(R R^* + \omega^2 I) h = g$:

$$R R^* = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{p-1} \\ S_{p-1} & S_0 & S_1 & \dots & S_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_1 & \dots & S_{p-1} & S_0 \end{pmatrix}, \quad S_{pij} = S_j$$

$$(R R^* h)_k = \sum_{j=0}^{p-1} S_{j-k} h_j, \quad k = 0, \dots, p-1$$

Fallung auf ein diskretes Fourier-Transformal:

$$Y_k = \sum_{j=0}^{p-1} Z_{k-j} X_j, \quad k=0, \dots, p-1, \quad z \text{ Perioden } p.$$

$$\hat{Y}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i j k / p} Y_j, \quad Y_j = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i j k / p} \hat{Y}_k$$

$$\hat{Y}_k = p \hat{Z}_k \hat{X}_k$$

Umformung von $Y = Z_1 X$, $Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_{-1} & \dots & z_{-p+1} \\ z_1 & z_0 & \dots & z_{-p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{p-1} & \dots & \dots & z_0 \end{pmatrix}$:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{p} \hat{Z}_k^{-1} \hat{Y}_k$$

Das gilt auch, wenn die Z_j komplexwertig und X_j, Y_k Vektoren sind.
Algorithmen:

Für alle
mal

①

$$\hat{S}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i j k / p} S_j, \quad S_j = \begin{cases} S_j, & j \neq 0 \\ S_0 + \omega^j I, & j = 0 \end{cases}$$

$k=0, \dots, p-1$

②

$$\hat{S}_k^{-1}, \quad k=0, \dots, p-1.$$

Für jede

Behandlung:

③

$$\hat{g}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i j k / p} g_j, \quad k=0, \dots, p-1$$

④

$$\hat{h}_k = \frac{1}{p} \hat{S}_k^{-1} g_k, \quad k=0, \dots, p-1$$

⑤

$$h_j = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i j k / p} \hat{h}_k, \quad j=0, \dots, p-1$$

⑥

$$f(x) = \sum_{k \in K} h_k e^{2\pi i k x / p}$$

$$h_k = \text{semp}(Z_k e)$$

Z_k ist in der Regel - als Eigenwert Matrix der i -ten q -ten Potenz nicht linear unabhängig Z_k - nicht invertierbar. Also sind die \hat{S}_k in der Regel nicht invertierbar. In diesem Fall nimmt man für \hat{h}_k wegen

ein Zerlegung von $\hat{S}_k \hat{h}_k = \frac{1}{p} \hat{g}_k$, z. B. die Laurent-Reihen-
Die \hat{h}_k sind also nur bestimmt bis auf $\hat{z}_k \in \ker(\hat{S}_k)$. Also
ist h nur bestimmt bis auf z mit

$$z_j = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i j k / p} \hat{z}_k$$

und es ist $R R^* z = 0$, also $R^* z = 0$. Bei der Periodizität
ergeben diese z also keine Beiträge.

§ 6 Die Singulärwertzerlegung der Radon-Transformiert.

$m=2, f \in L_2(|x| \leq 1)$

$R_\theta f(x) = \int_{x \cdot \theta = 1} f(x) dx, R_\theta: L_2(|x| \leq 1) \rightarrow L_2(|x| \leq 1)$

$(R_\theta f, g) = \int \int f(x \cdot \theta + t \theta^\perp) dt ds^{g(x)}$
 $= \int f(x) g(x \cdot \theta) dx, \dots$

$R_\theta^* g(x) = \frac{g(x \cdot \theta)}{\sqrt{|x \cdot \theta|^2}}$

(Lemma 6.1): $R_{\theta_1} R_{\theta_2}^* g(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} g(t \sin \varphi + 1 \cos \varphi) dt,$

as $\varphi = \theta_1 \cdot \theta_2, 0 \leq \varphi \leq \pi$

Beweis: $\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, 0 \leq \varphi \leq \pi$

$R_{\theta_1} R_{\theta_2}^* g(x) = \int (R_{\theta_2}^* g)(1 \theta_1 + t \theta_1^\perp) dt$
 $= \int g((1 \theta_1 + t \theta_1^\perp) \cdot \theta_2) dt$

$= \int g(1 \cos \varphi + t \sin \varphi) dt \quad \square$

Orthogonal-Polynom 2. Art:

$U_\ell(x) = \ell + 1$

$U_\ell(x) = \frac{\sin(\ell+1)\varphi}{\sin \varphi}, \cos \varphi = x$

$\int_{-1}^1 U_\ell U_k (1-x^2)^{1/2} dx = \int_0^\pi \sin(\ell+1)\varphi \sin(k+1)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \delta_{\ell k}$

Lemma 6.2: $R_{\theta_1} R_{\theta_2}^* U_m = \alpha_m (\theta_1 \cdot \theta_2) (1-x^2)^{1/2} U_m$

Beweis: (i) $g = t^j (1-x^2)^{k-j}, 0 \leq j \leq k \leq m$

$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} t^j (1-x^2)^{k-j} dt = \begin{cases} 0, & j \text{ ungerade} \\ \sqrt{1-x^2} P_k(x), & P_k \text{ Polynom von Grad } k \end{cases}$

(ii) $g = U_m$, Da $U_m(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ein Lösungsansatz für den Term von (i):

$$R_{\Theta_1} R_{\Theta_2} U_m = \sqrt{1-\eta^2} P_m$$

$$(R_{\Theta_1} R_{\Theta_2} U_m, U_\ell) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} P_m U_\ell = 0, \quad \ell > m.$$

Wegen $(R_{\Theta_1} R_{\Theta_2}^*)^* = R_{\Theta_2} R_{\Theta_1}^* = R_{\Theta_2} R_{\Theta_1}^*$ (Satz 6.1):

Also $(R_{\Theta_1} R_{\Theta_2}^* U_\ell, U_m) = (R_{\Theta_1} R_{\Theta_2} U_m, U_\ell) = 0 \quad \ell > m$
v.l.

$$R_{\Theta_1} R_{\Theta_2}^* U_m(\eta) = L_m(\Theta_1, \Theta_2) \sqrt{1-\eta^2} U_m(\eta)$$

$$d_m(\eta) = \lim_{\Delta \rightarrow 1} \frac{\int_{-\sqrt{1-\eta^2}}^{+\sqrt{1-\eta^2}} U_m(\cos \varphi + i \sin \varphi) dt}{\sqrt{1-\eta^2} U_m(\eta)} = \frac{2 U_m(\cos \varphi)}{U_m(\eta)} \quad \square$$

$$R_\Theta = L_2(|x| < 1) \rightarrow L_2(-1, +1, (1-x^2)^{-1/2})$$

$$(R_\Theta f, g) = \int (1-x^2)^{-1/2} g(x) \int f(\eta \cos \varphi + \Theta^+ / dt) dx$$

$$= \int f(x) g(x) (1-\Theta \cdot \Theta^2)^{-1/2} dx, \quad \text{v.l.}$$

Der Adjungierte $R_\Theta^\#$ ist: $R_\Theta^\# g(\eta) = R_\Theta^* (\sqrt{1-\eta^2}^{-1} g)$

$$\Rightarrow R_{\Theta_1} R_{\Theta_2}^\# (\underbrace{\sqrt{1-\eta^2}^{-1} U_m}_{u_m}) = L(\Theta_1, \Theta_2) \underbrace{\sqrt{1-\eta^2} U_m}_{u_m}$$

$$R = L_2(|x| < 1) \rightarrow L_2(\mathbb{R} = (1-x^2)^{-1/2})$$

$$R^\# g = \int_{\mathbb{R}} R_\Theta^\# g d\Theta$$

Lemma 6.3: $R R^\#$ hat die Eigenfunkt. $u_m e^{i\ell \varphi}$ mit den

Eigenwerten $\lambda_{m,\ell} = \frac{4\eta}{m+1}$, $m=0, 1, \dots$, $\ell = -m, -m+2, \dots, m$

Beispiel: $h = h(\theta)$, $\theta \in S^1$

$$R R^\# (h u_m)(\omega, 1) = R_\omega R^\# (h u_m)(1)$$

$$= R_\omega \int_{S^1} R_\theta^\# (h u_m)(1) d\theta = \int_{S^1} R_\omega R_\theta^\# (h u_m)(1) d\theta$$

$$= \int_{S^1} (R_\omega R_\theta^\# u_m)(1) h(\theta) d\theta$$

$$= \int_{S^1} \alpha(\omega, \theta) u_m^{(1)} h(\theta) d\theta = \int_{S^1} \alpha(\omega, \theta) h(\theta) d\theta u_m^{(1)}$$

$$(\quad) = A_m h(\omega) u_m(1),$$

$$A_m h(\omega) = \int_{S^1} \alpha_m(\omega, \theta) h(\theta) d\theta$$

$$h = e^{i\ell\varphi}$$

$$A_m h(\omega) = \int_0^{2\pi} \alpha_m(\cos(\varphi - \varphi')) e^{i\ell\varphi} d\varphi \quad \varphi - \varphi = \varphi'$$

$$= e^{i\ell\varphi} \int_0^{2\pi} \alpha_m(\cos \varphi') e^{i\ell\varphi'} d\varphi'$$

$$= e^{i\ell\varphi} \sigma_{m\ell}^2$$

$$\Rightarrow R R^\# (e^{i\ell\varphi} u_m) = \sigma_{m\ell}^2 e^{i\ell\varphi} u_m$$

$$\sigma_{m\ell}^2 = \int_0^{2\pi} \alpha_m(\cos \varphi') e^{i\ell\varphi'} d\varphi' (1 + (-1)^{\ell+m})$$

$$= \begin{cases} 0 & \ell + m \text{ ungerade} \\ 2 & \int_0^{2\pi} \alpha_m(\cos \varphi') e^{i\ell\varphi'} d\varphi' \end{cases}$$

m+l gleich:

$$\sigma_{m,l} = \frac{4}{m+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi} e^{il\varphi} d\varphi$$

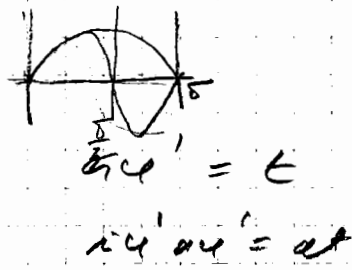
$$= \frac{4}{m+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi} \cos l\varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{m+1}$$

$$= \frac{4}{m+1} \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi}}_{\text{Dirichlet kernel}} \cos l\varphi d\varphi$$

$$\left. \begin{aligned} & 2(\cos m\varphi + \cos(m-2)\varphi + \dots + \cos\varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ ungerade} \\ m \text{ gerade} \end{array} \right. \\ & 2(\cos m\varphi + \cos(m-1)\varphi + \dots + \cos\varphi) + 1 \end{aligned} \right\}$$

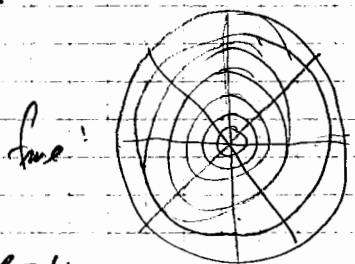
$$= \frac{8}{m+1} \int_0^{\pi} \cos^2 l\varphi d\varphi = \frac{4\pi}{m+1}, \quad l=0, 1, \dots$$



SVD von R: $g_{m,l} = c_m e^{il\varphi} u_m$

$$c_m^{-2} = \int_{S^1} \int_{S^1} w^{-1} u_m^2 ds = \pi^2$$

$$R R^{\#} g_{m,l} = \sigma_{m,l}^2 g_{m,l}$$



$$f_{m,l}(x) = \frac{1}{\sigma_{m,l}} R^{\#} g_{m,l}(x)$$

$l=4$
 $m=6$

$$= \frac{1}{\sigma_{m,l}} \int_{0, 2\pi} w^{-1}(x, \theta) e^{il\varphi} u_m(x, \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{\sigma_{m,l}} \int_{0, 2\pi} e^{il\varphi} U_m(x, \theta) d\theta$$

$$x \cdot \theta = |x| \cos(\varphi - \varphi')$$

$$\varphi' = \varphi - \varphi$$

$$= \frac{1}{\sigma_{m,l}} e^{il\varphi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi'} U_m(|x| \cos(\varphi')) d\varphi'$$

$$= \frac{1}{\sigma_{m,l}} e^{il\varphi} g_{m,l}(|x|), \quad g_{m,l} \text{ Pol. von Grad } m$$

$$Rf = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n | \sigma_{ne} (f, l_{ne}) | g_{ne}$$

$$R'g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n | \frac{1}{\sigma_{ne}} (g, l_{ne}) | f_{ne}$$

Imwendung: Kondensierung der σ -Funktion
 $\cong \sqrt{2}$ -Stabilität

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 1 , Abgabe: 22.10.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 1:Sei T der Cauchysche Hauptwert, also

$$Tf = \oint \frac{f(x)}{x} dx .$$

Zeigen Sie:

$$(a) \quad Tf = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{|x| \geq h} \frac{f(x)}{x^2} dx + \frac{f(h)+f(-h)}{h} dx \right\}$$

$$(b) \quad Tf = \int \frac{f(x)-f(-x)}{2x} dx$$

$$(c) \quad \hat{T}(\xi) = -i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn} \xi$$

Aufgabe 2:Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Zeigen Sie:

- 2
- (a) Ist f homogen vom Grade k (d.h. $f(tx) = t^k f(x)$ für $t \in \mathbf{R}^1$), so ist \hat{f} homogen vom Grade $-k - n$.
- (b) Ist f rotationsinvariant (d.h. f ist eine Funktion von $|x|$), so ist auch \hat{f} rotationsinvariant.

Aufgabe 3:Sei $f \in L_1(\mathbf{R}^n) = \{f : f \text{ meßbar, } \int |f| dx < \infty\}$.Zeigen Sie: $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$ mit

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(x) dx$$

Aufgabe 4:

Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie \hat{f} .

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 2 , Abgabe: 29.10.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 5:

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $r > 0$ sei $f_r(x) = f(rx)$. Für $T \in \mathcal{S}'$ sei

$$T_r f = r^{-n} T f_{1/r}.$$

Zeigen Sie:

- 1) $T_r \in \mathcal{S}'$
- 2) $\delta = r^n \delta_r$
- 3) $(T_r)^\wedge = r^{-n} (\hat{T})_{1/r}$

Aufgabe 6:

Sei J_ν die Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung ν , d.h.

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad \nu \geq 0.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 2$, eine radiale Funktion (d.h. $f(x) = f(|x|)$) so ist auch \hat{f} radial, und es gibt

$$\hat{f}(\rho) = \rho^{(2-n)/2} \int_0^\infty r \hat{\mathcal{J}}_{(n-2)/2}(r\rho) f(r) dr$$

Hinweis: Für $n \geq 2$ und $\Theta \in S^{n-1}$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\Theta \cdot \omega} d\omega = (2\pi)^{n/2} \sigma^{(2-n)/2} \hat{\mathcal{J}}_{(n-2)/2}(\sigma)$$

Aufgabe 7:

Sei $x \rightarrow x' = Ax + a$ eine affine Abbildung in \mathbf{R}^n , d.h. A ist eine nicht-singuläre (n, n) -Matrix und $a \in \mathbf{R}^n$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und $F(x) := f(Ax + a)$.

(a) Zeigen Sie:

$$\hat{F}(A^T \xi) = \frac{1}{|\det(A)|} e^{ia \cdot \xi} \hat{f}(\xi).$$

(b) $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ heißt radial, wenn für jede Rotation U und jeden $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gilt

$$Tf = T(f \circ U).$$

Zeigen Sie: Ist T radial, so auch \hat{T} .

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 3 , Abgabe: 05.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 8:

Sei $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, p eine ganze positive Zahl und $h = \frac{2\pi}{p}$.

Zeigen Sie:

$$(a) \quad h^n \sum_{0 \leq k < p} f(hk) = (2\pi)^n \sum_t \hat{f}_{pt}$$

$$(b) \quad \int_{[0, 2\pi]^n} f(x) dx - h^n \sum_{0 \leq k < p} f(hk) = -(2\pi)^n \sum_{t \neq 0} \hat{f}_{pt}$$

Hierbei ist $0 \leq k < p$ komponentenweise zu verstehen, und $k, \ell \in \mathbf{Z}^n$.

Aufgabe 9:

Ein sich mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbf{R}^n$ bewegendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit Δt photographiert. Auf dem Film entsteht dann das Bild

$$g(x) = \int_0^{\Delta t} f(x + tv) dt .$$

Sei T die Distribution

$$Tf = \int_0^{\Delta t} f(-tv) dt .$$

Zeigen Sie:

1/12 $\int \frac{1}{4\delta}$ (a) $g = f * T$
 (b) $\hat{g}(\xi) = \int e^{ia} \text{sinc}(a) \hat{f}(\xi)$ mit $a = \Delta t v \cdot \xi$.

Kann man f aus g berechnen?

Aufgabe 10:

Ein mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit Δt photographiert. Auf dem Film entsteht dann das verschmierte Bild

$$g(x) = \int_0^{\Delta t} f(U(t)x) dt , \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} . \quad / \Delta t$$

Setzen sie

$$x = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} , \quad f(x) = \sum_k f_k(r) e^{ik\varphi} , \quad g(x) = \sum_k g_k(r) e^{ik\varphi}$$

und berechnen Sie die g_k aus den f_k .

Kann man die f_k aus den g_k berechnen?

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 4 , Abgabe: 12.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 11:

Zeigen Sie: Für $h = \frac{\pi}{b}$ bilden die Funktionen

$$f_k(x) = h^{-n/2} \operatorname{sinc} b(x - hk), \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 12:

Zeigen Sie mit Hilfe der Reihe von Aufgabe 6:

$$\int_0^{\chi} t^{\nu} J_{\nu-1}(t) dt = \chi^{\nu} J_{\nu}(\chi), \quad \nu \geq 1.$$

/// *

Aufgabe 13:

Sei $S_h f$ die sinc-Reihe für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$(S_h f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk).$$

Zeigen Sie:

$$\int (S_h f)(x) dx = h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk)$$

Aufgabe 14:

Sei für $\varepsilon > 0, b > 0$

$$f(x) = e^{-\varepsilon^2 x^2} \sin b x, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Zeigen Sie:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2} 2i\varepsilon} \left(e^{-(\xi-b)^2/2\varepsilon^2} - e^{-(\xi+b)^2/2\varepsilon^2} \right)$$

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 5 , Abgabe: 19.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 16:Sei $K = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : |\xi_1| + |\xi_2| \leq b\}$.

- (a) Bestimmen Sie das quadratische achsenparallele Gitter L maximaler Effizienz für K und geben Sie $\eta(L, K)$ an.
- (b) Geben Sie ein Gitter L mit $\eta(L, K) = 1$ an.

Aufgabe 17:

Wie Aufgabe 16, aber mit

$$K = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : |\xi_2| \leq b, |\xi_1| \leq |\xi_2|\}.$$

Aufgabe 18:Sei L ein Gitter in \mathbf{R}^n . Zeigen Sie:

- (a) $\hat{L} = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \frac{1}{2\pi} \xi \cdot x \in \mathbf{Z}, \forall x \in L\}$
- (b) L hat die Periode $p \in \mathbf{R}^n$ (d.h. $L + p = L$) genau dann, wenn $p \in L$.
- (c) Sei n_L die Anzahl der Punkte von L pro Einheitsvolumen. Dann ist

$$n_L n_{\hat{L}} = (2\pi)^{-n}.$$

Aufgabe 19:Sei $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ b -bandbeschränkt.

- (a) Zeigen Sie: Ist $h < \frac{\pi}{b}$, so gibt es eine von x, h, f unabhängige Zahl C mit

$$|f(x)| \leq C \max_{k \in \mathbf{Z}^n} |f(hk)|.$$

- (b) Gilt dies auch für $h = \frac{\pi}{b}$?
- (c) Wie lautet die Aussage (a) für ein beliebiges Gitter L ?

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 6 , Abgabe: 26.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 20:

Sei

dft(float * x, int p, int sign)

bzw.

Procedure dft(VAR X : ARRAY OF REAL;CARDINAL p; INTEGER sign);

ein Programm für die eindimensionale diskrete Fourier-Transformation der Länge p , d.h. das Feld $x[0], \dots, x[p-1]$ wird für $\text{sign} = 1$ mit

$$\hat{x}[k] = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i j k / p} x[j]$$

und für $\text{sign} = -1$ mit

$$\tilde{x}[k] = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i j k / p} x[j]$$

überschrieben. Schreiben Sie mit Hilfe von dft ein Programm

dft2(float * x, int p, int sign)

bzw.

```
Procedure dft2(VAR x : ARRAY[1..MAX,1..MAX]
OF REAL;CARDINAL p;INTEGER sign);
```

zur zweidimensionalen Fourier-Transformation der Länge p .**Aufgabe 21:**

Schreiben Sie unter Benutzung der Programme der Aufgabe 20 Programme

conv(float * y, float * w, float * z, int p)

bzw.

Procedure conv(VAR x,w,z : ARRAY OF REAL;CARDINAL p)

und

conv2(float ** y, float ** w, float ** z, int p)

bzw.

```
Procedure conv2(VAR y,w,z : ARRAY[1..MAX,1..MAX]
OF REAL, CARDINAL p);
```

zur ein- bzw. zweidimensionalen Faltung der Länge p ohne wrap-around-Fehler.**Aufgabe 22:**Sei $z = w * y$ eine nicht notwendig zyklische Faltung der Länge p in n Dimensionen. Sie

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 7 , Abgabe: 03.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 24:Sei $f = (f_1, \dots, f_N)$ ein Bild mit

$$E f_k = \mu, \quad \rho(f_k, f_{k+1}) = \rho.$$

Sei $\hat{f}_{k+1} = \alpha f_k + \beta$ eine Schätzung für f_{k+1} und $d_k = \hat{f}_k - f_k$.

Zeigen Sie:

- (a) $E(d_{k+1}^2)$ ist minimal für $\alpha = \rho$, $\beta = (1 - \rho)\mu$.
- (b) Sind α, β wie in a) gewählt, so sind d_k, d_{k+1} unkorreliert.
- (c) Sind α, β wie in a) gewählt, so ist $E d_{k+1} = 0$.

Aufgabe 25:Die Transformation $\mathcal{A} = Uf$ mit der (N, N) -Matrix

$$U_{kl} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{k\ell\pi}{N+1}, \quad k, \ell = 1, \dots, N$$

heißt Sinus-Transformation.

- (a) Zeigen Sie, daß U unitär ist.
- (b) Zeigen Sie, daß U die Karhunen-Loève-Transformation für die Kovarianzmatrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & & \\ \rho & 1 & \rho & & \\ & \rho & 1 & \rho & \\ & & & \ddots & \rho \\ & & & \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq |\rho| \leq \frac{1}{2}$$

ist. Bestätigen Sie, daß K positiv definit ist.

- (c) Schreiben Sie mit Hilfe von dft ein Programm dst zur schnellen Sinus-Transformation.

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 8 , Abgabe: 10.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 28:

Sei H_p die Hadamard-Matrix der Ordnung $N = 2^p$ aus Aufgabe 26 (b). Zeilen und Spalten von H_p seien mit den Nummern $0, \dots, N-1$ bezeichnet. Die Dualdarstellung von $i \in \{0, \dots, N-1\}$ sei (i_{p-1}, \dots, i_0) , also $i = i_0 + 2i_1 + \dots + 2^{p-1}i_{p-1}$ mit $i_\ell \in \{0, 1\}$.

les in

(a) Zeigen Sie, daß H_p für jedes $i \in \{0, \dots, N-1\}$ genau eine Zeile mit genau i Zeichenwechslern gibt.

(b) Die Abbildung z von $\{0, \dots, N-1\}$ in sich selbst sei erklärt durch

$$\begin{aligned} z_0(i) &= i_{p-1} \\ z_\ell(i) &= i_{p-\ell} + i_{p-\ell-1} \pmod{2}, \quad \ell = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, daß H_p in Zeile $z(i)$ genau i Zeichenwechsel hat.

(d) Sei $f = (f_0, \dots, f_{N-1})^T$, $g = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ und $g = H_p f$.

Zeigen Sie, daß

$$g_i = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i_0 j_0 + \dots + i_{p-1} j_{p-1}} f_j, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

(e) Sei $H = H_p \otimes H_p$ die zweidimensionale Hadamard-Matrix,

$$f = (f_{00}, f_{01}, \dots, f_{N-1, N-1})^T,$$

$$g = (g_{00}, g_{01}, \dots, g_{N-1, N-1})^T$$

und $g = H f$.

Wie lautet die (c) entsprechende Formel?

Aufgabe 29:

Sei K die (N, N) -Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{N-2} \\ & \vdots & & & \\ \rho^{N-1} & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\det(K) = (1 - \rho^2)^{N-1}, \quad N = 1, 2, \dots$$

(b) Schließen Sie aus (a), daß K für $|\rho| < 1$ positiv definit ist.

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 9 , Abgabe: 17.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 30:

Sei $\phi \in C^\infty[0, \infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1)

$$\int_0^\infty |\phi(s)s| ds < \infty, \quad \int_0^\infty \phi(s)s ds \neq 0.$$

2) Gilt für ein integrierbares h mit kompaktem Träger

$$\int_0^\infty \phi(\rho s)h(s) ds = 0, \quad 0 \leq \rho < \infty,$$

so ist $h = 0$.

Die Funktion $\phi(s) = e^{-s}$ ist ein Beispiel einer solchen Funktion. Sei f_0 eine radiale Funktion in \mathbb{R}^2 mit $|\hat{f}_0(\xi)| = \phi(|\xi|)$ und sei F die Menge aller Funktionen, die durch eine affine Transformation aus f_0 hervorgehen.

Zeigen Sie:

- Sind $f, g \in F$ und ist $N_f = N_g$, so geht f aus g durch eine Bewegung hervor.
- Sind $f, g \in F$ und ist $P_f = P_g$, so geht f aus g durch Streckung, eventuell Spiegelung, eventuell Punktspiegelung, und eine Translation hervor.
- T_f ist konstant auf F .

Hinweis: Jede (n, n) -Matrix A läßt sich in der Form $A = UDV$ schreiben mit unitären Matrizen U, V und einer Diagonalmatrix D mit nichtnegativen Elementen.

Aufgabe 31:

- Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sei $(Rf)^\wedge$ die eindimensionale Fourier-Transformation von Rf bezüglich des zweiten Arguments, und sei \hat{f} die zweidimensionale Fourier-Transformation von f .

Zeigen Sie:

$$(Rf)^\wedge(\Theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\sigma\Theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}^1, \quad \Theta \in \mathcal{S}^1.$$

- Benutzen Sie (a), um einen Algorithmus zur Suche nach Geraden in einem $N \times N$ -Bild zu konstruieren, welcher mit $O(N^2 \log N)$ Operationen auskommt.

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 10 , Abgabe: 07.01.1991 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 32:Seien $\mu_k(f)$ die zentrierten Momente von f .

Zeigen Sie, daß

$$\rho_2(f) = (\mu_{20}(f) - \mu_{02}(f))^2 + 4\mu_{11}^2(f)$$

invariant gegenüber Bewegungen ist.

Aufgabe 33:

Sei $\Gamma : x = \gamma(s)$, $0 \leq s \leq L$, eine zweimal stetig differenzierbare Kurve im \mathbb{R}^2 ohne singuläre Punkte. Der Parameter s sei die Bogenlänge. Sei $\phi(s)$ der (kleinere) Winkel zwischen der Tangente an Γ in $\gamma(s)$ und einer festen Geraden, und sei $k(s) = \left| \frac{d}{ds} \phi(s) \right|$ die Krümmung von Γ in $\gamma(s)$. Sei

$$\hat{k}_\ell = \int_0^L k(s) e^{-2\pi i \ell s / L} ds, \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

- (a) Drücken Sie \hat{k}_ℓ durch γ aus.
 (b) Zeigen Sie, daß \hat{k}_ℓ affin invariant ist.

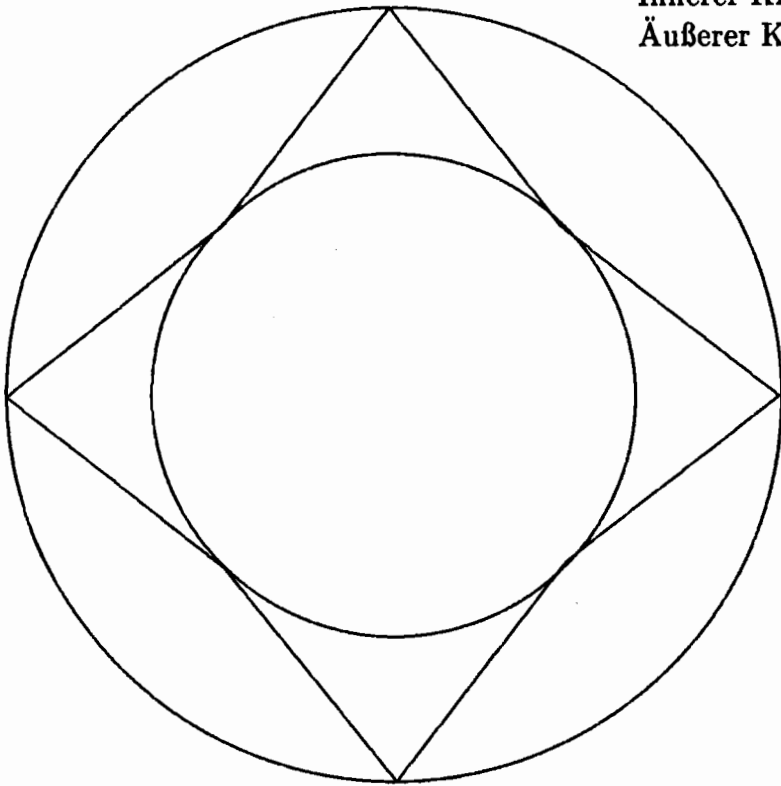
Aufgabe 34:

Für $p > 0$ gerade sei Γ der Polygonzug mit p Ecken a_0, \dots, a_{p-1} , der für $p = 8$ und $p = 16$ unten abgebildet ist.

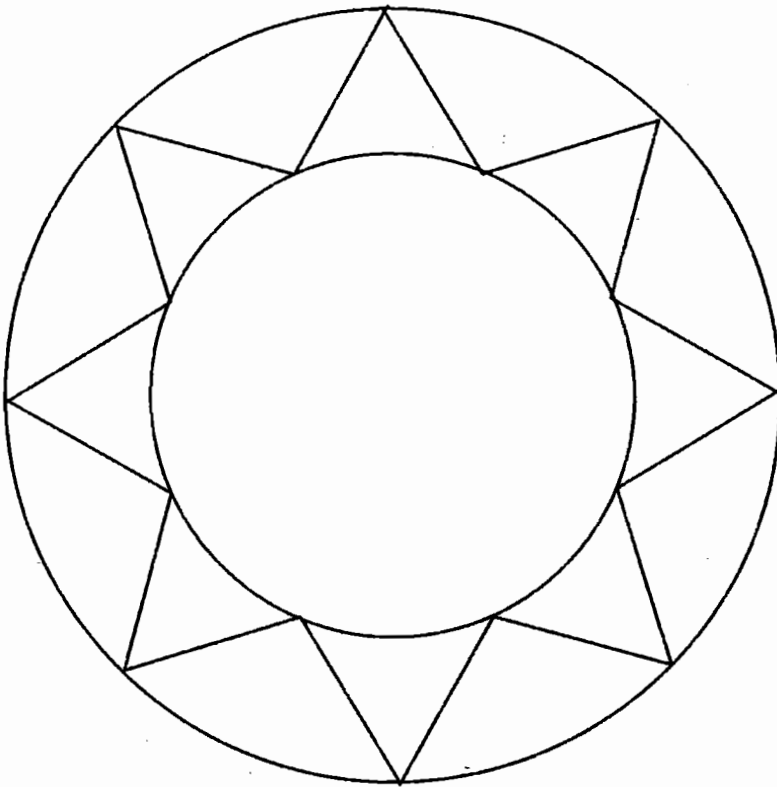
- (a) Berechnen Sie die Fourier-Deskriptoren $|\hat{a}_k|$, $k = 0, \dots, p-1$ von Γ .
 (b) Zeigen Sie: Sind $|\hat{b}_k|$ die Fourier-Deskriptoren eines weiteren Polygonzugs Γ' mit p Ecken und ist $|\hat{b}_k| = |\hat{a}_k|$, $k = 0, \dots, p-1$, so liegen die Ecken von Γ' je zur Hälfte auf zwei konzentrischen Kreisen mit Radius \mathcal{R} zwischen 1 und r einschließlich. Hat einer der Kreise den Radius 1 oder r , so stimmen Γ und Γ' bis auf Rotation überein.

Innerer Kreis : Radius 1
Äußerer Kreis : Radius $r > 1$

$p = 8$



$p = 16$



NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 11 , Abgabe: 14.1.1991 , 15.00 Uhr

Aufgabe 35:

Sei $F = G = L_2(\mathbf{R}^n)$ und A der Operator aus Aufgabe 10, d.h.

$$(Af)(x) = \int_0^{\Delta t} f(U(t)x) dt .$$

Zeigen Sie, daß A stetig ist, und untersuchen Sie die Gleichung $Af = g$ auf Schlechtgestellttheit.

Aufgabe 36:

Sei f eine radiale Funktion in \mathbf{R}^2 , d.h. $f(x) = F(|x|)$. Sei R die Radon-Transformation. Zeigen Sie:

$$(Rf)(\theta, s) = 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{F(u)u \, du}{\sqrt{u^2 - s^2}} .$$

Aufgabe 37:

Sei $f_r(x) = f(rx)$ und R die Radon-Transformation.

a) Zeigen Sie:

$$Rf_r(\theta, s) = \frac{1}{r} (Rf)(\theta, sr) .$$

b) Schließen Sie aus (a): Es gibt eine Folge $(f_k)_{k=1,2,\dots}$ in $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ mit

$$\|f_k\|_{L_2(|x|<1)} = 1 , \quad \|Rf_k\|_{L_2(S^1 \times \mathbf{R}^1)} \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$.

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 12 , Abgabe: 21.01.1991 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 38:

$A : F \rightarrow G$ besitze eine SVD, und f_ω sei die *Tychonoff-Phillips*-Lösung zu $Af = g$.

Zeigen Sie:

- (a) Die Funktion $\omega \rightarrow \|Af_\omega - g\|_G^2 + \omega^2 \|f_\omega\|_F^2$, $\omega \geq 0$, ist nicht fallend.
- (b) Die Funktion $\omega \rightarrow \|f_\omega\|_F$, $\omega \geq 0$, ist nicht wachsend.

Aufgabe 39:

Sei $A : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$Af = T * f ,$$

wobei $T \in S'$ und \hat{T} eine beschränkte integrierbare Funktion ist.

Zeigen Sie, daß die *Tychonoff-Phillips*-Lösung von $Af = g$ durch

$$\hat{f}_\omega = \frac{\overline{\hat{T}} \hat{g}}{|\hat{T}|^2 + \omega^2}$$

gegeben ist.

Aufgabe 40:

$A : F \rightarrow G$ besitze eine SVD, und 1 sei der einzige Singulärwert.

Zeigen Sie:

- (a) $A^+ = A^*$.
- (b) Die *Tychonoff-Phillips*-Lösung von $Af = g$ ist

$$f_\omega = \frac{1}{1 + \omega^2} A^* g .$$

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 13 , Abgabe: 28.01.1991 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

Aufgabe 41:Sei $A : L_2(X) \rightarrow \mathbb{C}^m$ gegeben durch

$$(Af)_k = (f, u_k), \quad k = 1, \dots, m$$

mit gewissen linear unabhängigen $u_k \in L_2(X)$. Sei f_ω die Tychonoff-Phillips-Lösung zu $Af = g$. Geben Sie eine Funktion $\delta_\omega(x, y)$ an, so daß

$$f_\omega(x) = \int_X f(y) \delta_\omega(x, y) dy .$$

Aufgabe 42:Sei R die Radon-Transformation.Zeigen Sie: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist

$$R^* R f(x) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|} dy ,$$

wobei S^n die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitssphäre ist (also $S^0 = 2$, $S^1 = 2\pi$ usw.). Falls Ihnen das zu schwierig vorkommt, beschränken sie sich auf den Fall $n = 2$.

Aufgabe 43:Zeigen Sie: Für gerades $g \in S(Z)$ ist

$$(R^* g)^\wedge(\xi) = 2(2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \hat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) .$$

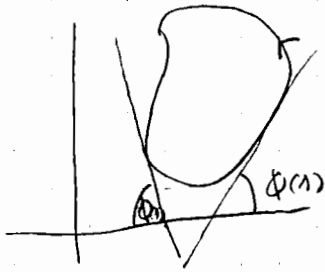
Hierbei ist \hat{g} die eindimensionale Fourier-Transformation bzgl. der ersten Variablen.

Hinweis: Gehen Sie aus von

$$\int_{\mathbb{R}^n} R^* g f dx = \int_Z g R f d\Theta ds$$

und berechnen Sie $(R^* g)^\wedge$ als Fourier-Transformation der Distribution $R^* g \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Übung 33:



$$\phi(s) = \pm \arctan \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm (\ddot{x}_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \ddot{x}_2) \quad (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1)$$

$$k(s) = |\ddot{x}_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \ddot{x}_2| = |\det(\ddot{x}, \dot{x}^\perp)|$$

$$\hat{k}_r(s) = \int_0^L k(s) e^{-2\pi i s/L} ds$$

k invariant gegenüber Translationen, Rotationen U :

$$\begin{aligned} \gamma_U &= U\gamma, & k_U &= |\det(\ddot{\gamma}_U, \dot{\gamma}_U^\perp)| = |\det(U\ddot{\gamma}, U\dot{\gamma}^\perp)| \\ & & &= |\det(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}^\perp)| = k \end{aligned}$$

↙ Streckung $\gamma_r(s) = r\gamma(s/\pi)$, $0 \leq s \leq \pi L$

$$\dot{\gamma}_r(s) = \dot{\gamma}(s/\pi), \quad \ddot{\gamma}_r(s) = \frac{1}{\pi} \ddot{\gamma}(s/\pi), \quad k_r(s) = \frac{1}{\pi} k(s/\pi)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_{r,e} &= \int_0^{\pi L} k_r(s) e^{-2\pi i s/\pi L} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi L} k(s/\pi) e^{-2\pi i s/\pi L} ds \quad \pi/\pi = 1 \\ &= \int_0^L k(s') e^{-2\pi i s'/L} ds' = \hat{k}_e \end{aligned}$$

Übung 34: Γ ist die Polygenierung a_0, \dots, a_{p-1} mit

$$a_{2j} = \tau e^{4\pi i j / p}, \quad a_{2j+1} = e^{4\pi i (j+1/2) / p}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_h = \begin{cases} 0, & h = 0, 2, \dots, \frac{p}{2}, \frac{p}{2} + 2, \dots, p-1 \\ \frac{\pi+1}{2}, & h = 1 \\ \frac{\pi-1}{2}, & h = \frac{p}{2} + 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

Sei $|\hat{b}_h| = |\hat{a}_h|$, $h = 0, \dots, p-1$.

$$\Rightarrow b_j = e^{2\pi i j / p} \left\{ \frac{\pi+1}{2} e^{i\psi} + (-1)^j \frac{\pi-1}{2} e^{i\psi} \right\}$$

O.B. v. A.: $\psi = 0$

$$\Rightarrow b_{2j} = e^{4\pi i j / p} \left\{ \frac{\pi+1}{2} + \frac{\pi-1}{2} e^{i\psi} \right\}, \quad b_{2j+1} = e^{4\pi i (j+1/2) / p} \left\{ \frac{\pi+1}{2} - \frac{\pi-1}{2} e^{i\psi} \right\}$$

$$1 \leq |b_{2j}|^2 = \frac{1}{2}(r^2+1) + \frac{1}{2}(r^2-1)\cos\psi \leq r^2$$

$$1 \leq |b_{2j+1}|^2 = \frac{1}{2}(r^2+1) - \frac{1}{2}(r^2-1)\cos\psi \leq r^2$$

Die Grenzfälle sind nur möglich für $\psi = 0$ oder π .

()

()

Aufgabe 28:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{00} B & a_{01} B \\ a_{10} B & a_{11} B \end{pmatrix} \quad B (M, N)$$

$$(A \otimes B)_{i+kN, j+lN} = a_{kl} b_{ij}$$

$i, j = 0, \dots, M-1$ $k, l = 0, \dots, N-1$

$$h_{ij} = (-1)^{i_0 j_0 + i_1 j_1 + \dots + i_{m-1} j_{m-1}}$$

$m=1, N=2$: $h_{ij} = (-1)^{i_0 j_0}$ ✓

$m=2, N=4$: $h_{ij} = (-1)^{i_0 j_0 + i_1 j_1}$

		i_0	0	1	2	3
	j_0	0	1	2	3	
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	-1	-1	-1
1	0	2	1	1	-1	-1
1	1	3	1	-1	-1	1

Sei richtig für ein $m > 1$.

$$h_{ij}^m = (-1)^{i_0 j_0 + \dots + i_{m-1} j_{m-1}}$$

$$h_{kl}^1 = (-1)^{k l}$$

$$h_{i+kN, j+lN}^{m+1} = (-1)^{i_0 j_0 + \dots + i_{m-1} j_{m-1} + k l}$$

$$i+kN = i_0 + 2^1 i_1 + \dots + 2^{m-1} i_{m-1} + 2^m k$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} H_4 = H_4 P_{34}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} H_4 = H_4 P_{12}$$

$$N = 2^m \quad H = H_N \otimes H_N \quad f = Hf$$

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{k \cdot j} f_j$$

$$k = k_0 + 2k_1 + \dots + 2^{m-1} k_{m-1} \quad l = l_0 + 2l_1 + \dots + 2^{m-1} l_{m-1}$$

$$k_i, l_i \in \{0, 1\}$$

$$N=2, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$k \setminus l$	l_0	l_1	l_2	l_3
k_0	0000	0101	1111	1010
k_1	0000	0000	1111	0011
k_2	0000	1111	2222	3333
k_3	0123	0123	0123	0123

$m=2$
 $N=4$

$$H =$$

11111111	00
1-1-1-1-1-1-1-1	01
11-1-1-1-1-1-1-1	02
1-1-1-1-1-1-1-1	03
1111-1-1-1-1-1-1-1	10
1-1-1-1-1-1-1-1	11
11-1-1-1-1-1-1-1	12
1-1-1-1-1-1-1-1	13
11111111	20
1-1-1-1-1-1-1-1	21
11-1-1-1-1-1-1-1	22
1-1-1-1-1-1-1-1	23
1111-1-1-1-1-1-1-1	30
1-1-1-1-1-1-1-1	31
11-1-1-1-1-1-1-1	32
1-1-1-1-1-1-1-1	33

Übung 30: $f \in F \Leftrightarrow f(x) = f_0(Ax+a)$

$$M_f(s) = \widehat{f}(s) = \frac{1}{|\det(A)|} \Phi(|A^{-T}s|)$$

(a) $N_f(\rho) = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{S^1} \Phi(\rho|A^{-T}\omega|) d\omega$

$$A^{-T} = UDU^T, D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, |A^{-T}\omega| = \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}, \omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

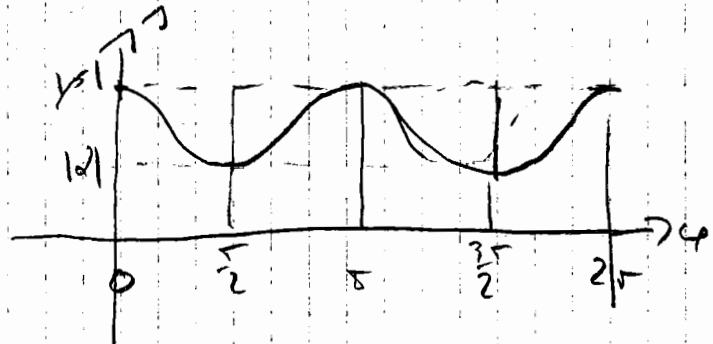
(b) $N_f(\rho) = |\alpha\beta| \int_0^{2\pi} \Phi(\rho \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}) d\varphi$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}, \left| \frac{d\rho}{d\varphi} \right| = \frac{(\beta^2 - \alpha^2) \cos \varphi \sin \varphi}{\rho} = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\rho}$$

$$N_f(\rho) = 4 \frac{|\alpha\beta|}{\beta^2 - \alpha^2} \int_{|\alpha|}^{|\beta|} \frac{\rho \Phi(\rho \rho)}{\sqrt{\beta^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}} d\rho$$

$$\rho^2 = \alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi = (\alpha^2 - \beta^2) \cos^2 \varphi + \beta^2$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{\beta^2 - \rho^2}{\beta^2 - \alpha^2}, \sin^2 \varphi = \frac{\rho^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}$$



Nach c) bestimmt N_f α^2, β^2 eindeutig. Ist also $f(x) = f_0(Ax+a)$, $g(x) = f_0(A'x+a')$, so ist mit einer Diagonalmatrix D mit positiven Elementen $A = UDV, A' = U'JDV'$ mit $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A' = U'AU$$

$$\Rightarrow g(U^{-1}x) = f_0(UAx + a') = f_0(Ax + U^{-1}a')$$

$$= f(x+b), \quad Ab+a = U^{-1}a'$$

(b) $P_f(\omega) = \frac{|\alpha\beta|}{\alpha^2 \cos^2(\varphi-\varphi_0) + \beta^2 \sin^2(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{2\pi} \Phi(\rho) \rho d\rho$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Mit $\gamma = \left| \frac{d}{\rho} \right|$ ist also $\gamma^2 \cos^2(\varphi - \psi) + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2(\varphi - \psi)$ durch

φ eindeutig bestimmt. Dies bestimmt φ mod π und $|\varphi|$.

Trifft also $\gamma(A) = \begin{pmatrix} \gamma & +a \\ 0 & +a' \end{pmatrix}$, so ist $A'^{-T} = C U J D V$ und

mit $J = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ und damit $A'^{-T} = C U J U^{-1} A^{-T}$ oder

$$A' = C U J U^{-1} A$$

$$c) \quad T_f = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\underbrace{\gamma^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \varphi}_{2\pi}} \quad \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) \varphi \, d\varphi$$

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 1 -

Aufgabe 1: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-(|x|^2 - 1)^{-1}) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

10

Zeigen Sie: $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Aufgabe 2: Sei $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

$f(tx) = t^k f(x)$

Zeigen Sie: a) f sei homogen vom Grade k

4

\hat{f} ist homogen vom Grade $-(2+k)$

b) f sei rotationsinvariant \Leftrightarrow

\hat{f} ist rotationsinvariant.

(hängt nur von $\|x\|$ ab)

Polar Coord.
Berechnen

6

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -b \leq x_k \leq b \quad k = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

10

Aufgabe 4: Beweisen Sie mit Hilfe der Poissonschen Summenformel die sogenannte θ -Formel.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-4t \frac{\pi^2 k^2}{t}) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(2t)^{1/2}} \exp(-\frac{k^2}{4t}) \quad t > 0$$

10

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Fourier Reihe der Funktion

$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

10

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeichnen Sie die Funktion f und \tilde{f} , wobei \tilde{f} die nach dem 12. Glied abgebrochene Fourier Reihe für f ist. Benutzen Sie 50 Diskretisierungspunkte.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 2 -

Aufgabe 6: Sei $\delta^r(y) = 2r \operatorname{sinc}(2\pi r y)$

Zeigen Sie, daß δ^r für $r \rightarrow \infty$ in der schwach* Topologie auf \mathcal{D}' gegen die Dirac-Distribution δ konvergiert.

Aufgabe 7: Sei $T_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx$, $L_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \log|x| \phi(x) dx$

Zeigen Sie a) $T \in \mathcal{D}'$

b) $T = DL$

Dicht. Nstkt.

Aufgabe 8: T wie oben.

Zeigen Sie: $\hat{T} = -2i c \operatorname{sgn}(x)$ mit $c = \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi t}{t} dt$

Aufgabe 9: Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^{-p}$, $\frac{1}{2} < p < 2$.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von f .

Hinweise:

- i) Gehen Sie über zu Polarkoordinaten.
- ii) Für die Besselsche Funktion $J_0(t)$ existiert folgende Integraldarstellung

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(it \cos \varphi) d\varphi .$$

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 3 -

Aufgabe 10: Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ und f sei b -bandbeschränkt. Seien

$$x_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad x_\delta = \frac{1}{\delta} x_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}$$

Sei $f_\delta = f * x_\delta$. Welche anschauliche Bedeutung hat $f_\delta(x)$?Sei $h = \frac{1}{2b}$, für welche $\delta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_\delta(hk) B(x - hk) \quad \text{mit} \quad \hat{B}(\xi) = \frac{x_{[-b, b]}(\xi)}{\text{sinc } \pi \xi \delta} ?$$

Aufgabe 11: Sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ a) Berechnen Sie die sinc-Reihe $S_{h,b} f$ von f für $h = \frac{1}{n}$,

$$b = \frac{n}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Zeigen Sie $\frac{\int_{\mathbb{R}} S_{h,b} f \, dx}{\int_{\mathbb{R}} f \, dx} = 1 + \frac{1}{n}$ (Aliasing)c) Berechnen Sie die tiefpaß gefilterte Version f_b von f ,

$$\text{d.h.} \quad \hat{f}_b(\xi) = \begin{cases} \hat{f} & \text{für } |\xi| \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_b = f * \tilde{x}_{[-b, b]} \quad (\text{siehe Aufg. 10})$$

$$\Leftrightarrow f_b(x) = \int_0^1 \text{sinc } 2\pi b(x-y) \, dy$$

numerisch für $b = 5$.Zeichnen Sie f , f_b , $S_{h,b} f$ für $b = 5$, $h = 0,1$ in einem vernünftigen Maßstab.

b.w.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 4 -

Aufgabe 14: Seien f, g bandbeschränkt und bei erfüllter Nyquist-Bedingung gesampelt. Man zeige, daß $f * g$ durch die Trapezregel exakt berechnet wird.

Aufgabe 15: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

a) $f(x) = e^{2\pi i a \cdot x}, a \in \mathbb{R}^2,$

b) $f(x) = |x|^{-p}, 1/2 < p < 2$ (vgl. Aufgabe 9, Blatt 2),

c) $f(x) = e^{-|x|},$

d) $f(x) = e^{-|x|^2},$

e) $f(x) = \text{Max}(0, 1 - |x|^2).$

Für welche s ist $f \in H^s$?

Aufgabe 16: Sei f b -bandbeschränkt und $g \in L_2$. g_b entstehe aus g durch Abschneiden seiner Fourier-Transformierten bei b , d.h.

$$\hat{g}_b(\xi) = \begin{cases} \hat{g}(\xi) & \text{für } |\xi| < b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx = h \int f(hk) g_b(hk)$$

falls die Nyquist-Bedingung für f erfüllt ist.

Aufgabe 17: Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f_{\frac{1}{c}}(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$

a) Zeigen Sie: $\|f_{\frac{1}{c}}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c^{\frac{n}{2}-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

b) H^s -Normen werden als Fehlermaße bei der Bildrekonstruktion benutzt. Wie wirkt sich das Fehlen von kleinen Details im rekonstruierten Bild auf die H^s -Norm des Fehlers für verschiedene s aus?

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 5 -

Aufgabe 19: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ und $f(x) = 0$ für $x \geq 0$.

Sei f_b die bandlimitierte Version von f , d.h. $\hat{f}_b(\xi) = \hat{f}(\xi)$ für $|\xi| < b$, $\hat{f}_b(\xi) = 0$ sonst. Dann gilt für $x > 0$

$$|f_b(x)| \leq \frac{1}{2b\pi x} \int_{-\infty}^0 |f(x)| dx .$$

Aufgabe 20: Ein Bild f sei durch ein Muster von Ringen gestört. Sie haben Radius R , und ihre Mittelpunkte bilden ein achsenparalleles Gitter mit Schrittweite h . Die Intensität sei für alle Ringe gleich.

- Modellieren Sie die Störung durch eine Distribution f .
- Berechnen Sie \hat{f} .
- Schlagen Sie ein Verfahren zum "structured noise removal" bei bekannten h, R aber unbekannter Intensität und Lage des Gitters vor.

Aufgabe 21: Ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bild f werde mit Belichtungszeit T photographiert. Auf dem Film entsteht dann das "verschmierte" Bild g

mit
$$g(x) = Bf(x) = \int_0^T f(V(t)x) dt ,$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

- Ist $g = Bf$ eine Faltungsgleichung?
- Führen Sie für x Polarkoordinaten r, φ ein, und berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von f aus denen von g . Zeigen Sie, daß dies jedenfalls für $|\xi|\omega T < 1$ möglich ist (l Ordnung der Fourier-Koeffizienten).
- $g = Bf$ ist L_2 - L_2 -schlecht gestellt.
- $\ker(B) = \{0\} \Leftrightarrow \omega T$ ist irrational.
- Ist ωT rational, so läßt sich ωT aus g bestimmen.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 6 -

Aufgabe 22:

a) Sei $\int_{-a}^a f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < a} f(x) dx$, $g \in C^1[-a, a]$.

Zeigen Sie: $\int_{-a}^a \frac{g(x)}{x} dx = \int_{-a}^a \frac{g(x) - g(0)}{x} dx$.

b) Sei $g \in \mathcal{Y}(\mathbb{Z})$.

Zeigen Sie: $\int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s, \omega)}{s} ds d\omega = \int_{S^{n-1}} \frac{1}{s} \int g(s, \omega) d\omega ds$.

Aufgabe 23: Berechnen Sie die Radon-Transformationen folgender Funktionen von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \max\{|x_1|, |x_2|\} < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) $f(x) = e^{-|x|^2/d^2}$

Aufgabe 24:

Sei $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{(x_1 + ix_2)^k} \end{cases}$ $k > 2, k \in \mathbb{N}$

Zeigen Sie: $Rf(s, \omega) = 0$ für $s \neq 0$

Aufgabe 25: Sei $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ und $g = Rf$.
(mit 22)

Zeigen Sie: $f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} F(x, \epsilon) - \int_{\epsilon}^{\infty} q^{-2} F(x, q) dq \right)$

mit : $F(x, q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x \cdot \omega + q, \omega) d\varphi$.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Bildverarbeitung"

- Blatt 7 -

Aufgabe 26: Sei $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$, R die Radontransformation und $j(x) = \frac{1}{|x|}$.

a) Zeigen Sie: $R^* R f = j * f$.

b) Leiten Sie mit Hilfe von a) die 2. Radon'sche Formel her.

Aufgabe 27: $*_2$ sei die Faltung für Funktionen auf \mathbb{R}^2 und

$*_1$ sei definiert durch: $(g_1 *_1 g_2)(s, \omega) = \int_{\mathbb{R}} g_1(t, \omega) g_2(s-t, \omega) dt$.

a) Zeigen Sie: $R(f_1 *_2 f_2) = R f_1 *_1 R f_2$

b) Sei $R f = g$, $h(s) = \frac{1}{d} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad |s| \leq \frac{d}{2} \\ 0 \quad \text{sonst} \end{array} \right\}$ und

sei $R f_h = g * h$.

Zeigen Sie, daß es eine Funktion H gibt mit

$f_h = f * H$, und berechnen Sie H .

Aufgabe 28: Sei $I = \{g \in \mathcal{Y}(\mathbb{Z}) : g(s, \omega) = 0 \text{ für } |s| \leq a\}$

Zeigen Sie: Es existieren $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ mit $f(0) \neq 0$ und $g \in I$ mit $R f = g$. Hieraus folgt, daß das "Innere Problem" nicht eindeutig lösbar ist.

(Hinweis: Wähle g von ω unabhängig und benutze die Inversions-Formel von Cormack.)

Aufgabe 29: Sei $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\square = \frac{d^2}{ds^2}$

Zeigen Sie: $R(\Delta f) = \square R f$ und

$R^*(\square g) = \Delta R^* g$.

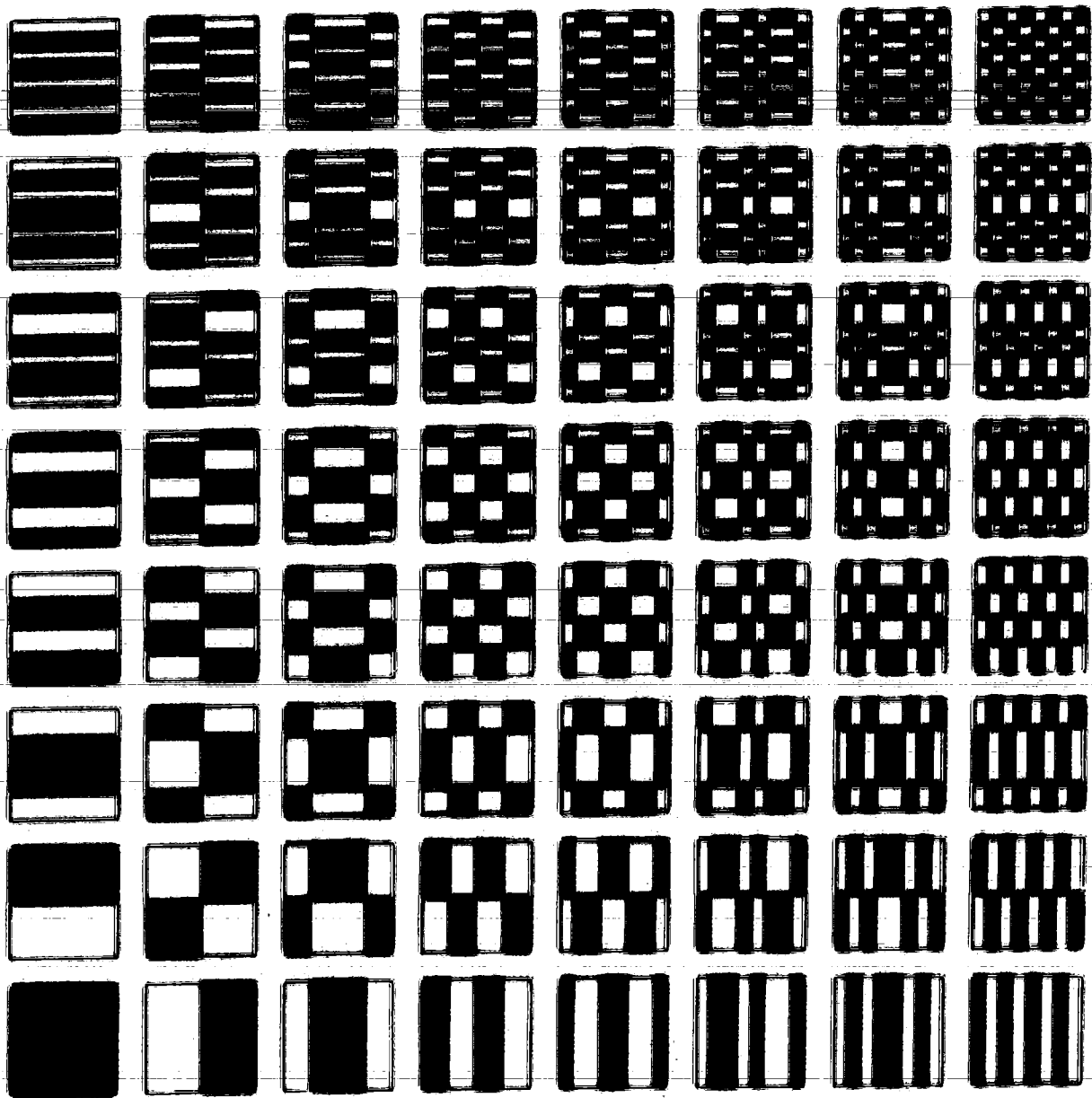


FIGURE 10.5-3. Hadamard transform basis planes for $N=8$. Black = +1; white = -1.

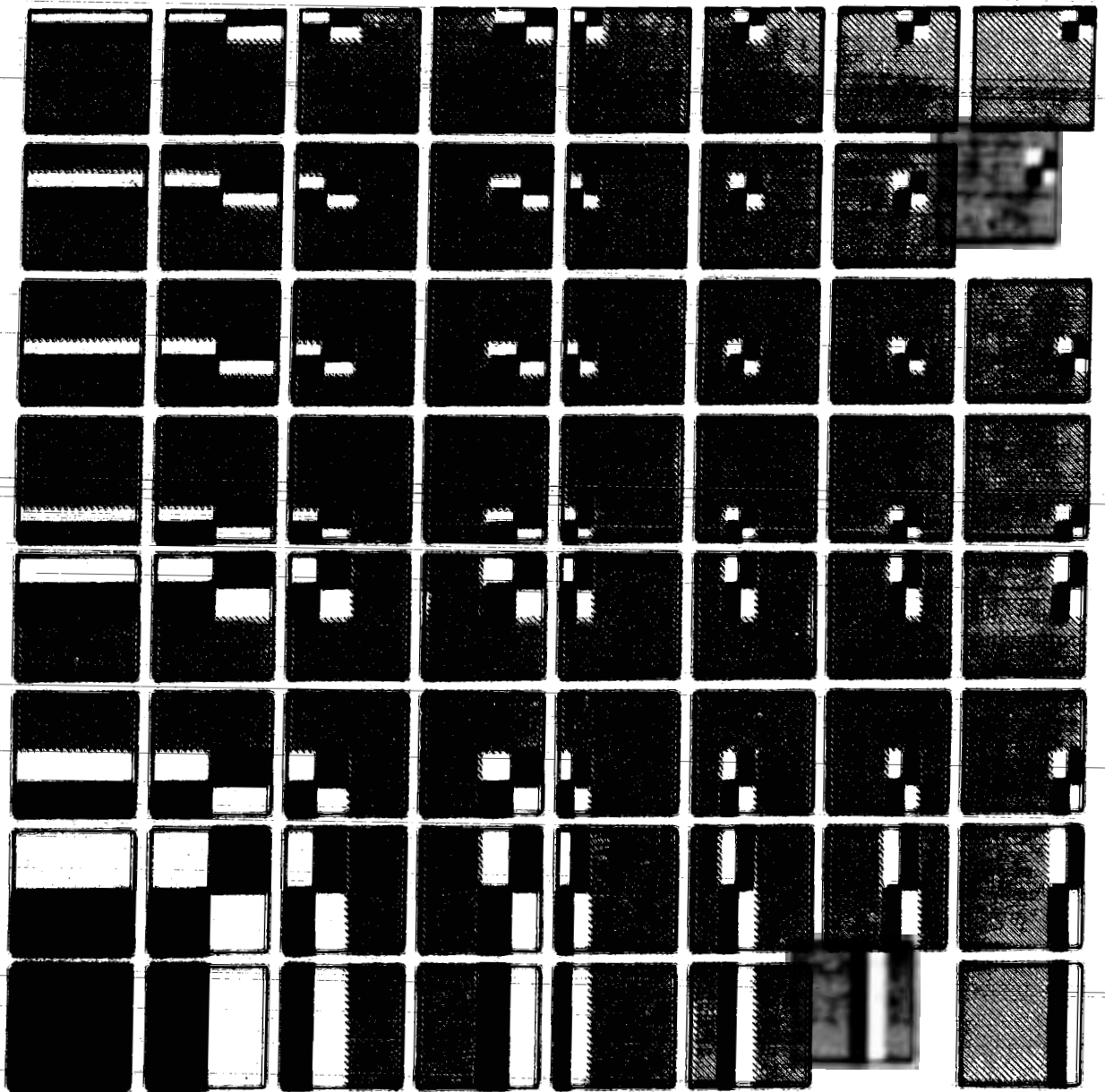
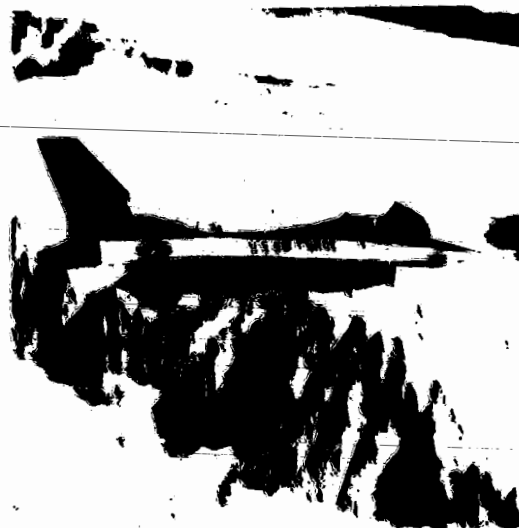
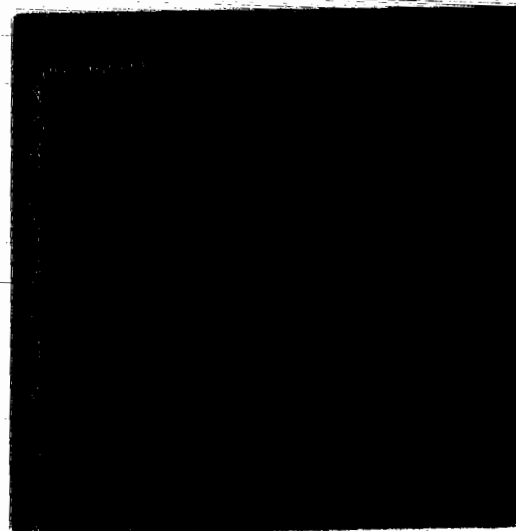
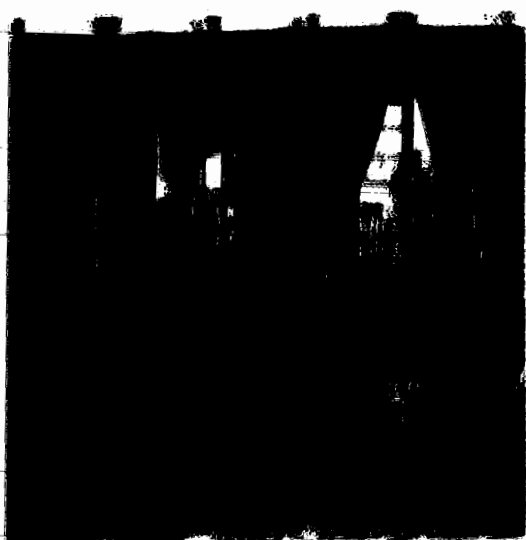


FIGURE 10.6-3. Haar transform basis planes for $N=8$. Black = +1; white = -1; cross-hatched = 0.

**(a) aerial****(b) airplane****(c) bathrobn****(d) buildings****(e) couple****(f) tenna****Fig. 4.2.1 Original monochrome test images**



(a) lynda



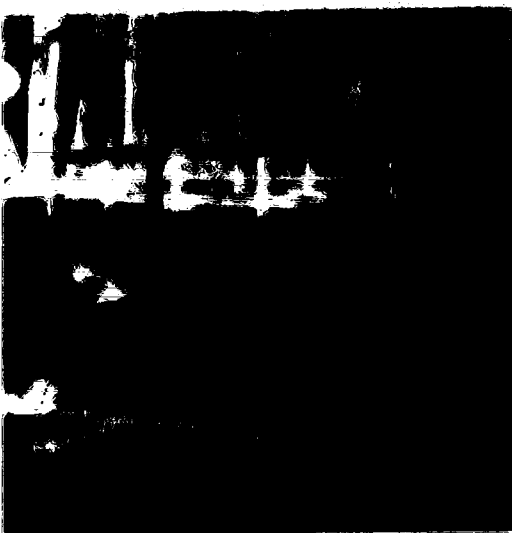
(b) peppers



(c) sailboat



(d) splash

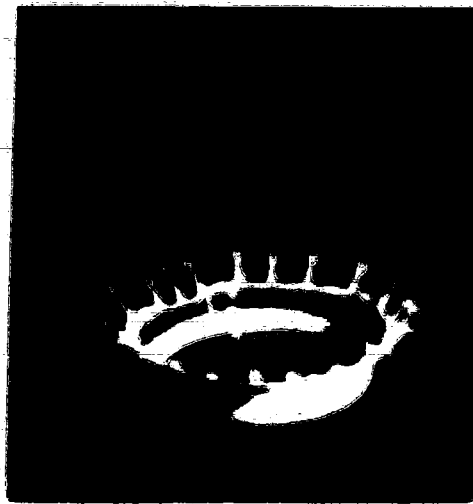


(e) stream

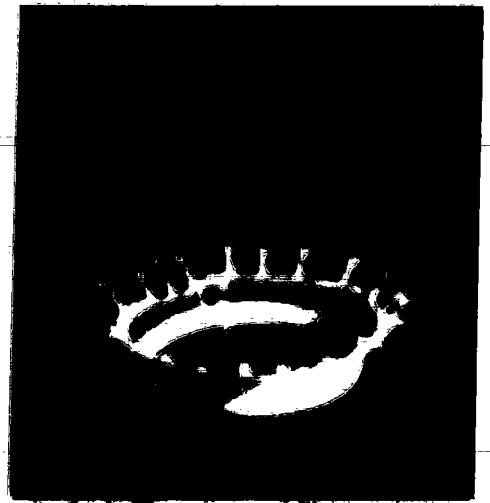


(f) tiffany

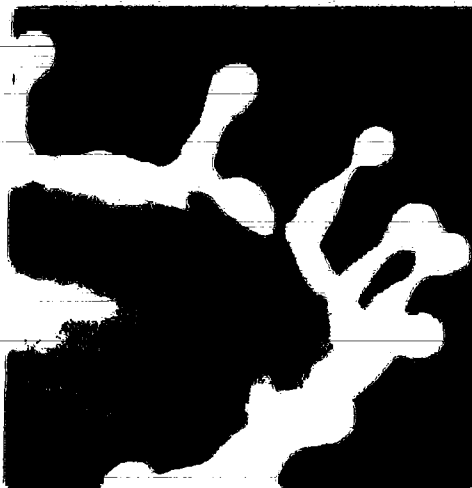
Fig. 4.2.1 contd. Original monochrome test images.



(a) 24 RBC coding at 0.75 bits/pixel



(b) 24 DCT coding at 0.75 bits/pixel



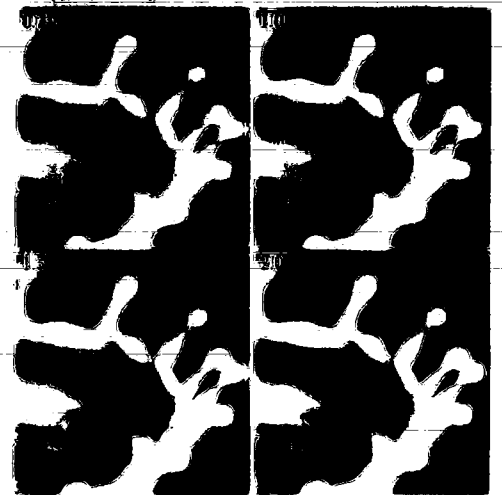
(c) 24 RBC: magnified region of interest (0.75 bits)



(d) 24 DCT: magnified region of interest (0.75 bits)



(e) 24 RBC: region of interest at four rates



(f) 24 DCT: region of interest at four rates

Fig. 4.6.2 24 coding results for the splash.

TABLE 4.5.7(b). 1d coding results for ensemble B.

image	DCT	RBC
lenna	1.5 bits - very blocky (hat, shoulder) 2, 2.5 bits - still blocky at edges 3 bits - very good, slight blocks (shoulder)	1.5 bits - very good, slight texture 2, 2.5, 3 bits - excellent
lynda	1.5 bits - extremely textured 2, 2.5 bits - good, texture 3 bits - excellent	1.5 bits - good, boundaries slightly visible 2, 2.5, 3 bits - excellent
pappas	1.5 bits - grainy, blocks at edges 2, 2.5 bits - very good, slight grain 3 bits - excellent	1.5 bits - good, blurred edges 2 bits - very good, slight grain 2.5, 3 bits - excellent
sailboat	1.5 bits - texture 2 bits - ok, grainy 2.5 bits - very good, slight grain 3 bits - excellent	1.5 bits - texture 2 bits - ok, grainy 2.5, 3 bits - excellent
splash	1.5 bits - extensive block structured blurring 2, 2.5 bits - good, blocks still visible at high contrast edges 3 bits - excellent	1.5 bits - good, slight texture 2, 2.5, 3 bits - excellent

TABLE 4.5.7(a). 1d coding results for ensemble A.

image	DCT	RBC
aerial	1.5 bits - very blacky, many dc problems 2 bits - ok, a few dc problems 2.5 bits - good, a few dc problems 3 bits - excellent	1.5 bits - texture 2 bits - good, slight texture 2.5 bits - very good, very slight texture 3 bits - excellent
airplane	1.5 bits - heavy contouring, very blacky 2 bits - contours, texture 2.5 bits - good, slight contours (sky) 3 bits - excellent	1.5 bits - texture 2 bits - good, slight texture 2.5, 3 bits - excellent
babeon	1.5 bits - ok, blacks & dc problems (cheeks) 2, 2.5 bits - very good, very slight dc problems 3 bits - excellent	1.5 bits - very good, slight texture (cheeks) 2, 2.5, 3 bits - excellent
buildings	1.5 bits - extremely noisy, contours 2 bits - ok, grainy 2.5 bits - good 3 bits - very good, slight grain	1.5 bits - strong texture (preferable to DCT) 2 bits - ok, grainy 2.5, 3 bits - very good, slight grain
couple	1.5 bits - extremely grainy, blacky 2, 2.5 bits - very good, slight grain 3 bits - excellent	1.5 bits - ok, texture 2 bits - very good, slight grain 2.5, 3 bits - excellent
stream	1.5 bits - grainy, dc problems (handrail) 2 bits - good, texture (handrail) 2.5 bits - very good, slight texture 3 bits - excellent	1.5 bits - ok, texture (handrail) 2, 2.5 bits - very good, slight texture (handrail) 3 bits - excellent
siffany	1.5, 2, 2.5 bits - very blacky, contours, too dark: dc problems 3 bits - better but still very blacky	1.5 bits - boundaries visible at peak white (hand, teeth) 2, 2.5 bits - very good, boundaries barely visible 3 bits - excellent

**The Workshop
Dynamical Inverse Problems'98
Dedicated to 60th anniversary
of Aleksandr Blagovestchenskii**

Sponsored by the Russian Foundation for Basic Research (RFFI),
INTAS-program, and Sanwa Systems Development Co. Ltd (Tokyo, Japan)

PROGRAM

Monday, 24 August

Chairman: V. Romanov

8:30 - 9:30

Breakfast

9:30 - 9:40

Opening the Workshop

9:45 - 10:20

A. Blagovestchenskii

Inverse problem of wave propagation in elastic membrane surrounded by acoustic medium

10:30 - 11:20

G. Nakamura

An inverse problem of elasticity

11:20 - 11:40

Coffee break

11:40 - 12:30

L. Rachele

Inverse problems for Elastic Media

12:40 - 13:30

M. Ikehata

How to draw a picture of an unknown inclusion from boundary. Two Math.-1 inverse algorithms

13:30 - 15:00

Lunch

15:00 - 15:50

V. Agoshkov

Optimal control approach in inverse boundary-value problems for the transport equation

16:00 - 16:50

G. Panasenko

Dynamical problems and homogenization

18:30 - 19:30

Dinner

TABLE 4.5.7(a). 1d coding results for ensemble A.

image	DCT	RBC
aerial	1.5 bits - very blacky, many dc problems 2 bits - ok, a few dc problems 2.5 bits - good, a few dc problems 3 bits - excellent	1.5 bits - texture 2 bits - good, slight texture 2.5 bits - very good, very slight texture 3 bits - excellent
airplane	1.5 bits - heavy contouring, very blacky 2 bits - contours, texture 2.5 bits - good, slight contours (sky) 3 bits - excellent	1.5 bits - texture 2 bits - good, slight texture 2.5, 3 bits - excellent
baboon	1.5 bits - ok, blocks & dc problems (checks) 2, 2.5 bits - very good, very slight dc problems 3 bits - excellent	1.5 bits - very good, slight texture (checks) 2, 2.5, 3 bits - excellent
buildings	1.5 bits - extremely noisy, contours 2 bits - ok, grainy 2.5 bits - good 3 bits - very good, slight grain	1.5 bits - strong texture (preferable to DCT) 2 bits - ok, grainy 2.5, 3 bits - very good, slight grain
couple	1.5 bits - extremely grainy, blacky 2, 2.5 bits - very good, slight grain 3 bits - excellent	1.5 bits - ok, texture 2 bits - very good, slight grain 2.5, 3 bits - excellent
stream	1.5 bits - grainy, dc problems (handrail) 2 bits - good, texture (handrail) 2.5 bits - very good, slight texture 3 bits - excellent	1.5 bits - ok, texture (handrail) 2, 2.5 bits - very good, slight texture (handrail) 3 bits - excellent
siffany	1.5, 2, 2.5 bits - very blacky, contours, too dark: dc problems 3 bits - better but still very blacky	1.5 bits - boundaries visible at peak white (hand, teeth) 2, 2.5 bits - very good, boundaries barely visible 3 bits - excellent

