

### AUFGABE 3

FRANK WÜBBELING

Wir zeigen:

$$\lim_{z \rightarrow +0} \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{2} \delta(x, y) \text{ in } D'(\mathbb{R}^2).$$

Es sei

$$f(x, y, z) = \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{e^{ikr}}{r}$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und damit

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{ikze^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}z}{r^3}.$$

Wir wollen zeigen, dass  $f$  für infinitesimal positives  $z$  ein Vielfaches der Delta-Distribution ist. Sei also  $\varphi$  eine Testfunktion im  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Sei  $\text{supp } \varphi \subset K_R(0)$ . Dann ist zu zeigen, dass das Integral  $I_0$  von  $f$  gegen  $\varphi$  gerade  $\varphi(0, 0) = \delta(\varphi)$  ist. Für  $I_0$  gilt

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} r' \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \varphi(x, y) dr' d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{ikzr'}{r'^2 + z^2} - \frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right) e^{ik\sqrt{r'^2 + z^2}} \varphi(x, y) dr' d\psi \end{aligned}$$

mit Polarkoordinaten  $(r', \psi)$  und  $x = r' \cos \psi$ ,  $y = r' \sin \psi$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise behalten wir die Variablen  $(x, y)$  in Abhängigkeit von  $(r', \psi')$  bei. Insbesondere gilt  $x^2 + y^2 = r'^2$  und damit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r'^2 + z^2}$ .

Weiter gilt

$$\int_0^R \frac{zr'}{r'^2 + z^2} dr' = [z/2 \log(r'^2 + z^2)]_0^R \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$$

(wegen  $z \log z \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ ) und

$$\int_0^{R'} \frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' = \left[ -\frac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \right]_0^{R'} \xrightarrow{z \rightarrow +0} 1$$

für jedes positive  $R'$ , unabhängig von  $R$ . (Hier wird  $z > 0$  benötigt, ansonsten stünde hier  $-1$ .) Da  $e^{ik\sqrt{r'^2+z^2}}\varphi(x, y)$  beschränkt ist, verschwindet der erste Term in  $I_0$  für  $z \rightarrow 0$ . Im zweiten Term schreibt man das Integral  $\int_0^R$  als  $\int_0^\epsilon + \int_\epsilon^R$ . Das zweite Integral konvergiert für  $z \rightarrow 0$  gegen 0 (denn der Integrand ist positiv, und  $\int_0^\epsilon$  und  $\int_0^R$  konvergieren für  $z \rightarrow 0$  gegen 1, also konvergiert die Differenz gegen 0).

Setze

$$g(x, y) = e^{ik\sqrt{r'^2+z^2}}\varphi(x, y).$$

Der einzige verbleibende Term von  $I_0$  für  $z \rightarrow 0$  ist dann

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon \left( -\frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right) g(x, y) dr' d\psi \\ &= g(\tilde{x}, \tilde{y}) \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon \left( -\frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right) dr' d\psi \end{aligned}$$

für ein  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  aus dem Integrationsgebiet, denn  $g$  ist stetig (siehe unten). Für  $\epsilon \rightarrow 0$  zieht sich das Integrationsgebiet auf den Nullpunkt zusammen, d.h.  $g(\tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} g(0, 0) = \varphi(0, 0)$ . Für  $z \rightarrow 0$  konvergiert das Integral dann gegen  $-2\pi$ . (Zur Vermeidung von Abhängigkeiten zwischen  $z$  und  $\epsilon$  wähle zunächst  $\epsilon$  klein, fest und dann  $z$  für alle Terme gleich.)

Insgesamt konvergiert  $I_0$  also gegen  $-2\pi\varphi(0, 0) = -2\pi\delta(\varphi)$ .

Beweis zur Mittelwerteigenschaft: Es gilt

$$\begin{aligned}
 & (\min g(x, y)) \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon \frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' d\psi \\
 & \leq \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon \frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} g(x, y) dr' d\psi \\
 & \leq (\max g(x, y)) \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon \frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' d\psi
 \end{aligned}$$

Falls  $g$  stetig und das Integrationsgebiet zusammenhängend ist, werden alle Werte zwischen Minimum und Maximum angenommen und es gibt ein  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  mit der gewünschten Eigenschaft.

Setze nun  $G(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} f(x, y, z)$ . Dann ist  $\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, +0) = -\frac{1}{2}\delta(x, y)$  in obigem Sinne.

## AUFGABE 4

FRANK WÜBBELING

Nach Vorlesung und Aufgabe 1 gilt für  $\omega > 0$ :

$$\begin{aligned}(e^{-t^2/2})^\wedge(\xi) &= e^{-\xi^2/2} \\ (e^{-(\omega t)^2/2})^\wedge(\xi) &= \frac{1}{\omega} e^{(-\xi/\omega)^2/2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-(\omega t)^2/2})^\wedge(\xi) &= -\frac{\xi^2}{\omega} e^{(-\xi/\omega)^2/2}\end{aligned}$$

Mögliche Extremalstellen dieser Fouriertransformierten sind  $\pm\infty$  und die lokalen Extrema, also die Stellen, an denen die erste Ableitung verschwindet. Die erste Ableitung der Fouriertransformierten nach  $\xi$  ist

$$\frac{e^{(-\xi/\omega)^2/2}}{\omega} \left( 2\xi - \xi^2 \frac{\xi}{2\omega^2} \right)$$

mit Nullstellen bei 0 und  $\pm\sqrt{2}\omega$ . Die Funktion verschwindet bei  $\pm\infty$  und 0, also bleiben als Maximalstellen des Betrags nur noch  $\pm\sqrt{2}\omega$  über (wo der Betrag offensichtlich unabhängig vom Vorzeichen ist).

# Blatt 5

Frank Wübbeling

23. Mai 2006

## 1 Aufgabe 16

Eindeutigkeit: Die gewöhnliche homogene Differentialgleichung hat das Fundamentalsystem  $u_1(x) = e^{ikx}$  und  $u_2(x) = e^{-ikx}$ , d.h. alle Lösungen sind von der Form  $au_1 + bu_2$ . Die Ausstrahlungsbedingungen sorgen für  $a = 0$  und  $b = 0$ .

Lösung: Setze  $u(x) = \int e^{ik|x-y|} f(y) dy$ . Wir betrachten die Differentialgleichung im distributionellen Sinn auf  $\mathcal{C}$ . Dann gilt für  $v \in \mathcal{C}$  mit partieller Integration

$$\begin{aligned}(u'' + k^2 u)(v) &= \int u(x)(v''(x) + k^2 v(x)) dx \\ &= \int \int e^{ik|x-y|} f(y) dy (v''(x) + k^2 v(x)) dx \\ &= \int f(y) \int e^{ik|x-y|} (v''(x) + k^2 v(x)) dx dy \\ &= \int f(y) \int_{y < x} e^{ik(x-y)} (v''(x) + k^2 v(x)) dx dy \\ &\quad + \int f(y) \int_{x < y} e^{ik(y-x)} (v''(x) + k^2 v(x)) dx dy \\ &= \int f(y) (+e^{ik(y-y)} v'(y) - ik e^{ik(y-y)} v(y)) dy \\ &\quad + \int f(y) (-e^{ik(y-y)} v'(y) - ik e^{ik(y-y)} v(y)) dy \\ &= -2ik \int f(y) v(y) dy\end{aligned}$$

also löst  $-\frac{1}{2ik} u$  die Aufgabe im schwachen (distributionellen) Sinne.

## 2 Aufgabe 17

Laut Vorlesung ist die Fouriertransformation der charakteristischen Funktion des Einheitsintervalls  $[-1, 1]$  gerade  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sinc}(x)$ . Damit ist die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion  $\chi_1$  des Einheitsquadrats  $[-1, 1]^2$  gerade  $\frac{2}{\pi}\text{sinc}(x)\text{sinc}(y)$ . Das Einheitsquadrat wird auf das angegebene Quadrat abgebildet mittels einer Drehung um 30 Grad und einer anschliessenden Streckung um den Faktor  $\sqrt{2}$ . Es gilt also mit der entsprechenden Transformationsmatrix  $A$  die Gleichung  $\chi(x) = \chi_1(A^{-1}x)$ . Mit Aufgabe 1 ist die Fouriertransformierte sofort berechenbar.

Zwei kurze Übungen:

1. Sei  $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$ . Dann ist  $\hat{f} = \hat{g}\hat{h}$ :

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}^2} g(x_1)h(x_2)e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)} dx_1 dx_2 \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} g(x_1)e^{-ix_1\xi_1} dx_1 (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} h(x_2)e^{-ix_2\xi_2} dx_2 \\ &= \hat{g}(\xi_1)\hat{h}(\xi_2) \end{aligned}$$

2. Sei  $f(x) = \chi_1(x)$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{-i\xi} (e^{-i\xi} - e^{i\xi}) dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \text{sinc}(\xi) \end{aligned}$$

### 3 Aufgabe 18

Die Aufgabe lässt sich auch mit dem Abtasttheorem lösen. Direkt in  $n$  Dimensionen:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} f(x) dx \\
 &\sim (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ikh\xi} f(kh) \\
 &= h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ikh\xi} f(kh)
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\pi j/R) &\sim h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-2\pi i k j / (2N)} f(kh) \\
 &= h^n (2\pi)^{-n/2} \hat{f}_j
 \end{aligned}$$

mit  $f_k = f(kh)$ .

Problem:  $\hat{f}$  ist nicht periodisch (denn es ist in  $\mathcal{S}$ ), aber die diskrete Fouriertransformierte ist periodisch mit Periode  $2N$ . Es stellt sich also die Frage: Für welche  $j$  macht das  $\sim$  tatsächlich Sinn?

Die Poissonsche Formel liefert:

$$h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-2\pi i k j / (2N)} f(kh) = \sum_{l \in \mathcal{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{\pi j}{R} - 2\frac{\pi}{h} l\right)$$

Wir erhalten: Die Summe, die wir durch die Trapezregel erhalten, ist eine Summe von Werten der Fouriertransformierten. Da  $\hat{f}$  in  $\mathcal{S}$  liegt, fällt es schnell. Für ausreichend kleines  $h$  ist das Element der Summe, dessen Argument am nächsten an 0 liegt, das größte. Es macht also Sinn, die Näherung für  $k = -N \dots N - 1$  zu betrachten.

Insgesamt: Die diskrete Fouriertransformierte ist eine Näherung an die analytische Fouriertransformierte, vorausgesetzt, man beachtet, dass die Fourierkoeffizienten im Bereich  $[-N, N - 1]$  gewählt werden.

## 4 Aufgabe 19

Zur Aufgabenstellung: Im Radar wird die Fouriertransformierte einer Funktion mehr oder weniger direkt gemessen (genauso übrigens bei der Magnetresonanztomographie). In Aufgabe 18 haben wir gezeigt, dass die diskrete und die analytische Fouriertransformation eng zusammenhängen. Es bietet sich daher die folgende Vorgehensweise an:

1. Wir wollen eine Approximation an die gesuchte Funktion  $f$  berechnen. Hierzu legen wir zunächst einen Bildraum (ein Quadrat mit Seitenlänge  $2R$  im  $\mathbb{R}^2$  fest, in dem der Träger der Funktion liegen soll und diskretisieren.
2. Durch (gedachte) diskrete Fouriertransformation dieser Näherung erhalten wir eine neue Matrix. Das Element  $(k_1, k_2)$  dieser Matrix entspricht im Fourierraum dem Wert der Fouriertransformierten an der Stelle  $(2\pi)^{n/2} h^{-n} \hat{f}(\pi k/R)$ .
3. Wir nehmen an, dass wir die Fouriertransformierte der gesuchten Funktion kennen. Dort, wo wir sie berechnen können, tragen wir die entsprechenden Werte in unsere Matrix ein.
4. Statt einer analytischen inversen Fouriertransformation führen wir eine diskrete durch. Der Fehler dabei ist nach Aufgabe 18 begrenzt. Das Ergebnis ist eine Approximation an die gesuchte Funktion.

Ein vernünftiger Wert ist  $N = 256$ , für diesen Wert ist das messbare Fourierspektrum ganz in der Matrix enthalten.

Implementation in matlab: Die Implementation ist schleifenfrei möglich. Am einfachsten berechnet man zunächst das komplette Fourierspektrum der Funktion und blendet dann je nach Wahl der Parameter die nicht messbaren Teile aus.

# Blatt 6

Frank Wübbeling

1. Juni 2006

## 1 Aufgabe 20

Nach Vorlesung gilt  $\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f * g}(\xi)$ . Wegen  $\widehat{f}(\xi) = \widetilde{f}(-\xi)$  gilt damit auch  $\widetilde{f}(\xi)\widetilde{g}(\xi) = \widetilde{(f * g)}(\xi)$ . Ersetze nun  $f$  durch  $\widehat{f}$  und  $g$  durch  $\widehat{g}$ . Fouriertransformation liefert  $\widehat{fg} = \widehat{f * g}$ .

Wir zeigen nun, dass  $fg$  die Bandbreite  $2\Omega$  hat.

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(\xi) &= (\widehat{f * g})(\xi) \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x)g(\xi - x)dx\end{aligned}$$

$f$  hat seinen Träger in  $[-\Omega, \Omega]$ ,  $g$  hat seinen Träger in  $[\xi - \Omega, \xi + \Omega]$ . Für  $|\xi| > 2\Omega$  haben die beiden Träger einen leeren Schnitt, d.h. die Bandbreite von  $(fg)$  ist  $\leq 2\Omega$ . Nach Vorlesung ist die Trapezregel damit exakt, wenn  $h \leq \frac{2\pi}{2\Omega}$ , also  $h$  die Nyquist-Bedingung erfüllt.

## 2 Aufgabe 21

Da  $f$  stetig und periodisch ist, konvergiert die Fourier-Reihe, und wir haben

$$f(x) = \sum \widehat{f}_k e^{ikx/A}.$$

Für  $f \in L_2$  geht Teil a mit einer alten Aufgabe. Alternative Lösung für  $f$  stückweise stetig differenzierbar (dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig und ist beschränkt):

(a) Sei  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Sei ohne Einschränkung  $A = \pi$ .

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\varphi) &= \int_{\mathbf{R}} f(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sum_k \widehat{f}_k e^{ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \sum_k \widehat{f}_k \int_{\mathbf{R}} e^{ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{1/2} \sum_k \widehat{f}_k \varphi(k) \end{aligned}$$

(b) Schreibe die Fourierreihe für den ersten Term auf der rechten Seite auf. Es gilt (wieder für  $A = \pi$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} f(hk) &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_l \widehat{f}_l e^{iklh} \\ &= \sum_l \widehat{f}_l \sum_{k=0}^{p-1} e^{(ilh)k} \\ &= p \sum_l \widehat{f}_{lp} \end{aligned}$$

Der Satz folgt durch Multiplikation mit  $\frac{2A}{p}$  und Herausziehen des nullten Terms der Summe.

### 3 Aufgabe 22

$$\begin{aligned}\|G_{k,r}u\|^2 &= \int_{|x|<r} \left| \int_{|y|<r} G_k(x-y)u(y)dy \right|^2 dx \\ &= r^9 \int_{|x|<1} \left| \int_{|y|<1} G_k(r(x-y))u(ry)dy \right|^2 dx \\ &= r^7 \int_{|x|<1} \left| \int_{|y|<1} G_{kr}((x-y))u_r(y)dy \right|^2 dx \\ &= r^7 \|G_{k,1}u_r\|^2\end{aligned}$$

Hier ist  $u_r(y) = u(ry)$ . Es wurde benutzt  $G_k(rx) = \frac{1}{r}G_{kr}(x)$ .  
Andererseits gilt

$$\|u_r\|^2 = \int_{|x|<1} |u_r(x)|^2 dx = \frac{1}{r^3} \int_{|x|<r} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{r^3} \|u\|^2$$

und damit

$$\|G_{k,r}\| = \sup_u \frac{\|G_{k,r}u\|}{\|u\|} = r^2 \sup_{u_r} \frac{\|G_{kr,1}u_r\|}{\|u_r\|} = r^2 \|G_{kr,1}\|.$$

## 4 Aufgabe 23

Nach der Poissonschen Formel gilt für bandbeschränktes  $f$ , das die Nyquistbedingung erfüllt, im  $\mathbb{R}^2$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} h^2 \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} f(hk) e^{-ikh\xi}.$$

Durch zweimalige eindimensionale inverse Fouriertransformation (erst nach  $\xi_1$ , dann nach  $\xi_2$ ) erhält man die Sincreihe im  $\mathbb{R}^2$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f(hk) \operatorname{sinc}\left(\frac{x - hk}{h}\right)$$

mit der Definition  $\operatorname{sinc}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sinc}(x_1) \cdots \operatorname{sinc}(x_n)$ .

Diese Formel definiert eine Interpolationsformel: Gegeben  $f(hk)$ , kann  $f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^2$  berechnet werden. Das spezielle an dieser Formel: Sie ist exakt, falls  $f$  bandbeschränkt ist.

In der Aufgabe soll diese Interpolationsformel benutzt werden, um ein gegebenes Bild auf die  $p$ -fache Größe hochzusamplen. Klar: So, wie  $f$  definiert ist, sind die Summen endlich. Außerdem: Die Abtastbedingung kann keinesfalls eingehalten werden (da  $f$  endlichen Träger hat, hat  $\hat{f}$  keinen endlichen Träger und ist damit nicht bandbeschränkt). Wir erhalten also nur eine Näherung, keine exakte Interpolation.

Sei  $h = \frac{1}{N}$ . Dann werden zur naiven Auswertung von  $f(x)$   $(2N+1)^2$  Rechenoperationen benötigt. Falls die Interpolationsformel auf einem Gitter mit  $pN$  Abtastpunkten ausgewertet werden soll, macht das insgesamt  $(2pN+1)^2(2N+1)^2$  Rechenoperationen, also  $O(N^4)$ . Mit der Vorstellung, dass diese Formel zum Beispiel zur Vergrößerung eines Films benutzt werden soll (mit 50 Bildern pro Sekunde), ist das deutlich zu lang.

Die entscheidende Idee ist, die Operation als Faltung zu schreiben. Wir führen das der Einfachheit halber nur auf  $\mathbb{R}$  durch, die Verallgemeinerung auf  $\mathbb{R}^2$  ist einfach (und gar nicht nötig, siehe unten).

Gegeben  $y_p$ ,  $p = -m \dots m$ .  $y$  soll auf  $p$ -fache Länge verlängert werden mit Hilfe der Sincreihe. Für das Resultat  $z_j$ ,  $j = -mp \dots mp$  gilt

$$z_j = \sum_{k=-m}^m y_k \operatorname{sinc}\left(j \frac{\pi}{p} - k\pi\right).$$

Wir wollen diese Formel als Faltung schreiben. Definiere dazu  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2mp+1}$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{4mp+1}$ :

$$\tilde{y}_{kp} = y_k, \quad k = -m \dots m, \quad y_k = 0 \text{ sonst.}$$

$$\tilde{x}_k = \operatorname{sinc}\left(k \frac{\pi}{p}\right), \quad k = -2mp \dots 2mp.$$

Für die Faltung  $z = \tilde{y} * \tilde{x}$  gilt dann für  $j = -mp \dots mp$ :

$$\begin{aligned} z_j &= \sum_{k=-mp}^{mp} \tilde{y}_k \tilde{x}_{j-k} \\ &= \sum_{k=-m}^m \tilde{y}_{pk} \tilde{x}_{j-pk} \\ &= \sum_{k=-m}^m y_k \operatorname{sinc}(j\pi/p - k\pi) \end{aligned}$$

oder  $z$  ist die Faltung von  $x$  und  $y$ . In zwei Dimensionen gilt der entsprechende Algorithmus: Vergrößere das Bild  $B$  durch Einschieben von  $p-1$  Nullen zwischen zwei Bildpunkten, definiere eine Matrix  $X$  als Wertetafel des zweidimensionalen sinc, dann ist die Sincreihe die Faltung dieser beiden Matrizen.

Wir bemerken nun noch folgenden einfachen Satz: Für die Matrix  $X$  gelte  $X_{k_1, k_2} = x_{k_1} x'_{k_2}$ . Dann gilt für die Faltung  $Z$  der Matrizen  $Y$  und  $X$ :

$$\begin{aligned} Z_j &= \sum_{k_1=-N}^N \sum_{k_2=-N}^N Y_k X_{k-j} \\ &= \sum_{k_1=-N}^N \left( \sum_{k_2=-N}^N Y_k x'_{k_2-j_2} \right) x_{k_1-j_1} \end{aligned}$$

Die innere Summe ist eine Faltung auf den Zeilen von  $Y$ , die äußere Summe ist eine Faltung auf den Spalten des Ergebnisses. Zur Durchführung: Es muss auf  $2N+1$  Zeilen/Spalten eine eindimensionale Faltung der Länge  $2N+1$  durchgeführt werden, das kostet jedesmal offensichtlich  $O(N^3)$  (naiv durchgeführt). Mit der Bemerkung, dass unser Faltungskern aus der Sincreihe die Bedingung erfüllt, haben wir die Komplexität bereits um einen Faktor  $N$  verringert.

Führen wir nun die Faltung mit Hilfe des Faltungssatzes durch, bekommen wir eine Reduktion auf  $N^2 \log N$ , also fast um den Faktor  $N^2$ .

Tatsächlich lässt sich für praktische Zwecke die Komplexität noch weiter verringern. Um den Faltungssatz anzuwenden, müssen wir die Fouriertransformierte von  $\tilde{y}$  berechnen. Setzt man die spezielle Struktur ein, sieht man sofort, dass die FT von  $\tilde{y}$  die von  $y$  ist, geeignet periodisch fortgesetzt. Es reicht also, die Fouriertransformierte von  $y$  zu berechnen. Die Berechnung der Fouriertransformierte von  $\tilde{x}$  kann man sich ganz sparen: Die analytische inverse Fouriertransformierte wäre die charakteristische Funktion eines Intervalls, punktweise Multiplikation entfernt gerade die periodischen Fortsetzungen in  $\tilde{y}$ . Setzen wir diese analytische Inverse hier ein, ergibt sich folgender Algorithmus zum Upsamplen eines Bildes  $Y$ :

1. Berechne die diskrete Fouriertransformierte  $\hat{Y}$  von  $Y$ .

2. Vergrößere  $\hat{Y}$  um den Faktor  $p$  durch Ergänzen mit Nullen.
3. Berechne die inverse Fouriertransformierte von  $\hat{Y}$ .

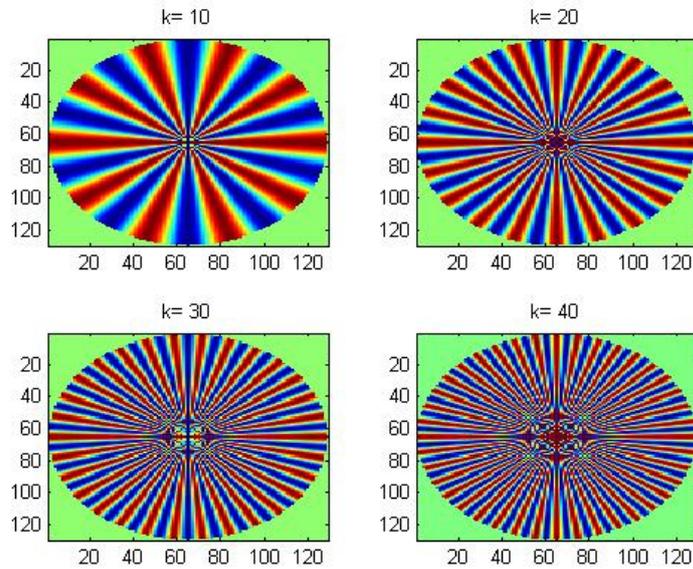
Das ist natürlich genau der Algorithmus, den man vielleicht von Anfang an vermutet hätte: Durch die Fouriertransformation lassen sich die Fourierkoeffizienten zu den Frequenzen  $k = -m \dots m$  berechnen (nach Abtasttheorem). Wir sampeln einfach hoch, indem wir die zugehörigen trigonometrischen Funktionen bei der inversen Fouriertransformation auf einem engeren Gitter auswerten. Hier die zugehörigen matlab-codes. Aufgabe 23 a):

```
function aufg23a
%aufg23a Wertetafel von real(z^k/abs(z)^k)
N=64;
[x,y]=meshgrid((-N:N)/N,(-N:N)/N);
z=x+i*y;
```

```
makebild(z,10,1);
makebild(z,20,2);
makebild(z,30,3);
makebild(z,40,4);
```

```
function makebild(z,k,p)
subplot(2,2,p);
imagesc(f(z,k));
title(['k= ' num2str(k)]);
```

```
function erg=f(z,k)
erg=z.^k./abs(z).^k;
erg(abs(z)>1)=0;
erg=real(erg);
```



### Aufgabe 23a

fourconv2, Faltung zweier Matrizen mit Hilfe der Fouriertransformation. Ergebnis ist dasselbe wie bei conv2.

```
function z = fourconv2( x,y )
%Unsymmetrische Faltung von x und y (zero-padded).
m=size(x,1);
n=size(x,2);
m1=size(y,1);
n1=size(y,2);
tmp=zeros(m+m1-1,n+n1-1);
tmp(1:m,1:n)=x;
x=tmp;
tmp=zeros(m+m1-1,n+n1-1);
tmp(1:m1,1:n1)=y;
y=tmp;
z=ifft2(fft2(x).*fft2(y));
```

zweidfalt, Lösung der Aufgabe durch zweidimensionale Faltung. Upsamplen eines gegebenen Bildes um den Faktor p.

```
function z = zweidfour( bild ,p )
%Upsample bild um Faktor p.
%Annahme: bild ist quadratisch, Dimension ist ungerade.
```

```

%TODO: Funktioniert auch für m=size(bild,2).
m=(size(bild,2)-1)/2;
n=p*m;
b=zeros(2*n+1,2*n+1);
b(1:p:2*n+1,1:p:2*n+1)=bild;
x=sinc((-2*n:2*n)*pi/p)'*ones(1,4*n+1);
z=fourconv2(b,x.*x');
z=z(2*n+1:4*n+1,2*n+1:4*n+1);

```

aufg23b, Treiber für die Lösung.

```

function erg = Untitled1( input_args )
makebild(10,1);
makebild(20,2);
makebild(30,3);
makebild(40,4);

```

```

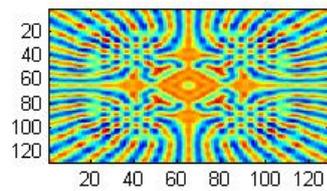
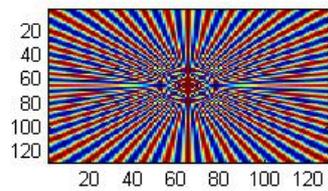
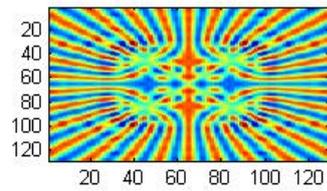
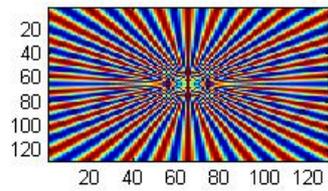
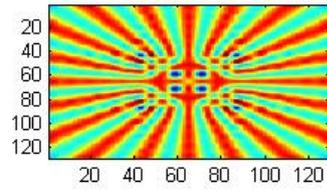
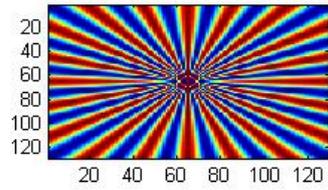
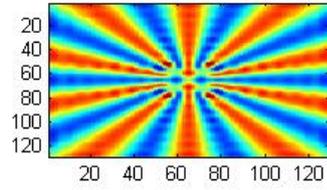
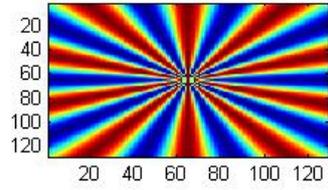
function makebild(k,r)
N=16;
M=64;
p=M/N;
subplot(4,2,2*r-1);
x=[-N:N]'/N*ones(1,2*N+1);
y=x';
z=x+i*y;
x1=[-M:M]'/M*ones(1,2*M+1);
y1=x1';
z1=x1+i*y1;
imagesc(real(f(z1,k)));
subplot(4,2,2*r);
imagesc(real(zweidfalt(f(z,k),4)));

```

```

function erg=f(z,k)
erg=z.^k./(abs(z).^k+1e-300);

```



# Blatt 7

Frank Wübbeling

13. Juni 2006

## 1 Aufgabe 24

Alternative Lösung: Sei die Deltadistribution angenähert durch die Funktionen  $\delta_p$  aus einer alten Aufgabe. Dann gilt für  $\alpha = e_1$ :

$$\begin{aligned} R(D^\alpha f)(\theta, s) &= R\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\theta, s) \\ &= \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x \cdot \theta - s) \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) dx \\ &= \lim \int_{\mathbf{R}^n} \delta_p(x \cdot \theta - s) \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) dx \\ &= - \lim \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta_p(x \cdot \theta - s) f(x) dx \\ &= - \lim \theta_1 \int_{\mathbf{R}^n} \delta'_p(x \cdot \theta - s) f(x) dx \\ &= \lim \theta_1 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial s} \delta_p(x \cdot \theta - s) f(x) dx \\ &= \theta_1 \frac{\partial}{\partial s} (Rf)(\theta, s) \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Differentiation und Integration im letzten Schritt muss man noch begründen.

## 2 Aufgabe 25

Zur Erinnerung:  $P$  ist eine Abbildung von  $S^{n-1} \times \theta^\perp$  nach  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (Pf, g) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} Pf(\theta, x)g(\theta, x)dx d\theta \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta)dtg(\theta, x)dx d\theta \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^3} f(x)g(\theta, x - (x \cdot \theta)\theta)dx d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \int_{S^{n-1}} g(\theta, x - (x \cdot \theta)\theta)d\theta dx
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 (P^*g)(x) &= \int_{S^{n-1}} g(\theta, x - (x \cdot \theta)\theta)d\theta. \\
 (P^*Pf)(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x - (x \cdot \theta)\theta + t\theta)dt d\theta \\
 &= 2 \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^+} f(x + t\theta)dt d\theta \\
 &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-1}} f(x - y)dy
 \end{aligned}$$

## 3 Aufgabe 26

Einzeiler, wenn man es richtig macht und die Zeile lang genug ist. Wir betrachten wie vorgeschlagen die Funktion  $F(y) = \widehat{\Phi}(x - y)e^{-iy\xi}$ . Nach Voraussetzung hat  $\widehat{\Phi}$  die Bandbreite  $\alpha$ . Durch die Multiplikation wird der Träger um  $\xi$  verschoben, d.h. anschließend liegt der Träger in  $[-2\pi, 2\pi]$ , denn  $\xi \leq \beta$ . Damit ist die Trapezregel mit Schrittweite 1 exakt für diese Funktion, und es gilt

$$\sqrt{2\pi}e^{-ix\xi}\Phi(\xi) = \int \widehat{\Phi}(y)e^{-i(x-y)\xi}dy = \int \widehat{\Phi}(x-y)e^{-iy\xi}dy = \int F(y)dy = \sum_m \widehat{\Phi}(x-m)e^{-im\xi}$$