



Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Vorlesungsskript Inverse Probleme

F. Natterer
*Institut für Numerische
und instrumentelle Mathematik*

WS 2002/03

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Einleitung | 3 |
| 2 | Mathematische Grundlagen | 6 |
| 2.1 | Fourier-Analyse | 6 |
| 2.2 | Distributionen | 21 |
| 2.3 | Die Helmholtzgleichung | 34 |
| 2.4 | Die Wellengleichung | 45 |
| 2.5 | Integralgeometrie | 51 |
| 2.5.1 | Die Radon-Transformation | 51 |
| 2.5.2 | Die Röntgen-Transformation | 58 |
| 2.5.3 | Die Cone-Beam-Transformation | 63 |
| 2.6 | Das Abtasttheorem | 69 |
| 3 | Das Inverse Problem der Wellengleichung | 74 |
| 3.1 | Migration | 74 |
| 3.2 | Die Born-Approximation | 78 |
| 3.3 | Radar | 86 |
| 4 | Tomographie | 95 |
| 4.1 | Gefilterte Rückprojektion | 95 |
| 4.2 | Standard Parallelgeometrie | 100 |
| 4.3 | Fächergeometrie | 104 |
| 5 | Schlecht gestellte Probleme | 106 |
| 5.1 | Einführung | 106 |
| 5.2 | Der endlich dimensionale Fall | 109 |
| 5.3 | Erweiterung auf Operatoren | 116 |

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand dieser Vorlesung sind inverse Probleme, insbesondere das der Wellengleichung. Im Gegensatz zum direkten Problem sind wir nicht an der eigentlichen Lösung interessiert, sondern wir versuchen anhand der uns bekannten Lösung Informationen über eine andere Unbekannte zu erhalten. Wir betrachten einige Beispiele:

1) Seismologie

Bei der Seismologie sind wir daran interessiert die Schallgeschwindigkeit $c(x)$ im Erdinneren zu bestimmen. Dazu wird an einer Stelle q auf der Erdoberfläche eine Schallwelle f_q erzeugt (z.B. durch eine Explosion) und der Zeitverlauf der reflektierten Wellen $u_q(x, t)$ wird bei $x = r$ mit Geophonen gemessen und in einem sogenannten Seismogramm aufgezeichnet. $u_q(x, t)$ erfüllt die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2}(x, t) &= c(x)(\Delta u_q(x, t) + f_q(x, t)), \\ u_q(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_q}{\partial t}(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

Durch die Messungen ist $u_q(r, t)$ für viele Paare q, r bekannt und unser Ziel ist es aus diesen Werten $c(x)$ bzw. Unstetigkeitsstellen von c , die einer Grenze zwischen zwei unterschiedlichen Erdschichten entsprechen, zu bestimmen. Für die Wahl von q und r gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. *Zero-offset*: Es ist $q = r$ und beide laufen gemeinsam über die Erdoberfläche $x_3 = 0$, z.B. entlang der Geraden $x_2 = x_3 = 0$.

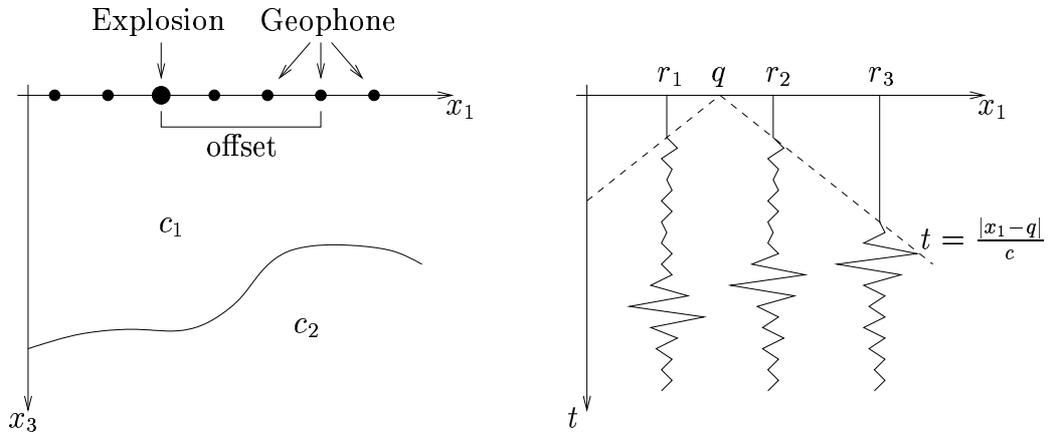


Abbildung 1.1: *Links:* Durch eine Explosion wird eine Schallwelle erzeugt. *Rechts:* Common source Seismogramm. Die Schallwelle erreicht die Geophone auf direktem Weg zur Zeit $t = \frac{|x_1 - q|}{c}$. Die grossen Ausschläge entstehen durch die an der Grenze zwischen c_1 und c_2 reflektierte Welle.

2. *Common source:* Hier ist q fest und $u(r, t)$ wird gleichzeitig für alle r auf einer Geraden oder der gesamten Erdoberfläche gemessen (siehe Abbildung 1.1).

2) Radar

Wir nehmen an, eine Radarantenne sende an einem Ort q das Signal $s(t)$ aus. Dann erfüllt die Fourier-Transformierte $U(x, \omega)$ des elektromagnetischen Feldes $u(x, t)$ die Helmholtzgleichung

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(x)} \right) U(x, \omega) = -\delta(x - q) \hat{s}(\omega).$$

Hierbei sind \hat{s} die Fourier-Transformierte von s und $c(x)$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die vom jeweiligen Medium abhängt. An der Antenne wird das elektromagnetische Feld gemessen, so dass $U(x, \omega)$ für $x = q$ bekannt ist. Durch wiederholte Messungen (dies kann durch eine mobile Antenne q oder ein sich bewegendes Objekt realisiert werden) versuchen wir nun Informationen über $c(x)$ zu erhalten.

3) Computer-Tomographie

Ziel der Computer-Tomographie ist es, den Absorptionskoeffizienten für

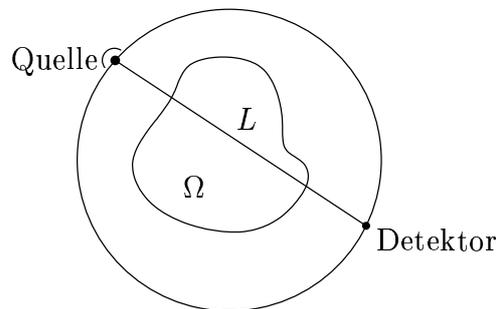


Abbildung 1.2: Computer-Tomographie

Röntgenstrahlen innerhalb eines Objektes Ω zu bestimmen. Dazu emittiert eine Quelle einen Röntgenstrahl der Intensität I_0 . Da diese Strahlung sehr hochfrequent ist, können wir annehmen, dass sie sich entlang einer Geraden L ausbreitet. Nachdem der Strahl das Objekt Ω durchquert hat, wird seine Intensität I mit einem Detektor gemessen. Bezeichnen wir den Absorptionskoeffizienten mit f , so gilt

$$I = I_0 e^{-\int_L f(x) dx}.$$

Somit ist der Wert des Linienintegrals

$$\int_L f(x) dx = \log \frac{I_0}{I}$$

bekannt. Diese Messung wird für viele Quelle-Detektor Paare wiederholt. Unseres Aufgabe ist es also, die Funktion f aus den Werten der Linienintegrale $\int_L f(x) dx$ für viele Geraden L zu bestimmen.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Fourier-Analyse

Ein wichtiges Hilfsmittel für die inversen Probleme stellt die Fourier-Transformation dar. Für $1 \leq p < \infty$ führen wir den Banachraum

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar, } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ein. Im Fall $p = \infty$ setzen wir

$$L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar, } \exists C > 0 \ |f| \leq C \text{ f.ü.}\}$$

und versehen diesen Raum mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|$. Wir definieren die Fourier-Transformation zunächst auf $L_1(\mathbb{R}^n)$ und werden sie später auf weitere Räume ausdehnen.

Definition 2.1.1 Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

die Fourier-Transformierte von f .

Bemerkungen: 1) \hat{f} ist beschränkt, denn es gilt

$$|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1.$$

2) \hat{f} ist stetig, denn wegen $|e^{-ix \cdot \xi} f(x)| = |f(x)|$ liefert der Satz von Lebesgue:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi_0} f(x) dx \\ &= \hat{f}(\xi_0). \end{aligned}$$

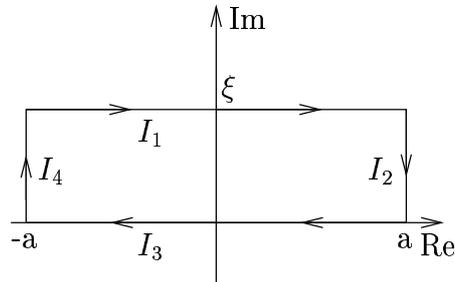
Beispiele: 1) Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^{-|x|^2/2}$. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall $n = 1$ und berechnen \hat{f} auf zwei verschiedene Weisen:

a)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2 - ix\xi} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi)^2/2} dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

Da $e^{-z^2/2}$ eine ganze Funktion ist, liefert der Cauchysche Integralsatz $\sum_{i=1}^4 \int_{I_i} e^{-z^2/2} dz = 0$. Die Integrale entlang I_2 und I_4 verschwinden für $a \rightarrow \infty$ und wir können den Integrationsweg in (2.1) auf die reelle Achse verschieben. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2/2} (2\pi)^{1/2} \\ &= e^{-\xi^2/2}. \end{aligned}$$



b) Wir differenzieren \hat{f} nach ξ

$$\begin{aligned}
 \hat{f}'(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx \\
 &= (2\pi)^{-1/2} i \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} e^{-x^2/2} \right) e^{-ix\xi} dx \\
 &= -(2\pi)^{-1/2} i \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \left(\frac{d}{dx} e^{-ix\xi} \right) dx \\
 &= -(2\pi)^{-1/2} \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx \\
 &= -\xi \hat{f}(\xi)
 \end{aligned}$$

Wir haben also eine gewöhnliche Differentialgleichung für \hat{f} hergeleitet. Zusammen mit der Anfangsbedingung $\hat{f}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$ hat diese die eindeutige Lösung

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Der Fall $n > 1$ läßt sich nun einfach auf $n = 1$ zurückführen, denn aus

$$e^{-|x|^2/2 - ix \cdot \xi} = e^{\sum_{j=1}^n (-x_j^2/2 - ix_j \xi_j)} = \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2 - ix_j \xi_j}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2 - ix \cdot \xi} dx \\
 &= \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j \xi_j} dx_j \\
 &= \prod_{j=1}^n \left(e^{-x_j^2/2} \right)^\wedge (\xi_j) = \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/2} \\
 &= e^{-|\xi|^2/2}. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also, dass $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ ein Fixpunkt der Fourier-Transformation ist.

2) Für $\lambda \neq 0$ setzen wir $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 (f_\lambda)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(\lambda x) dx & (x' = \lambda x) \\
 &= (2\pi)^{-n/2} |\lambda|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix' \cdot \xi/\lambda} f(x') dx' \\
 &= |\lambda|^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

3) Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei $f_a(x) = f(x - a)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (f_a)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x - a) dx & (x' = x - a) \\
 &= (2\pi)^{-n/2} e^{-ia \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix' \cdot \xi} f(x') dx' \\
 &= e^{-ia \cdot \xi} \hat{f}(\xi).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Eine Translation des Arguments von f ändert also nur die Phase von \hat{f} nicht aber den Betrag.

4) Mit χ_A bezeichnen wir die charakteristische Funktion der Menge A , also

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Für $\xi \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 \hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx \\
 &= (2\pi)^{-1/2} \left[-\frac{1}{i\xi} e^{-ix\xi} \right]_{-1}^1 \\
 &= (2\pi)^{-1/2} 2 \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i\xi} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}.
 \end{aligned}$$

Wir definieren die Funktion $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sinus cardinalis) durch

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Taylorreihe $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ liefert sofort $\text{sinc} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Da $\hat{\chi}_{[-1,1]}$ wegen $\chi_{[-1,1]} \in L_1(\mathbb{R})$ stetig ist folgt

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc } \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Sei nun

$$\chi_{[-1,1]^n}(x) = \prod_{j=1}^n \chi_{[-1,1]}(x_j)$$

die charakteristische Funktion des Einheitskubus im \mathbb{R}^n . Als Fourier-Transformierte erhalten wir

$$\hat{\chi}_{[-1,1]^n}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{j=1}^n \text{sinc } \xi_j. \quad (2.6)$$

Als letztes betrachten wir die charakteristische Funktion der Einheitskugel $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{B^n}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{|x| \leq 1} e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= |\xi|^{-n/2} J_{n/2}(|\xi|). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet J_ν die Besselfunktion der 1. Art der Ordnung ν (siehe Aufgabe 1).

5) Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation einer differenzierbaren Funktion f und ihrer partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Wir nehmen an, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger hat. Durch partielle

Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^\wedge (\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) dx \\
 &= -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
 &= (2\pi)^{-n/2} i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
 &= i \xi_j \hat{f}(\xi).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dem Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial x_j}$ entspricht also im Fourierraum abgesehen von dem Faktor i die Multiplikation mit ξ_j . Diese Beziehung gilt auch in umgekehrter Richtung, denn für $x_j f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
 &= i^{-1} (x_j f)^\wedge (\xi).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

6) Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Aus Bemerkung 1) folgt $\hat{f}g, f\hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und es folgt die Parsevalsche Gleichung

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx g(\xi) d\xi \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

7) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir untersuchen das Verhalten von $\hat{f}(\xi)$ für $|\xi| \rightarrow \infty$. Für $\xi \neq 0$ und $1 \leq j \leq n$ folgt aus (2.7)

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i \xi_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^\wedge (\xi).$$

Durch wiederholtes Anwenden erhalten wir für jedes beliebige $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$|\hat{f}(\xi)| = |\xi^{-\alpha}| |(D^\alpha f)^\wedge(\xi)| \leq M |\xi^{-\alpha}|$$

mit der von α abhängigen Konstanten $M = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(D^\alpha f)^\wedge(\xi)|$. Somit konvergiert $\hat{f}(\xi)$ für $|\xi| \rightarrow \infty$ schneller gegen 0 als jede Potenz von ξ .

Wir führen nun die Faltung $f * g$ zweier Funktionen ein und werden sehen, dass die Faltung in einem engen Zusammenhang mit der Fourier-Transformation steht.

Definition 2.1.2 Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Faltung $f * g$ definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Eigenschaften: 1.) Es gilt $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)||g(y)|dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|dx |g(y)|dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.) Die Faltung ist symmetrisch:

$$f * g = g * f$$

3.) Seien $F = \text{supp}(f)$ und $G = \text{supp}(g)$ die Träger von f bzw. g . Dann gilt

$$\text{supp}(f * g) \subset F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}.$$

Satz 2.1.1 (Faltungssatz) Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \quad (2.11)$$

Beweis: Durch Einsetzen der Definitionen der Fourier-Transformation und Faltung erhalten wir für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 (f * g)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy dx \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y) \cdot \xi} f(x-y)dx dy \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} f(z)dz \quad (z = x - y) \\
 &= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$

□

Beispiel: Sei $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (f * f)(x) &= \int_{-1}^1 f(x-y)dy \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{falls } |x| > 2 \\ 2 - |x| & \text{falls } |x| \leq 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (f * f)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{1/2} (\hat{f}(\xi))^2 \\
 &= (2\pi)^{1/2} \frac{2}{\pi} \text{sinc}^2 \xi \\
 &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}^2 \xi.
 \end{aligned}$$

Wir kommen nun zur Inversion der Fourier-Transformation. Dazu benötigen wir folgendes Lemma, das uns ein approximatives Einselement der Faltung zur Verfügung stellt.

Lemma 2.1.1 Sei $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$ und für $\lambda > 0$ sei $\psi_\lambda(x) = \lambda^{-n} \psi(\lambda^{-1}x)$. Dann gilt für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\psi_\lambda * f - f\|_1 = 0.$$

Beweis: Mit $y' = \lambda^{-1}y$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\lambda(y) dy = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y') dy' = 1 \quad (2.12)$$

und somit folgt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(\psi_\lambda * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \psi_\lambda(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \psi_\lambda(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Da (2.12) auch für $|\psi|$ stimmt, gilt weiterhin $\|\psi_\lambda\|_1 = \|\psi\|_1$ für alle $\lambda > 0$. Wir führen den Beweis nun in zwei Schritten:

- (i) Zunächst sei f stetig und $\text{supp}(f) \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Dann ist f beschränkt, also $|f| \leq M$, und gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall |y| < \delta, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir können $\delta < 1$ annehmen und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\psi_\lambda * f - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \psi_\lambda(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| |\psi_\lambda(y)| dy dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y| \geq \delta} |f(x-y) - f(x)| |\psi_\lambda(y)| dy dx \\ &\leq \int_{|x| < R+1} \int_{|y| < \delta} \varepsilon |\psi_\lambda(y)| dy dx \\ &\quad + \int_{|y| \geq \delta} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| dx |\psi_\lambda(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \|\psi_\lambda\|_1 \int_{|x| < R+1} dx + 2\|f\|_1 \int_{|y| \geq \delta} |\psi_\lambda(y)| dy \end{aligned}$$

$$= \varepsilon C \|\psi\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{|y'| \geq \delta/\lambda} |\psi(y')| dy'.$$

Wir wählen λ_0 so klein, dass

$$\int_{|y'| \geq \delta/\lambda} |\psi(y')| dy' < \varepsilon, \quad \forall \lambda \leq \lambda_0$$

und erhalten

$$\|\psi_\lambda * f - f\|_1 \leq \varepsilon C_1, \quad \forall \lambda \leq \lambda_0.$$

- (ii) Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_p(\mathbb{R}^n)$ liegt, existiert ein stetiges g mit kompaktem Träger und $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Nach (i) gibt es ein λ_0 , so dass

$$\|g - \psi_\lambda * g\|_1 < \varepsilon, \quad \forall \lambda \leq \lambda_0.$$

Somit erhalten wir für alle $\lambda \leq \lambda_0$

$$\begin{aligned} \|f - \psi_\lambda * f\|_1 &\leq \|f - g\|_1 + \|g - \psi_\lambda * g\|_1 + \|\psi_\lambda * g - \psi_\lambda * f\|_1 \\ &\leq (2 + \|\psi\|_1)\varepsilon, \end{aligned}$$

denn nach (2.10) ist

$$\|\psi_\lambda * g - \psi_\lambda * f\|_1 = \|\psi_\lambda * (g - f)\|_1 \leq \|\psi_\lambda\|_1 \|g - f\|_1 < \|\psi\|_1 \varepsilon.$$

Es gilt also

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f - \psi_\lambda * f\|_1 = 0.$$

□

Unter der Voraussetzung $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ können wir die Fourier-Transformation nun invertieren.

Satz 2.1.2 (Fourier'sche Inversionsformel) Seien $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt f.ü.

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.13)$$

Beweis: Für $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt nach (2.4) und (2.9)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_{-x})^\wedge(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f_{-x}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi + x) \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \xi) \hat{\varphi}(-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Sei $\psi(\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/2}$. Nach (2.2) ist $\hat{\psi} = \psi$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$. Für $\lambda > 0$ setzen wir $\varphi(\xi) = \psi(\lambda\xi)$ und erhalten aus (2.3)

$$\hat{\varphi}(\xi) = \lambda^{-n} \hat{\psi}(\lambda^{-1}\xi) = \lambda^{-n} \psi(\lambda^{-1}\xi) = \psi_\lambda(\xi).$$

Somit ergibt sich wegen $\psi(\xi) = \psi(-\xi)$

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} e^{-\lambda^2 |\xi|^2/2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \xi) \psi_\lambda(\xi) d\xi = (\psi_\lambda * f)(x).$$

Wegen $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert die linke Seite nach Lebesgue für $\lambda \rightarrow 0$ f.ü. gegen

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Nach Lemma 2.1.1 konvergiert die rechte Seite in $L_1(\mathbb{R}^n)$ gegen f und somit konvergiert eine Teilfolge f.ü. gegen $f(x)$ (siehe [2], S.96). Zusammen ergibt sich die Behauptung:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad \text{f.ü..}$$

□

Unser nächstes Ziel ist es, die Fourier-Transformation auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ zu erweitern. Das Problem besteht darin, dass das Fourier-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

für $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ im Allgemeinen nicht existiert. Wir müssen die Fourier-Transformation also auf eine andere Art und Weise definieren. Als erstes Ergebnis erhalten wir folgenden Satz.

Satz 2.1.3 Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ und $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Beweis: Wir führen den Beweis in drei Schritten:

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - \varphi\|_p \leq 2\varepsilon \quad \text{für } p = 1, 2.$$

Dazu setzen wir $h_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $p = 1, 2$ folgt wegen $|1 - h_\lambda| \leq 1$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f - fh_\lambda\|_p^p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p |1 - h_\lambda(x)|^p dx = 0.$$

Wir wählen λ so klein, dass

$$\|f - fh_\lambda\|_p \leq \varepsilon.$$

Da C_0^∞ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ liegt, existiert ein $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - \psi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\max(\|h_\lambda\|_2, 1)}.$$

Für $\varphi = \psi h_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir wegen $|h_\lambda| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_2 &= \|f - \psi h_\lambda\|_2 \leq \|f - fh_\lambda\|_2 + \|fh_\lambda - \psi h_\lambda\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \|f - \psi\|_2 \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

und die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_1 &= \|f - \psi h_\lambda\|_1 \leq \|f - fh_\lambda\|_1 + \|fh_\lambda - \psi h_\lambda\|_1 \\ &\leq \varepsilon + \|h_\lambda\|_2 \|f - \psi\|_2 \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aus Beispiel 7) folgt $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $g = \bar{\hat{f}}$ und erhalten aus Satz 2.1.2:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \bar{\hat{f}}(x) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(x) dx \\ &= \bar{\hat{f}}(\xi). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich mit (2.9)

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{f}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \bar{f}(\xi) d\xi \\ &= \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

(iii) Sei nun $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$. Nach Teil (i) gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_k \rightarrow f \quad \text{in } L_1(\mathbb{R}^n) \text{ und } L_2(\mathbb{R}^n).$$

Nach Teil (ii) gilt

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|_2 = \|(f_k - f_l)^\wedge\|_2 = \|f_k - f_l\|_2.$$

Da (f_k) eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch (\hat{f}_k) eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{R}^n)$ und es existiert ein $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{f}_k \rightarrow g \quad \text{in } L_2(\mathbb{R}^n).$$

Ausserdem gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}|(\hat{f}_k - \hat{f})(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix \cdot \xi} (f_k - f)(x)| dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \|f_k - f\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.\end{aligned}$$

Zusammen haben wir also:

$$\begin{aligned}\hat{f}_k &\rightarrow \hat{f} && \text{punktweise} \\ \hat{f}_k &\rightarrow g && \text{in } L_2(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

und erhalten somit (siehe [2], S.96)

$$\hat{f} = g \quad \text{f.ü.}$$

und

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{f}_k\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2.$$

□

Wir können die Fourier-Transformation nun von $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.

Satz 2.1.4 (Plancherel) *Es gibt eine Isometrie F des $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$Ff = \hat{f} \quad \text{für } f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n).$$

Wir nennen F die Fourier-Transformation und schreiben $Ff = \hat{f}$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine Folge $(f_k) \subset L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \rightarrow f$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 2.1.3 folgt, dass (\hat{f}_k) eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist. Wir setzen

$$Ff = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k,$$

wobei der Limes in $L_2(\mathbb{R}^n)$ zu bilden ist. Es gilt:

1. $Ff = \hat{f}$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$
2. $\|Ff\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{f}_k\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2$.

□

Ist $f \in L_2(\mathbb{R}^n) \setminus L_1(\mathbb{R}^n)$, so existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$ nicht. Wir schneiden f bei $|x| = R$ ab, d.h. wir betrachten die Funktion $f_R = f \chi_R$, wobei χ_R die charakteristische Funktion der Kugel B_R ist. Die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$\|f_R\|_1 \leq \|f\|_2 \|\chi_R\|_2 < \infty,$$

d.h. $f_R \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und f_R konvergiert in $L_2(\mathbb{R}^n)$ gegen f , denn es gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|f - f_R\|_2^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |f(x)|^2 dx = 0.$$

Satz 2.1.4 liefert

$$\hat{f}(\xi) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \hat{f}_R(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad (2.14)$$

wobei l.i.m. (Limes im Mittel) den Limes in $L_2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Obwohl das Integral nicht existiert, schreiben wir im Folgenden

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Dieses Integral ist dann im Sinn von Gleichung (2.14) zu verstehen.

Beispiel: Sei $n = 2$ und $f(x) = \frac{1}{1+|x|^2}$. Dann gilt $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ aber $f \notin L_1(\mathbb{R}^2)$. Für $\xi = \rho(\cos \psi, \sin \psi)^T$ und $\rho \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}_R(\xi) &= (2\pi)^{-1} \int_{|x| < R} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} r e^{-ir\rho \cos(\varphi - \psi)} \frac{1}{1+r^2} d\varphi dr \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^R \frac{r}{1+r^2} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\varphi - \psi)} d\varphi dr \\ &= \int_0^R \frac{r}{1+r^2} J_0(r\rho) dr \end{aligned}$$

Wegen

$$J_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-1}) \right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

konvergiert $\hat{f}_R(\xi)$ für $\xi \neq 0$ punktweise gegen $\int_0^\infty \frac{r}{1+r^2} J_0(r\rho) dr$ und der Limes stimmt mit dem l.i.m. f.ü. überein (siehe [2], S.96). Somit erhalten wir für $\rho = |\xi| \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2} J_0(r\rho) dr.$$

2.2 Distributionen

In diesem Abschnitt werden wir die Distributionen (verallgemeinerte Funktionen) studieren. Als Distributionen bezeichnen wir die stetigen, linearen Funktionale über einem geeigneten Funktionenraum X . Die Elemente $\varphi \in X$ heißen Testfunktion.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$$

der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, deren Träger in Ω kompakt ist. Wir führen in $\mathcal{D}(\Omega)$ den Konvergenzbegriff

$$\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi \iff \begin{array}{l} 1) \exists K \text{ kompakt in } \Omega \text{ mit } \text{supp}(\varphi_k) \subset K, \forall k \\ 2) D^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} D^\alpha \varphi \text{ gleichmäßig, } \forall \alpha \end{array}$$

ein.

Definition 2.2.1 Mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der linearen, stetigen Funktionale über $\mathcal{D}(\Omega)$ mit punktweiser Konvergenz. Die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Der Begriff der punktweisen Konvergenz einer Folge $(T_k) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ ist im selbem Sinn wie bei Funktionen zu verstehen, mit dem Unterschied dass die „Punkte“ jetzt Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega)$ sind:

$$\begin{aligned} T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) &\iff T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T \text{ punktweise} \\ &\iff T_k[\varphi] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T[\varphi], \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Beispiele: 1) Wir führen den Raum der lokal integrierbaren Funktionen ein:

$$L_1^{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar, } \int_K |f(x)| dx < \infty, \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt} \right\}$$

Für $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ setzen wir

$$T_f[\varphi] = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

und zeigen, dass T_f stetig und somit eine Distribution ist. Dazu sei $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine Folge mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$. Dann existiert ein Kompaktum K mit $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$ für alle k und aus der gleichmäßigen Konvergenz der φ_k folgt

$$T_f[\varphi_k] = \int_{\Omega} f \varphi_k dx = \int_K f \varphi_k dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_K f \varphi dx = T_f[\varphi].$$

T_f ist also stetig und wir nennen T_f die von f erzeugte Distribution. Wir identifizieren f mit T_f und erhalten durch die eindeutige Zuordnung $f \rightarrow T_f$ eine Einbettung von $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2) Sei $0 \in \Omega$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sei

$$T[\varphi] = \varphi(0).$$

Die Stetigkeit von T folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) &\Rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ punktweise} \Rightarrow \varphi_k(0) \rightarrow \varphi(0) \\ &\Rightarrow T[\varphi_k] \rightarrow T[\varphi]. \end{aligned}$$

Wir nennen $T = \delta$ die Dirac'sche δ -Funktion, obwohl sie im eigentlichen Sinn keine Funktion ist, denn es gibt kein $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ mit $T_f[\varphi] = \varphi(0)$.

3) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit in Ω . Wir definieren

$$T_M[\varphi] = \int_M \varphi d\sigma,$$

wobei σ das Oberflächenmaß auf M ist. $T_M = \delta_M$ ist die δ -Funktion auf M .

Wir haben gesehen, dass wir die Funktionen aus $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ als Distributionen auffassen können. Wir werden nun einige Operationen von Funktionen auf die Distributionen erweitern:

1) Differentiation:

Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definieren wir die Ableitung

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}[\varphi] = -T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right].$$

Diese Ableitung ist wohldefiniert, da mit φ auch $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt.

Beispiele:

- (i) Sei $f \in C^1(\Omega)$. Wie erwarten, dass die Ableitung der von f erzeugten Distribution mit der von f' erzeugten Distribution übereinstimmt. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} T_f[\varphi] &= -T_f \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}[\varphi]. \end{aligned}$$

- (ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Wir definieren die Heavyside-Funktion H durch

$$H(x) := \chi_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Wir berechnen die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T_H[\varphi] &= -T_H \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = - \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \\ &= -[\varphi]_0^{\infty} = \varphi(0) = \delta[\varphi] \end{aligned}$$

und erhalten $H' = \delta$.

- (iii) Durch wiederholtes Anwenden der Definition ergibt sich

$$D^\alpha T[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha \varphi].$$

- (iv) Sei $K \subset \Omega$, $M = \partial K$ glatt. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\chi_K}[\varphi] &= -T_{\chi_K} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] = - \int_{\Omega} \chi_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Der Gaußsche Integralsatz (siehe (2.20)) liefert

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{\chi_K}[\varphi] = - \int_M \varphi \nu_i d\sigma.$$

(v) Für die δ -Funktion ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \delta[\varphi] = -\delta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0).$$

(vi) Wir betrachten eine Folge $(T_k) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ mit

$$T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T \iff T_k[\varphi] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T[\varphi], \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dann konvergieren auch die Ableitungen $D^\alpha T_k$ gegen $D^\alpha T$:

$$\begin{aligned} D^\alpha T_k[\varphi] &= (-1)^{|\alpha|} T_k[D^\alpha \varphi] \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha \varphi] = D^\alpha T[\varphi]. \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f_k(x) = \sin(kx)$. Durch partielle Integration folgt für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} |T_{f_k}[\varphi]| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \varphi(x) dx \right| = \frac{1}{k} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \varphi'(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)| dx = \frac{1}{k} \|\varphi'\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

d.h. $T_{f_k} \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Somit konvergieren auch alle Ableitungen gegen 0:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} T_{f_k} = T_{f_k^{(j)}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

2) Multiplikation:

Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$(fT)[\varphi] = T[f\varphi]$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} (f\delta)[\varphi] &= \delta[f\varphi] = f(0)\varphi(0) = f(0)\delta[\varphi] \\ \implies f\delta &= f(0)\delta \end{aligned}$$

3) Faltung:

Für $T \in \mathcal{D}' := \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$(T * g)(x) = T[(\check{g})_x].$$

Dabei bedeutet $\check{g}(y) = g(-y)$, $g_x(y) = g(y-x)$ und daher $(\check{g})_x(y) = g(x-y)$.

Beispiele:

- (i) Sei $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wir erwarten, dass dann $T_f * g = f * g$ gilt. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} (T_f * g)(x) &= T_f[(\check{g})_x] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\check{g})_x(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = (f * g)(x). \end{aligned}$$

- (ii) Wir betrachten $T = \delta_a$ mit $\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$. Für $g \in \mathcal{D}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (\delta_a * g)(x) &= \delta_a[(\check{g})_x] = (\check{g})_x(a) \\ &= \check{g}(a-x) = g(x-a). \end{aligned}$$

Satz 2.2.1 Sei $T \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}$. Dann gilt $T * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(T * g) = (\partial_i T) * g = T * \partial_i g,$$

wobei ∂_i die partielle Ableitung in Richtung des Einheitsvektors e_i bezeichnet.

Beweis: Sei $h \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Da T linear ist, erhalten wir für den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{(T * g)(x + he_i) - (T * g)(x)}{h} &= \frac{1}{h}(T[(\check{g})_{x+he_i}] - T[(\check{g})_x]) \\ &= T \left[\frac{(\check{g})_{x+he_i} - (\check{g})_x}{h} \right]. \end{aligned}$$

Für das Argument von T gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}((\check{g})_{x+he_i} - (\check{g})_x)(y) &= \frac{1}{h}(g(x + he_i - y) - g(x - y)) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} (\partial_i g)(x - y) = ((\partial_i g)^\vee)_x(y) \end{aligned}$$

gleichmäßig in y . Aufgrund der Stetigkeit von T können wir den Limes in das Argument von T ziehen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T * g)(x + he_i) - (T * g)(x)}{h} = T[((\partial_i g)^\vee)_x] = (T * \partial_i g)(x).$$

Also ist $T * g$ differenzierbar und $\frac{\partial}{\partial x_i}(T * g) = T * \partial_i g$. Wegen $\partial_i g \in \mathcal{D}$ können wir diesen Schritt beliebig oft wiederholen und erhalten $T * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin gilt

$$((\partial_i T) * g)(x) = (\partial_i T)[(\check{g})_x] = -T[(\partial_i \check{g})_x] = T[((\partial_i g)^\vee)_x] = (T * \partial_i g)(x).$$

□

Da $T * g$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt, können wir $T * g$ wiederum als Distribution auffassen. Als Analogon zu Satz 2.1.1 erhalten wir folgenden Satz.

Satz 2.2.2 Seien $T \in \mathcal{D}'$ und $g \in \mathcal{D}$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$. Für $\lambda > 0$ sei $g_\lambda(x) = \lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x)$. Dann gilt

$$T * g_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} T \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$\begin{aligned} (T * g_\lambda)[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (T * g_\lambda)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} T[(\check{g}_\lambda)_x] \varphi(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} T[(\check{g}_\lambda)_{hl}] \varphi(hl) = \lim_{h \rightarrow 0} T \left[h^n \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (\check{g}_\lambda)_{hl} \varphi(hl) \right], \end{aligned}$$

denn die Summe ist aufgrund der Kompaktheit von $\text{supp}(\varphi)$ endlich. Da T stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} (T * g_\lambda)[\varphi] &= T \left[\lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (\check{g}_\lambda)_{hl} \varphi(hl) \right] = T \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\check{g}_\lambda)_x \varphi(x) dx \right] \\ &= T \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\check{g}_\lambda)(y - x) \varphi(x) dx \right] = T[\check{g}_\lambda * \varphi]. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.1.1 konvergiert $\check{g}_\lambda * \varphi$ für $\lambda \rightarrow 0$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$ gegen φ . Wegen $g_\lambda, \varphi \in \mathcal{D}$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig und wir erhalten

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (T * g_\lambda)[\varphi] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T[\check{g}_\lambda * \varphi] = T[\lim_{\lambda \rightarrow 0} \check{g}_\lambda * \varphi] = T[\varphi].$$

□

Wir versuchen nun die Fourier-Transformation auf die Distributionen zu übertragen. Der Versuch

$$\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}] \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}$$

scheitert an $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}$. Dieses Problem werden wir lösen, indem wir den Raum der Testfunktionen geeignet erweitern. Dazu betrachten wir den Raum der Schwartzschen Funktionen

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\},$$

dessen Elemente auch schnell fallende Funktionen heißen, da sie, sowie ihre Ableitungen, im Unendlichen schneller abfallen als alle Polynome. Offensichtlich gilt $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Eine Folge $(\varphi_k) \subset \mathcal{S}$ konvergiert, falls

$$\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi \iff \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (\varphi_k - \varphi)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ auch im topologischen Sinn gilt. Dazu müssen wir zeigen, dass die Einbettung $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}, i(\varphi) = \varphi$ stetig ist. Sei $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}$ eine Folge mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in \mathcal{D} . Dann gilt $D^\beta(\varphi_k - \varphi) \rightarrow 0$ glm. in einem Kompaktum und somit $\sup |x^\alpha D^\beta(\varphi_k - \varphi)| \rightarrow 0$, also $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in \mathcal{S} . Es gilt also $i(\varphi_k) \rightarrow i(\varphi)$ und das liefert die Stetigkeit von i .

Definition 2.2.2 *Mit \mathcal{S}' bezeichnen wir den Raum der linearen, stetigen Funktionale über \mathcal{S} mit punktweiser Konvergenz. Die Elemente von \mathcal{S}' heißen temperierte Distributionen.*

Sei $T \in \mathcal{S}'$, also $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wegen $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ können wir T zu einer Abbildung $T|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ einschränken. Offensichtlich gilt $T|_{\mathcal{D}} = T \circ i$ und somit ist $T|_{\mathcal{D}}$ stetig. Indem wir $T|_{\mathcal{D}}$ mit T identifizieren, können wir T als Element von \mathcal{D}' auffassen und erhalten

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

Diese Beziehung gilt auch im topologischen Sinn, denn jede in \mathcal{S}' konvergente Folge konvergiert auch in \mathcal{D}' : Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ und $T_k \rightarrow T$ in \mathcal{S}' . Wir haben $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k[\varphi] = T[\varphi]$ zu zeigen. Nach Voraussetzung gilt aber $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k[\varphi] = T[\varphi]$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ und die Behauptung folgt aus $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

Dass \mathcal{S}' eine echte Teilmenge von \mathcal{D}' ist, können wir an folgendem Beispiel erkennen. Wir betrachten die von $f(x) = e^{-|x|^2}$ erzeugte Distribution T_f . Da f lokal integrierbar ist, gilt $T_f \in \mathcal{D}'$. Für $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ erhalten wir

$$T_f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} dx = \infty.$$

Somit haben wir $T_f \notin \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}' \neq \mathcal{D}'$.

Wir können nun die Fourier-Transformation für temperierte Distributionen definieren.

Definition 2.2.3 Sei $T \in \mathcal{S}'$. Wir definieren

$$\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}] \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Diese Fourier-Transformation ist wohldefiniert, da mit φ auch $\hat{\varphi}$ in \mathcal{S} liegt (siehe Aufgabe 5). Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiele: 1) Wir betrachten die konstante Funktion $f \equiv 1$. Offensichtlich gilt $f \in \mathcal{S}'$ und wir können die Fourier-Transformierte berechnen:

$$\hat{f}[\varphi] = f[\hat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)dx.$$

Die Fourier'sche Inversionsformel (2.13) liefert $\varphi(0) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{\varphi}(\xi)d\xi$. Somit erhalten wir

$$\hat{f}[\varphi] = (2\pi)^{n/2}\varphi(0) = (2\pi)^{n/2}\delta[\varphi]$$

bzw.

$$\delta = (2\pi)^{-n/2}\hat{f}.$$

wenden wir die Fourier'sche Inversionsformel an, so folgt mit $\hat{\hat{f}} = \tilde{f}$

$$\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}.$$

Für die δ -Distribution erhalten wir eine Integraldarstellung, indem wir für \hat{f} das Fourierintegral einsetzen:

$$\delta(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Dieses eigentlich nicht existierende Integral ist im Sinn von \mathcal{S}' zu verstehen. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 1$ und setzen für $a > 0$

$$\begin{aligned} \delta^a(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-ix\xi} dx = \frac{a}{-i\xi 2\pi a} (e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}) \\ &= a\pi^{-1} \operatorname{sinc}(\xi a). \end{aligned}$$

Dann konvergiert δ^a in \mathcal{S}' gegen δ , d.h.:

$$\delta^a[\varphi] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \delta[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

2) Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ setzen wir

$$T[\varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Wir zeigen zunächst, dass dieses Integral überhaupt existiert:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{1}{x} dx = \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \end{aligned}$$

denn der Integrand konvergiert für $x \rightarrow 0$ gegen $\varphi'(0)$ und ist deshalb beschränkt. Wir nennen das Integral den Cauchy'schen Hauptwert und schreiben

$$\oint \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Man kann zeigen, dass T stetig ist, also $T \in \mathcal{S}'$. Wir bezeichnen diese Distribution auch mit $T = \frac{1}{x}$ und berechnen ihre Fourier-Transformierte. Dazu definieren wir f_ε durch

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } |x| > \varepsilon \\ 0 & \text{falls } |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

und erhalten (siehe Aufgabe 6)

$$\begin{aligned} \hat{T}[\varphi] &= T[\hat{\varphi}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \hat{\varphi}(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{f}_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \\ &= -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\hat{T}(\xi) = \left(\frac{1}{x}\right)^\wedge(\xi) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(\xi).$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definieren wir die Hilberttransformation durch

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x} * f.$$

Mit dem Faltungssatz (2.1.1) lässt sich die Fourier-Transformierte $(Hf)^\wedge$ leicht bestimmen:

$$(Hf)^\wedge(\xi) = \frac{1}{\pi} (2\pi)^{1/2} \left(\frac{1}{x}\right)^\wedge(\xi) \hat{f}(\xi) \quad (2.15)$$

$$= -i \text{sign}(\xi) \hat{f}(\xi). \quad (2.16)$$

Die Hilberttransformation vereinfacht sich also im Fourierraum zu einer Multiplikation mit der Vorzeichenfunktion. Wir versuchen die Hilberttransformation auf $L_2(\mathbb{R})$ zu erweitern. Für $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|(Hf)^\wedge\|_2 = \|Hf\|_2. \quad (2.17)$$

Sei nun $f \in L_2(\mathbb{R})$ und $f_k \in \mathcal{S}$ mit $f_k \rightarrow f$ in $L_2(\mathbb{R})$. Aufgrund von Gleichung (2.17) konvergiert auch (Hf_k) in $L_2(\mathbb{R})$ und wir setzen

$$Hf := \lim_{k \rightarrow \infty} Hf_k.$$

Die Stetigkeit des Skalarprodukts liefert $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$. Wir haben also H zu einer Isometrie auf $L_2(\mathbb{R})$ fortgesetzt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts gehen wir noch kurz auf Fourier-Reihen ein. Ist f 2π -periodisch, so heisst

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikx}$$

die Fourier-Reihe von f . Die Fourier-Koeffizienten f_k sind durch

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

gegeben. Dass die Reihe überhaupt konvergiert ist zunächst nicht offensichtlich und im Allgemeinen auch nicht richtig. Der folgende Satz liefert ein Konvergenzkriterium.

Satz 2.2.3 *Sei $f \in L_2(-\pi, \pi)$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe in $L_2(-\pi, \pi)$.*

Beweis: Wir führen hier nur eine Beweisskizze. Für Details siehe [1, S.196]. Für $K \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^K f_k e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y) dy e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-K}^K e^{ik(x-y)} f(y) dy. \end{aligned}$$

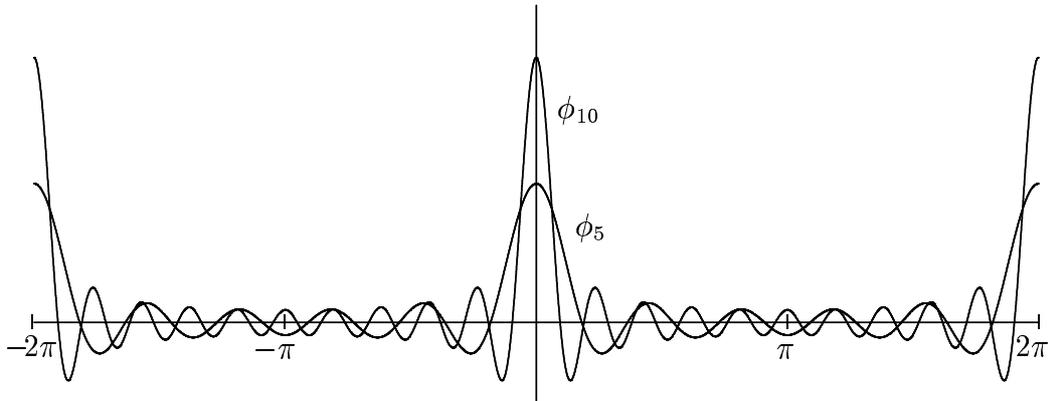


Abbildung 2.1: Die Dirichlet-Kerne ϕ_5 und ϕ_{10} . Für große K ist ϕ_K hoch oszillierend mit einem gegen Unendlich gehenden Maximum in 0.

Für $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ definieren wir den Dirichlet-Kern durch

$$\begin{aligned}
 \phi_K(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K e^{ikz} = \frac{1}{2\pi} e^{-iKz} \sum_{k=0}^{2K} e^{ikz} \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-iKz} \frac{1 - e^{i(2K+1)z}}{1 - e^{iz}} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iKz} - e^{i(K+1)z}}{1 - e^{iz}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i(K+\frac{1}{2})z} - e^{i(K+\frac{1}{2})z}}{e^{-i\frac{z}{2}} - e^{i\frac{z}{2}}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((K + \frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}.
 \end{aligned}$$

Der Dirichlet-Kern ist eine approximative Eins der Faltung auf $L_2(-\pi, \pi)$ (vgl. Abbildung 2.1). Durch Einsetzen in die Fourier-Reihe erhalten wir

$$\sum_{k=-K}^K \hat{f}_k e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_K(x-y) f(y) dy \xrightarrow{K \rightarrow \infty} f(x)$$

□

Sei $f \in L_2(-\pi, \pi)$. Wir setzen f zu einer 2π -periodischen Funktion auf ganz \mathbb{R} fort. Dann ist $T_f \in \mathcal{S}'$ und wir können die Fourier-Transformierte

bilden:

$$\begin{aligned}\hat{T}_f[\varphi] &= T_f[\hat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\varphi}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikx} \hat{\varphi}(x) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{\varphi}(x) dx \\ &= (2\pi)^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \varphi(k).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\hat{f} = (2\pi)^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta_k.$$

2.3 Die Helmholtzgleichung

Als Helmholtzgleichung bezeichnet man die elliptische Differentialgleichung

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.18)$$

mit einer reellen Zahl $k > 0$. Wir betrachten nur den Fall $n = 3$. Dann besitzt (2.18) für $x \neq 0$ die Fundamentallösung

$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|},$$

d.h. G erfüllt die homogene Gleichung (siehe Aufgabe 11):

$$\Delta G + k^2 G = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (2.19)$$

Um nun die Helmholtzgleichung zu lösen benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Analysis. Wir nennen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, falls Ω offen und beschränkt ist und die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes zuläßt. Wir setzen $C^n(\bar{\Omega}) = \{f \in C^n(\Omega) : D^\alpha f \text{ stetig fortsetzbar auf } \bar{\Omega} \ \forall |\alpha| \leq n\}$. Dann gilt für $f \in C^1(\bar{\Omega})$ der Gaußsche Integralsatz:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i d\sigma. \quad (2.20)$$

Dabei bezeichnet $\nu = \nu(x) \in S^{n-1}$ den äußeren Normalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt x . Sind $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, so erhalten wir mit $f = uv$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} uv \nu_i d\sigma &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (uv) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Das ergibt folgende Regel zur partiellen Integration

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i d\sigma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \quad (2.21)$$

Ist sogar $u \in C^2(\bar{\Omega})$, so können wir u durch $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ersetzen:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Durch Summation über i entsteht die 1. Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (2.22)$$

mit der Richtungsableitung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \nu \cdot \nabla u$$

von u in Richtung ν . Sind $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, so können wir u und v vertauschen und erhalten durch Subtraktion die 2. Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (\Delta u v - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (2.23)$$

Mit diesen Mitteln können wir den folgenden Satz beweisen, mit dem wir später die Eindeutigkeit der Lösung zeigen werden.

Satz 2.3.1 Sei Ω ein Normalgebiet und $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt für $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} \left(G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y) \\ &\quad - \int_{\Omega} G(x-y) (\Delta u + k^2 u)(y) dy. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $x \in \Omega$, $B_{\rho}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < \rho\}$ und $\rho > 0$ so klein, dass $\overline{B_{\rho}(x)} \subset \Omega$ gilt. Wir setzen $\Omega_{\rho} := \Omega \setminus \overline{B_{\rho}(x)}$. Dann ist $v(y) = G(x-y) \in C^2(\Omega_{\rho})$ und wir können die 2. Greensche Formel auf die Funktionen $u(y)$ und $v(y)$

anwenden:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\rho} (\Delta u(y) + k^2 u(y)) G(x - y) dy \\
&= \int_{\Omega_\rho} ((\Delta u(y) + k^2 u(y)) G(x - y) - u(y) \underbrace{(\Delta_y G(x - y) + k^2 G(x - y))}_{=0 \text{ nach (2.19)}}) dy \\
&= \int_{\Omega_\rho} (\Delta u(y) G(x - y) - u(y) \Delta_y G(x - y)) dy \\
&= \int_{\partial\Omega_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x - y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y) \right) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x - y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y) \right) d\sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial B_\rho(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x - y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y) \right) d\sigma(y). \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Das Minuszeichen vor dem letzten Integral entsteht, da ν hier die äußere Normale der Kugel $B_\rho(x)$ und damit die innere Normale an Ω_ρ ist. Wir untersuchen nun das Verhalten dieses Integrals beim Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$. Mit $\frac{\partial|x|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|}$ und $\nu = \frac{y-x}{|y-x|}$ ergibt sich

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi} \left(-\frac{x_i}{|x|^3} + ik \frac{x_i}{|x|^2} \right) \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y) &= \frac{y - x}{|y - x|} \cdot \nabla_y G(x - y) \\
&= \frac{e^{ik|y-x|}}{4\pi} \frac{y - x}{|y - x|} \cdot \left(\frac{x - y}{|x - y|^3} - ik \frac{x - y}{|x - y|^2} \right) \\
&= \frac{e^{ik|y-x|}}{4\pi} \left(-\frac{1}{|x - y|^2} + \frac{ik}{|x - y|} \right). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Für $|y - x| = \rho$ gilt somit

$$\begin{aligned}
|G(x - y)| &\leq \frac{1}{4\pi\rho} \\
\left| \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y) \right| &\leq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{k}{\rho} \right) \leq \frac{C}{\rho^2}
\end{aligned}$$

für genügend kleine ρ und eine geeignete Konstante C . Mit $M = \sup_{\Omega} |\nabla u|$ folgen die Abschätzungen

$$\left| \int_{|y-x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x-y) d\sigma(y) \right| \leq 4\pi\rho^2 M \frac{1}{4\pi\rho} = M\rho$$

und wegen $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|$

$$\left| \int_{|y-x|=\rho} (u(x) - u(y)) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) d\sigma(y) \right| \leq 4\pi\rho^2 M\rho \frac{C}{\rho^2} = 4\pi MC\rho.$$

Die beiden Integrale verschwinden also für $\rho \rightarrow 0$ und es folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|y-x|=\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x-y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y) \\ &= -u(x) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|y-x|=\rho} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (2.24) durch den Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta u(y) + k^2 u(y)) G(x-y) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x-y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y) \\ & \quad + u(x) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|y-x|=\rho} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Wir haben also nur noch zu zeigen, dass das letzte Integral gegen -1 konvergiert. Aus (2.26) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|y-x|=\rho} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) d\sigma(y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|y-x|=\rho} \frac{e^{ik|y-x|}}{4\pi} \left(\frac{-1}{|x-y|^2} + \frac{ik}{|x-y|} \right) d\sigma(y) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi} \left(-\frac{1}{\rho^2} + \frac{ik}{\rho} \right) 4\pi\rho^2 = -1. \end{aligned}$$

□

Eine Lösung von (2.18) erhalten wir durch Faltung von f mit der Fundamentallösung G .

Satz 2.3.2 Sei Ω ein Normalgebiet und $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x-y)f(y)dy.$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy$$

und

$$-\Delta u - k^2 u = f.$$

Beweis: Für $x \notin \Omega$ können wir u problemlos unter dem Integralzeichen differenzieren. Sei $x \in \Omega$. Mit $z = x - y$ und $\Omega_x = x - \Omega = \{x - y : y \in \Omega\}$ erhalten wir

$$u(x) = \int_{\Omega_x} G(z)f(x-z)dz.$$

Dann ist der Integrand nach x differenzierbar und die Ableitung läßt sich durch eine von x unabhängige integrierbare Majorante abschätzen

$$\left| G(z) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-z) \right| \leq MG(z).$$

Daher können wir u unter dem Integralzeichen differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \int_{\Omega_x} G(z) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z)dz \\ &= - \int_{\Omega_x} G(z) \frac{\partial f}{\partial z_i}(x-z)dz \\ &= \int_{\Omega_x} \frac{\partial G}{\partial z_i}(z)f(x-z)dz \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy. \end{aligned}$$

Wir betrachten die vorletzte Darstellung

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_x} \frac{\partial G}{\partial z_i}(z) f(x-z) dz.$$

Diesen Ausdruck können wir mit demselben Argument wie oben unter dem Integralzeichen differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \int_{\Omega_x} \frac{\partial G}{\partial z_i}(z) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z) dz \\ &= - \int_{\Omega_x} \frac{\partial G}{\partial z_i}(z) \frac{\partial f}{\partial z_i}(x-z) dz. \end{aligned}$$

Durch Summation über i entsteht

$$\Delta u(x) = - \int_{\Omega_x} \nabla G(z) \cdot \nabla_z f(x-z) dz.$$

Um die 1. Greensche Formel anwenden zu können, schneiden wir eine kleine Kugel aus Ω_x heraus und setzen $\Omega_{\rho,x} = \Omega_x \setminus \overline{B_\rho(0)}$. Dann folgt aus (2.22)

$$\begin{aligned} &\Delta u(x) + k^2 u(x) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(- \int_{\Omega_{\rho,x}} \nabla G(z) \cdot \nabla_z f(x-z) dz + k^2 \int_{\Omega_{\rho,x}} G(z) f(x-z) dz \right) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega_{\rho,x}} (\Delta G(z) + k^2 G(z)) f(x-z) dz + \int_{|z|=\rho} \frac{\partial G}{\partial \nu}(z) f(x-z) dz \right) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

denn das erste Integral verschwindet wegen (2.19) und das zweite Integral konvergiert wie im Beweis von Satz 2.3.1 gegen $-f(x)$. \square

Wir haben also eine Lösung der Helmholtzgleichung gefunden und beschäftigen uns nun mit der Frage, wann diese Lösung eindeutig ist. Das Dirichletproblem ist im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar, denn setzen wir $\Omega = B_{\pi l/k}(0)$ mit einem $l \in \mathbb{N}$, so ist nach (2.19)

$$\operatorname{Im} G(x) = \operatorname{Im} \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} = \frac{\sin k|x|}{4\pi|x|}$$

eine Lösung der homogenen Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in Ω und es gilt $\operatorname{Im} G(x) = 0$ auf $\partial\Omega$. Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, fordern wir, dass u die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ für } |x| \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ für } |x| \rightarrow \infty$$

erfüllt. Dabei ist $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla$ die Ableitung in der radialen Richtung $r = \frac{x}{|x|}$.

Satz 2.3.3 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es genau eine Lösung von

$$-\Delta u - k^2 u = f,$$

die die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (2.27) erfüllt.

Beweis: Nach Satz 2.3.2 ist $u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)f(y)dy$ eine Lösung. Wir zeigen zunächst, dass u die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Dazu sei $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$ und $|x| > R$. Für $|y| \leq R$ gilt dann $|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - R$ und somit

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|} dy \leq \frac{R^3 \|f\|_\infty}{3|x-R|} \\ &= O\left(\frac{1}{|x|}\right) \end{aligned}$$

und nach (2.26)

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)(x) \right| \\ &\leq \int_{|y| \leq R} \left| \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x G(x-y) - ikG(x-y)\right) f(y) \right| dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \left(-\frac{x-y}{|x-y|^3} + ik\frac{x-y}{|x-y|^2}\right) - \frac{ik}{|x-y|} \right| |f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \left| \frac{ik}{|x-y|} \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} - 1\right) \right| |f(y)| dy \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x-y}{|x-y|^3} \right| |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Aus der Fernfeldapproximation $|x - y| = |x| - \frac{x}{|x|} \cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ folgt durch Division durch $|x - y|$

$$\frac{|x|^2 - x \cdot y}{|x||x - y|} = 1 + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad (2.28)$$

und wir erhalten

$$\left| \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) (x) \right| = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an, dass u eine Lösung der homogenen Gleichung $-\Delta u - k^2 u = 0$ sei und die Ausstrahlungsbedingung erfülle. Wir müssen dann $u \equiv 0$ zeigen. Sei $x \in \mathbb{R}^3$ fest und $R > |x|$. Aus Satz 2.3.1 folgt mit $\Omega = B_R(0)$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{|y|=R} \left(G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(y) + \frac{y}{|y|} \cdot \left(\frac{y-x}{|x-y|^2} + ik \frac{x-y}{|x-y|} \right) u(y) \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(y) - iku(y) \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d\sigma(y) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \frac{y}{|y|} \cdot \frac{y-x}{|x-y|^2} u(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d\sigma(y) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \left(\frac{y}{|y|} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} + 1 \right) iku(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Da u die Ausstrahlungsbedingung erfüllt, folgt aus (2.28), dass sich die Integranden wie $O(|y|^{-3})$ bzw. wie $O(|y|^{-4})$ verhalten. Somit gilt

$$|u(x)| \leq R^2 O\left(\frac{1}{R^3}\right) + R^2 O\left(\frac{1}{R^3}\right) + R^2 O\left(\frac{1}{R^4}\right) = O\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

und es folgt $u(x) = 0$. □

Die Fundamentallösung $G(x)$ ist lokal integrierbar und verschwindet im Unendlichen. Daher können wir sie als temperierte Distribution auffassen,

also $G \in \mathcal{S}'$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (-\Delta - k^2)G[\varphi] &= G[(-\Delta - k^2)\varphi] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} G(x)(-\Delta - k^2)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Sei φ Lösung der Gleichung $-\Delta\varphi - k^2\varphi = f$. Da φ die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt, ist φ nach Satz 2.3.3 die eindeutig bestimmte Lösung und es gilt:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)f(y)dy$$

sowie

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^3} G(y)f(y)dy.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} (-\Delta - k^2)G[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}^3} G(x)(-\Delta - k^2)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} G(x)f(x)dx = \varphi(0) = \delta[\varphi], \end{aligned}$$

also

$$(-\Delta - k^2)G = \delta. \quad (2.29)$$

Satz 2.3.4 *Es gilt $G \in \mathcal{S}'$ und $(-\Delta - k^2)G = \delta$.*

Beweis: s.o. □

Sei $u(x) = \int G(x-y)f(y)dy$ die Lösung der Helmholtzgleichung. Fassen wir G als temperierte Distribution auf, so können wir Integration und Differentiation vertauschen:

$$(-\Delta - k^2)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta - k^2)G(x-y)f(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-y) f(y) dy = f(x).$$

Da G eine temperierte Distribution ist, können wir \hat{G} bilden. Dazu wenden wir die Fourier-Transformation auf Gleichung (2.29) an:

$$\begin{aligned} & -(\Delta G)^\wedge(\xi) - k^2 \hat{G}(\xi) = \hat{\delta} \\ \implies & |\xi|^2 \hat{G}(\xi) - k^2 \hat{G}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \\ \implies & \hat{G}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \frac{1}{|\xi|^2 - k^2}. \end{aligned}$$

Auf diese Gleichung wenden wir die Fouriersche Inversionsformel an, obwohl das Integral eigentlich nicht existiert

$$G(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^2 - k^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Der folgende Satz sagt uns wie wir dieses Integral zu verstehen haben.

Satz 2.3.5 *Es gilt*

$$G(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix \cdot \xi}}{|\xi|^2 - k^2 - i\varepsilon} d\xi.$$

Beweis: Wir beweisen den Satz nur für $n = 1$. In diesem Fall ist $G(x) = \frac{i}{2k} e^{ik|x|}$ und wir können $x > 0$ annehmen, da beide Seiten gerade sind. Wir berechnen das Integral mit Hilfe des Residuensatzes. Dazu bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nenners mit Hilfe der Taylorreihe $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$:

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} &= \pm \sqrt{k^2 + i\varepsilon} = \pm k \sqrt{1 + \frac{i\varepsilon}{k^2}} \\ &= \pm k \left(1 + \frac{i\varepsilon}{2k^2} + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= \pm \left(k + i \frac{\varepsilon}{2k} + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned}$$

Sei K_R der Rand des Halbkreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Für hinreichend kleine ε und große R liegt ξ_+ innerhalb und ξ_- ausserhalb von $K_R \cup [-R, R]$ und der Residuensatz liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - k^2 - i\varepsilon} d\xi + \int_{K_R} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - k^2 - i\varepsilon} d\xi &= 2\pi i \operatorname{Res}_{\xi=\xi_+} \frac{e^{ix\xi}}{(\xi - \xi_+)(\xi - \xi_-)} \\ &= 2\pi i \frac{e^{ix\xi_+}}{(\xi_+ - \xi_-)}. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ verschwindet das Integral entlang K_R und wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - k^2 - i\varepsilon} d\xi = 2\pi i \frac{e^{ix\xi_+}}{(\xi_+ - \xi_-)}$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - k^2 - i\varepsilon} d\xi = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{ix\xi_+}}{(\xi_+ - \xi_-)} = i \frac{e^{ikx}}{2k}.$$

□

2.4 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2(x)\Delta u(x, t)$$

beschreibt das Ausbreiten einer Longitudinalwelle in einem Medium mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(x)$. Dabei ist $u(x, t)$ der Druck zur Zeit t am Ort x . Die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2(x)\Delta u(x, t) + h(x, t)$$

berücksichtigt zusätzlich noch Quellen h . In der Seismologie ist typischerweise $h(x, t) = \delta(x)f(t)$, d.h. die Quelle ist in einem Punkt lokalisiert. Wir betrachten zunächst nur konstante Ausbreitungsgeschwindigkeiten $c > 0$.

Lemma 2.4.1 Sei $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und $f(t) = \int_{|x| \leq t} h(x, t) dx$. Dann gilt

$$f'(t) = \int_{|x|=t} h(x, t) dx + \int_{|x| \leq t} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dx.$$

Beweis: Wir stellen f mit Hilfe der Heavyside-Funktion H dar:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t - |x|) h(x, t) dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus $H' = \delta$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\delta(t - |x|) h(x, t) dx + H(t - |x|) \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dx) \\ &= \int_{|x|=t} h(x, t) dx + \int_{|x| \leq t} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \end{aligned} \tag{2.30}$$

lösen.

Satz 2.4.1 Sei $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $c > 0$. Dann ist die Lösung der Anfangswertaufgabe (2.30) durch das sphärische Mittel

$$u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} h(x + ct\theta) d\sigma(\theta)$$

gegeben.

Beweis: Offensichtlich ist $u(x, 0) = 0$. Für die Ableitung gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \frac{\partial h}{\partial t}(x + ct\theta) d\sigma(\theta) + \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} h(x + ct\theta) d\sigma(\theta)$$

und somit $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} h(x) d\sigma(\theta) = h(x)$. Wir setzen

$$H(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} h(x + ct\theta) d\sigma(\theta)$$

und leiten H nach t ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) &= \frac{c}{4\pi} \int_{S^2} \theta \cdot \nabla h(x + ct\theta) d\sigma(\theta) && (y = ct\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{|y|=ct} \frac{y}{|y|} \cdot \nabla h(x + y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{|y|=ct} \frac{\partial}{\partial \nu_y} h(x + y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{|y|\leq ct} \Delta_y h(x + y) dy. \end{aligned}$$

Die letzte Umformung folgt aus der 2. Greenschen Formel (2.23) mit $v \equiv 1$. Für die 2. Ableitung ergibt sich aus Lemma 2.4.1

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x, t) = \frac{-2}{4\pi ct^3} \int_{|y|\leq ct} \Delta_y h(x + y) dy + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y|=ct} \Delta_y h(x + y) d\sigma(y).$$

Aus $u(x, t) = tH(x, t)$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 2\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + t\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x, t) \\
&= \frac{2}{4\pi ct^2} \int_{|y|\leq ct} \Delta_y h(x+y) dy - \frac{2}{4\pi ct^2} \int_{|y|\leq ct} \Delta_y h(x+y) dy \\
&\quad + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=ct} \Delta_y h(x+y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=ct} \Delta_x h(x+y) d\sigma(y) \quad (y = ct\theta) \\
&= c^2 \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \Delta_x h(x + ct\theta) d\sigma(\theta) \\
&= c^2 \Delta u(x, t).
\end{aligned}$$

□

Unser Ziel ist es nun die Anfangswertaufgabe der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta u(x, t) + h(x, t) \\
u(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

zu lösen. Der folgende Satz sagt uns wie wir die Lösung aus der Lösung von (2.30) gewinnen können.

Satz 2.4.2 (Duhamel) Sei $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty))$. Sei $\phi^\tau(x, t)$ die Lösung von

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi^\tau}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta \phi^\tau(x, t) \\
\phi^\tau(x, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t}(x, \tau) = h(x, \tau).
\end{aligned}$$

Dann löst $u(x, t) = \int_0^t \phi^\tau(x, t) d\tau$ die Anfangswertaufgabe (2.31)

Beweis: Offensichtlich gilt $u(x, 0) = 0$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \phi^t(x, t) + \int_0^t \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t}(x, t) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t}(x, t) d\tau\end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t}(x, t) \Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2 \phi^\tau}{\partial t^2}(x, t) d\tau \\ &= h(x, t) + c^2 \int_0^t \Delta \phi^\tau(x, t) d\tau \\ &= h(x, t) + c^2 \Delta u(x, t).\end{aligned}$$

□

Satz 2.4.3 Sei $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$. Dann ist u als Lösung der Anfangswertaufgabe (2.31) eindeutig bestimmt und es gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|x-y| \leq ct} \frac{h(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{|x-y|} dy.$$

Beweis: Wir wenden Satz 2.4.1 an, um (2.30) zur Anfangszeit τ zu lösen:

$$\phi^\tau(x, t) = \frac{t - \tau}{4\pi} \int_{S^2} h(x + c(t - \tau)\theta, \tau) d\sigma(\theta).$$

Wir wenden Satz 2.4.2 an und erhalten für u

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^t \phi^\tau(x, t) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) \int_{S^2} h(x + c(t - \tau)\theta, \tau) d\sigma(\theta) d\tau \quad (r = t - \tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^t r \int_{S^2} h(x + cr\theta, t - r) d\sigma(\theta) dr \quad (y = r\theta) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq t} \frac{h(x + cy, t - |y|)}{|y|} dy \quad (z = x + cy) \\
&= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|z-x| \leq ct} \frac{h(z, t - \frac{|z-x|}{c})}{|z-x|} dz.
\end{aligned}$$

□

Die Wellen- und die Helmholtzgleichung stehen in einem engen Zusammenhang. Wir betrachten die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) + h(x, t)$$

mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Diese sind äquivalent zu

$$u(x, t) = 0, \quad t < 0,$$

falls $h(x, t) = 0$, $t < 0$. Wir bilden die inverse Fourier-Transformierte der Lösung u bezüglich der Zeit:

$$U(x, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} u(x, t) dt.$$

Wegen $u(x, t) = 0$ für $t < 0$ genügt es hier über \mathbb{R}_+ zu integrieren. $U(x, \omega)$ erfüllt die fouriertransformierte DGL

$$-\omega^2 U(x, \omega) = c^2 \Delta U(x, \omega) + \tilde{h}(x, \omega).$$

Wir setzen $k = \frac{\omega}{c}$ und erhalten

$$(-\Delta - k^2)U(x, \omega) = \frac{1}{c^2} \tilde{h}(x, \omega),$$

d.h. $U(x, \omega)$ erfüllt die Helmholtzgleichung. Unter Berücksichtigung der Ausstrahlungsbedingung

$$\begin{aligned} U(x, \omega) &= O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial r}(x, \omega) - ikU(x, \omega) &= O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \end{aligned}$$

ist die Lösung durch

$$U(x, \omega) = \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tilde{h}(y, \omega) dy$$

gegeben. $u(x, t)$ ergibt sich aus $U(x, \omega)$ durch Fourier-Transformation:

$$u(x, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} U(x, \omega) d\omega.$$

Wir zeigen nun, dass dieses u die Bedingung $u(x, t) = 0$ für $t < 0$ erfüllt. Dazu nehmen wir an, dass ω eine komplexe Zahl $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ sei. Dann gilt

$$\begin{aligned} U(x, \omega) &\xrightarrow{\omega_2 \rightarrow \infty} 0 \\ e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_1 t} e^{\omega_2 t} &\xrightarrow{\omega_2 \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } t < 0. \end{aligned}$$

Sei $K_R = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = R, \omega_2 > 0\}$. Für $t < 0$ folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{-R}^R e^{-i\omega t} U(x, \omega) d\omega = - \int_{K_R} e^{-i\omega t} U(x, \omega) d\omega \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

und somit $u(x, t) = 0$ für $t < 0$. Die Ausstrahlungsbedingung im Frequenzbereich ist also äquivalent zu $u(x, t) = 0$ für $t < 0$ im Zeitbereich.

Anstatt u aus der Wellengleichung zu berechnen, können wir also auch eine Schar ($\omega \in \mathbb{R}$) von Helmholtzgleichungen lösen. u ist dann die Fourier-Transformation der Lösungen $U(x, \omega)$. Aus numerischer Sicht ist dies effizienter, da die Helmholtzgleichung eine Dimension weniger hat als die Wellengleichung. Auch wenn wir eine Schar von Helmholtzgleichungen lösen müssen, ist diese Methode immer noch schneller.

2.5 Integralgeometrie

2.5.1 Die Radon-Transformation

Die n -dimensionale Radon-Transformation ordnet einer Funktion auf \mathbb{R}^n die Werte ihrer Integrale über alle Hyperebenen des \mathbb{R}^n zu.

Definition 2.5.1 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann ist die Radon-Transformation durch

$$\begin{aligned} (Rf)(\theta, s) &= \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx \\ &= \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(x \cdot \theta - s) ds \end{aligned}$$

definiert.

Die Radon-Transformation ist offensichtlich gerade, d.h. es gilt

$$(Rf)(-\theta, -s) = (Rf)(\theta, s).$$

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } f \subset B_R(0)$. Dann folgt

$$(Rf)(\theta, s) = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy = 0 \quad \text{falls } s > R,$$

denn es ist $|s\theta + y|^2 = s^2 + |y|^2 \geq s^2$. Somit haben wir $(Rf)(\theta, \cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und wir können die Fourier-Transformierte bezüglich des zweiten Arguments bilden. Der folgende Satz liefert einen engen Zusammenhang zwischen $(Rf)^\wedge$ und \hat{f} .

Satz 2.5.1 (Projektionssatz) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$(Rf)^\wedge(\theta, \sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta).$$

Beweis: Durch Einsetzen der Definitionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (Rf)^\wedge(\theta, \sigma) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (Rf)(\theta, s) e^{-is\sigma} ds \\
 &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy e^{-is\sigma} ds \quad (x = s\theta + y \Rightarrow s = x \cdot \theta) \\
 &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \theta \sigma} dx \\
 &= (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta).
 \end{aligned}$$

□

Sei $g \in C_0^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R})$. Dann definieren wir die Rückprojektion R^* durch

$$(R^*g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta).$$

Ist $g(\theta, s) = (Rf)(\theta, s)$, so ist $g(\theta, x \cdot \theta)$ der Wert des Integrals von f über die Hyperebene mit Normalenvektor θ durch x und $(R^*g)(x)$ ist das Integral über alle Ebenen durch x . Daher könnten wir erwarten, dass R^*Rf eine Approximation für f ist.

Satz 2.5.2 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$(R^*Rf)(x) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|} dy = |S^{n-2}| \left(\frac{1}{|x|} * f \right).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (R^*Rf)(x) &= \int_{S^{n-1}} (Rf)(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta) \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x \cdot \theta \theta + y) dy d\sigma(\theta).
 \end{aligned}$$

Wir führen die orthogonale Projektion E_θ von \mathbb{R}^n auf θ^\perp ein:

$$E_\theta x = x - x \cdot \theta \theta \in \theta^\perp.$$

Wegen $E_\theta x \in \theta^\perp$ können wir im inneren Integral y durch $y + E_\theta x$ ersetzen.

$$\begin{aligned} (R^* R f)(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(\underbrace{x \cdot \theta \theta + E_\theta x + y}_{=x}) dy d\sigma(\theta) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x + y) dy d\sigma(\theta). \end{aligned}$$

Um den Beweis zu beenden, müssen wir noch die Integralformel

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(y) dy d\sigma(\theta) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|} f(y) dy \quad (2.32)$$

zeigen. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 2$. Durch Einführung der Polarkoordinaten $y = r\theta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|} f(y) dy &= \int_{S^1} \int_0^\infty f(r\theta) dr d\sigma(\theta) \\ &= \int_{S^1} \int_{-\infty}^0 f(r\theta) dr d\sigma(\theta) \end{aligned}$$

und mit $|S^0| = 2$ folgt

$$\begin{aligned} |S^0| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|} f(y) dy &= \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} f(r\theta) dr d\sigma(\theta) \quad (z = r\theta) \\ &= \int_{S^1} \int_{\langle \theta \rangle} f(z) dz d\sigma(\theta) \quad (\theta \rightarrow \theta_\perp) \\ &= \int_{S^1} \int_{\theta^\perp} f(z) dz d\sigma(\theta). \end{aligned}$$

□

Sei $g = Rf$ und Ag eine Rekonstruktion von f , d.h. $f \approx Ag$ beziehungsweise $A \approx R^{-1}$. Wir betrachten ein Punktobjekt $f(x) = \delta(x - x_0) = \delta_{x_0}(x)$. Dann nennen wir $P(x) = AR\delta_{x_0}(x)$ die Point Spread Function von A . P ist

also das Ergebnis der Rekonstruktion eines einzelnen Punktes. Für $A = R^*$ erhalten wir somit die Point Spread Function

$$\begin{aligned} P(x) &= (R^* R \delta_{x_0})(x) = |S^{n-2}| \left(\frac{1}{|x|} * \delta_{x_0} \right)(x) \\ &= |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|} \delta(y-x_0) dy \\ &= |S^{n-2}| \frac{1}{|x-x_0|}. \end{aligned}$$

P ist also wie δ_{x_0} um den Punkt x_0 konzentriert. Allerdings gilt $\text{supp } P = \mathbb{R}^n$ und somit ist $R^* R f$ eine „verschmierte“ Version von f . Eine exakte Inversion von R liefert der folgende Satz.

Satz 2.5.3 (Radonsche Inversionsformel) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g = Rf$. Dann ist

$$f = R^* K g,$$

wobei K für $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ durch

$$(Kh)^\wedge(\sigma) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} |\sigma|^{n-1} \hat{h}(\sigma)$$

gegeben ist.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der Fourierschen Inversionsformel (2.13) und des Projektionssatzes 2.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (\xi = \sigma\theta) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \sigma^{n-1} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{f}(\sigma\theta) d\sigma(\theta) d\sigma \\ &= (2\pi)^{1/2-n} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \sigma^{n-1} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{g}(\theta, \sigma) d\sigma(\theta) d\sigma \quad (\theta \rightarrow -\theta, \sigma \rightarrow -\sigma) \\ &= (2\pi)^{1/2-n} \int_{-\infty}^0 \int_{S^{n-1}} (-\sigma)^{n-1} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{g}(\theta, \sigma) d\sigma(\theta) d\sigma. \end{aligned}$$

Durch Addition der letzten beiden Zeilen ergibt sich

$$\begin{aligned}
2f(x) &= (2\pi)^{1/2-n} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} |\sigma|^{n-1} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{g}(\theta, \sigma) d\sigma(\theta) d\sigma \\
&= 2(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} e^{i\sigma x \cdot \theta} (Kg(\theta, \cdot))^{\wedge}(\sigma) d\sigma(\theta) d\sigma \\
&= 2 \int_{S^{n-1}} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x \cdot \theta} (Kg(\theta, \cdot))^{\wedge}(\sigma) d\sigma d\sigma(\theta) \\
&= 2 \int_{S^{n-1}} Kg(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta) \\
&= 2(R^*Kg)(x).
\end{aligned}$$

□

Wir untersuchen die Radonsche Inversionsformel für $n = 2, 3$ etwas genauer. Sei zunächst $n = 3$. Dann folgt aus (2.7)

$$\begin{aligned}
(Kg(\theta, \cdot))^{\wedge}(\sigma) &= \frac{1}{8\pi^2} \sigma^2 \hat{g}(\theta, \sigma) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\theta, \cdot) \right)^{\wedge}(\sigma)
\end{aligned}$$

und die Fouriersche Inversionsformel liefert

$$Kg(\theta, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\theta, s).$$

Die Radonsche Inversionsformel vereinfacht sich daher zu (Radon 1917)

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta). \quad (2.33)$$

Für $n = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(Kg(\theta, \cdot))^{\wedge}(\sigma) &= \frac{1}{4\pi} |\sigma| \hat{g}(\theta, \sigma) \\
&= \frac{1}{4\pi} \text{sign}(\sigma) \sigma \hat{g}(\theta, \sigma) \\
&= \frac{1}{4\pi i} \text{sign}(\sigma) \left(\frac{\partial g}{\partial s}(\theta, \cdot) \right)^{\wedge}(\sigma).
\end{aligned}$$

Im Unterschied zum Fall $n = 3$ haben wir hier den Faktor $\text{sign}(\sigma)$, den wir mit Hilfe der Hilbert-Transformation (2.15) eliminieren:

$$(Kg(\theta, \cdot))^{\wedge}(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \left(H \frac{\partial g}{\partial s}(\theta, \cdot) \right)^{\wedge}(\sigma).$$

Somit erhalten wir

$$Kg(\theta, s) = \frac{1}{4\pi} H \frac{\partial g}{\partial s}(\theta, s)$$

und (Radon 1917)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} \left(H \frac{\partial g}{\partial s}(\theta, \cdot) \right) (x \cdot \theta) d\sigma(\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{\partial g}{\partial s}(\theta, s)}{x \cdot \theta - s} ds d\sigma(\theta). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Wir können R als Operator $R : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ auffassen. In $L_2(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ führen wir das Skalarprodukt

$$(g_1, g_2) = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g_1(\theta, s) \bar{g}_2(\theta, s) ds d\sigma(\theta)$$

ein. Der folgende Satz liefert dann, dass die Rückprojektion R^* der zu R adjungierte Operator ist. Dies rechtfertigt im Nachhinein die Bezeichnung R^* .

Satz 2.5.4 *Seien $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_0^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R})$. Dann ist*

$$(Rf, g) = (f, R^*g). \quad (2.35)$$

Das Skalarprodukt auf der linken Seite ist in $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ das auf der rechten Seite in \mathbb{R}^n zu bilden.

Beweis: Durch einfaches Nachrechnen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (Rf, g) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (Rf)(\theta, s) \bar{g}(\theta, s) ds d\sigma(\theta) \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} f(\underbrace{s\theta + y}_{=x}) \bar{g}(\theta, s) dy ds d\sigma(\theta) \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(\theta, x \cdot \theta) dx d\sigma(\theta) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{S^{n-1}} \bar{g}(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\overline{R^*g})(x) dx = (f, R^*g).
 \end{aligned}$$

□

2.5.2 Die Röntgen-Transformation

Die Röntgen-Transformation ordnet einer Funktion f die Werte ihrer Integrale entlang aller Geraden zu. Diese Geraden werden durch einen Richtungsvektor θ und einen Punkt x auf der Geraden charakterisiert. Den Punkt x wählen wir so, dass er in θ^\perp liegt.

Definition 2.5.2 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$ und $x \in \theta^\perp$. Dann ist die Röntgen-Transformation durch

$$(Pf)(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt$$

definiert.

Bemerkung: Für $n = 2$ ist die Röntgen-Transformation bis auf die Notation mit der Radon-Transformation identisch:

$$\begin{aligned} (Rf)(\theta, s) &= \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \\ &= (Pf)(\theta^\perp, s\theta). \end{aligned}$$

Sei $\xi \in \theta^\perp$. Dann können wir die Fourier-Transformierte $(Pf)^\wedge(\theta, \xi) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-ix \cdot \xi} (Pf)(\theta, x) dx$ bezüglich des zweiten Arguments bilden und erhalten den Projektionssatz:

Satz 2.5.5 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\xi \in \theta^\perp$

$$(Pf)^\wedge(\theta, \xi) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\xi).$$

Beweis: Für $\xi \in \theta^\perp$ gilt

$$\begin{aligned} (Pf)^\wedge(\theta, \xi) &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-ix \cdot \xi} (Pf)(\theta, x) dx \\ &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt dx \quad (y = x + t\theta) \\ &= (2\pi)^{1/2} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \\ &= (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Beim vorletzten Gleichheitszeichen haben wir $y \cdot \xi = x \cdot \xi + t\theta \cdot \xi = x \cdot \xi$ ausgenutzt. \square

Als direkte Konsequenz des Projektionssatzes erhalten wir

Satz 2.5.6 *Seien $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $x \in \theta^\perp$*

$$(P(f * g))(\theta, x) = ((Pf)(\theta, \cdot) * (Pg)(\theta, \cdot))(x).$$

Beweis: Für $\xi \in \theta^\perp$ folgt aus Satz 2.5.5 und dem Projektionssatz (2.1.1)

$$\begin{aligned} (P(f * g))^\wedge(\theta, \xi) &= (2\pi)^{1/2} (f * g)^\wedge(\xi) \\ &= (2\pi)^{(n+1)/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \\ &= (2\pi)^{(n-1)/2} (Pf)^\wedge(\theta, \xi) (Pg)^\wedge(\theta, \xi) \\ &= ((Pf)(\theta, \cdot) * (Pg)(\theta, \cdot))^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus der Fourierschen Inversionsformel. \square

Sei g eine Funktion auf $T = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\}$. Dann definieren wir den Rückprojektionsoperator P^* durch

$$(P^*g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta.$$

Identifizieren wir mit $(\theta, x) \in T$ die Gerade $\{x + t\theta : t \in \mathbb{R}^1\}$, so bildet $(P^*g)(x)$ den Mittelwert von g über alle Geraden durch x . Wie bei der Radon-Transformation ist P^* die L^2 -Adjungierte zu P :

Satz 2.5.7 *Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_0^\infty(T)$. Dann gilt*

$$(Pf, g) = (f, P^*g).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
 (Pf, g) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} (Pf)(\theta, x) \bar{g}(\theta, x) dx d\theta \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt \bar{g}(\theta, x) dx d\theta \quad (y = x + t\theta) \\
 &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bar{g}(\theta, E_\theta y) dy d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{S^{n-1}} \bar{g}(\theta, E_\theta y) d\theta dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\overline{P^*g})(y) dy \\
 &= (f, P^*g)
 \end{aligned}$$

□

Satz 2.5.8 (Inversionsformel) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g = Pf$. Dann gilt

$$f = P^*Kg,$$

wobei K für $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ durch

$$(Kh)^\wedge(\xi) = \frac{1}{2\pi|S^{n-2}|} |\xi| \hat{h}(\xi)$$

gegeben ist.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|} e^{ix \cdot \xi} |\xi| \hat{f}(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2.32) und dem Projektionssatz erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{ix \cdot \xi} |\xi| \hat{f}(\xi) d\xi d\sigma(\theta) \\
&= \frac{(2\pi)^{(-1-n)/2}}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{ix \cdot \xi} |\xi| \hat{g}(\theta, \xi) d\xi d\sigma(\theta) \\
&= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{iE_\theta x \cdot \xi} (Kg(\theta, \cdot))^\wedge(\xi) d\xi d\sigma(\theta) \\
&= \int_{S^{n-1}} Kg(\theta, E_\theta x) d\sigma(\theta) \\
&= (P^* Kg)(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen: 1) Für $n = 2$ ist die Inversionsformel äquivalent zur Radonschen Inversionsformel (Satz 2.5.3).

2) Für $n \geq 3$ ist die Formel praktisch nutzlos, denn zur Rekonstruktion von f müssen die Werte von Pf für alle $\theta \in S^{n-1}$ und $x \in \theta^\perp$ bekannt sein. Dies ist ein $2(n-1)$ -dimensionaler Datensatz. Da zur Rekonstruktion einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ prinzipiell ein n -dimensionaler Datensatz genügt, benötigt diese Inversionsformel zu viele Daten. In der Praxis werden nur ein Teil dieser Werte gemessen. Der folgende Satz zeigt, dass diese bei geeigneter Wahl schon ausreichen, um f eindeutig zu bestimmen.

Satz 2.5.9 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und die Menge $S_0^2 \subset S^2$ habe mit jedem Großkreis auf S^2 einen nichtleeren Schnitt. Dann ist f eindeutig bestimmt durch $(Pf)(\theta, x)$, $\theta \in S_0^2$, $x \in \theta^\perp$.

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann ist $\xi^\perp \cap S^2$ ein Großkreis und es gibt ein $\theta \in S_0^2 \cap (\xi^\perp \cap S^2)$. Somit ist $\xi \in \theta^\perp$ und aus Satz 2.5.5 folgt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} (Pf)^\wedge(\theta, \xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\theta^\perp} e^{-ix \cdot \xi} (Pf)(\theta, x) dx.$$

\hat{f} , und damit auch f , ist also eindeutig bestimmt. □

Beispiele: 1) $S_0^2 = S^1$ ist vollständig.

2) Sei

$$\theta(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \in S^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$$

und $\vartheta_0 \geq 0$. Dann ist $S_0^2 = \{\theta(\varphi, \vartheta) \in S^2 : |\vartheta| \leq \vartheta_0\}$ vollständig.

2.5.3 Die Cone-Beam-Transformation

Definition 2.5.3 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann ist die Cone-Beam-Transformation durch

$$(Df)(a, \theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta) dt$$

definiert.

Eine typische Anwendung ist die 3D-Tomographie, bei der sich eine Röntgenquelle entlang einer Kurve $a : \mathbb{R} \supset \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ bewegt. Nachdem die Röntgenstrahlen das Objekt f passiert haben, misst ein 2-dimensionaler Detektor ihre Intensitäten. Durch die Messwerte ist also $(Df)(a(\lambda), \theta)$ für $\lambda \in \Lambda, \theta \in S_0^2 \subset S^2$ gegeben. Dabei hängt S_0^2 von der Größe des Detektors ab.

Wir erweitern Df zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, indem wir

$$(Df)(a, x) = \int_0^\infty f(a + tx) dt \quad , x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (Df)(a, x) &= \int_0^\infty f(a + tx) dt = \frac{1}{|x|} \int_0^\infty f\left(a + s \frac{x}{|x|}\right) ds \\ &= \frac{1}{|x|} (Df)\left(a, \frac{x}{|x|}\right), \end{aligned}$$

d.h. Df ist im zweiten Argument homogen vom Grad -1 .

Daher gilt $(Df)(a, \cdot) \notin L_1(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)$ für $n \geq 2$. Allerdings ist $(Df)(a, \cdot)$ lokal integrierbar und hat somit als temperierte Distribution eine wohldefinierte Fourier-Transformierte.

Satz 2.5.10 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\xi \neq 0$

$$(Df)^\wedge(a, \xi) = \int_0^\infty \rho^{n-2} e^{i\rho a \cdot \xi} \hat{f}(\rho\xi) d\rho.$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{T}_{Df}[\varphi] &= T_{Df}[\hat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^n} (Df)(a, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(a + t\xi) \hat{\varphi}(\xi) dt d\xi \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(a + t\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi dt.\end{aligned}$$

Im inneren Integral wenden wir Parseval (2.9) an:

$$\begin{aligned}\hat{T}_{Df}[\varphi] &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (f(a + t\cdot))^\wedge(\xi) \varphi(\xi) d\xi dt \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n} (f(a + \cdot))^\wedge\left(\frac{\xi}{t}\right) \varphi(\xi) d\xi dt \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n} e^{ia \cdot \xi/t} \hat{f}\left(\frac{\xi}{t}\right) \varphi(\xi) d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \int_0^\infty t^{-n} e^{ia \cdot \xi/t} \hat{f}\left(\frac{\xi}{t}\right) dt d\xi.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}(Df)^\wedge(a, \xi) &= \int_0^\infty t^{-n} e^{ia \cdot \xi/t} \hat{f}\left(\frac{\xi}{t}\right) dt \quad \left(\rho = \frac{1}{t}\right) \\ &= \int_0^\infty \rho^{n-2} e^{i\rho a \cdot \xi} \hat{f}(\rho\xi) d\rho.\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Cone-Beam-Transformation invertieren, vorausgesetzt die Quellkurve a erfüllt die Tuysche Bedingung: Jede

Ebene, die $\text{supp } f$ trifft, schneidet a transversal. Dies bedeutet, dass für alle $x \in \text{supp } f$, $\theta \in S^2$ ein $\lambda(\theta, x) \in \Lambda$ existiert, so dass $x \cdot \theta = a(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta$ und $a'(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta \neq 0$ gilt.

Satz 2.5.11 (Tuy 1983) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und a erfülle die Tuysche Bedingung. Dann gilt für $x \in \text{supp } f$

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} i^{-1} \int_{S^2} \frac{1}{a'(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta} \frac{d}{d\lambda} (Df)^\wedge(a(\lambda), \theta) \Big|_{\lambda=\lambda(\theta, x)} d\sigma(\theta).$$

Beweis: In der Fourierschen Inversionsformel führen wir Kugelkoordinaten ein und erhalten

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^\infty \rho^2 e^{i\rho x \cdot \theta} \hat{f}(\rho\theta) d\rho d\sigma(\theta).$$

Sei $x \in \text{supp } f$ und $\theta \in S^2$. Da a die Tuysche Bedingung erfüllt, existiert ein $\lambda(\theta, x)$ mit $x \cdot \theta = a(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta$, und es folgt

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^\infty \rho^2 e^{i\rho a(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta} \hat{f}(\rho\theta) d\rho d\sigma(\theta). \quad (2.36)$$

Aus Satz 2.5.10 folgt

$$\frac{d}{d\lambda} (Df)^\wedge(a(\lambda), \theta) = \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \rho e^{i\rho a(\lambda) \cdot \theta} \hat{f}(\rho\theta) d\rho.$$

Nach Voraussetzung ist $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und somit $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Wir können also unter dem Integralzeichen differenzieren und erhalten

$$\frac{d}{d\lambda} (Df)^\wedge(a(\lambda), \theta) = i a'(\lambda) \cdot \theta \int_0^\infty \rho^2 e^{i\rho a(\lambda) \cdot \theta} \hat{f}(\rho\theta) d\rho.$$

Das Integral auf der rechten Seite stimmt mit dem inneren Integral in (2.36) überein. Somit ergibt sich

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} i^{-1} \int_{S^2} \frac{1}{a'(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta} \frac{d}{d\lambda} (Df)^\wedge(a(\lambda), \theta) \Big|_{\lambda=\lambda(\theta, x)} d\sigma(\theta).$$

□

Wir versuchen nun die Cone-Beam-Transformation noch auf einem anderen Weg zu invertieren, indem wir einen Zusammenhang zwischen Df und der Radontransformation Rf herstellen. Wir betrachten $(Rf)(e_3, 0)$, also das Integral von f über die x_1 - x_2 -Ebene. Mit $x = (\bar{x}, x_3)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, erhalten wir

$$(Rf)(e_3, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}, 0) d\bar{x} = \int_{S^1} \int_0^\infty r f(r\theta, 0) dr d\sigma(\theta).$$

Wir könnten vermuten, dass wir zum selben Ergebnis kommen, falls wir über alle Werte von Df , die in dieser Ebene liegen und von $a = 0$ ausgehen, integrieren:

$$\int_{S^1} (Df)(0, (\theta, 0)) d\sigma(\theta) = \int_{S^1} \int_0^\infty f(r\theta, 0) dr d\sigma(\theta).$$

Aufgrund des fehlenden Faktors r ist dies nicht mit $(Rf)(e_3, 0)$ identisch. Der Grund hierfür ist, dass die Cone-Beam-Strahlen nicht parallel sind, sondern von dem Punkt $a = 0$ ausgehend divergieren. Es stellt sich heraus, dass wir einen Zusammenhang herstellen können, wenn wir zu den Ableitungen von Rf und Df übergehen:

Satz 2.5.12 (Gindikin) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt für $\theta, \nu \in S^2$, $\nu \notin \theta^\perp$,

$$\frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, a \cdot \theta) = \frac{1}{\nu \cdot \theta} \int_{\theta^\perp \cap S^2} \frac{\partial}{\partial \nu}(Df)(a, \omega) d\sigma(\omega).$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial \nu}(Df)(a, \omega) = \frac{d}{du}(Df)(a, \omega + u\nu)|_{u=0}$ die Ableitung von Df in Richtung ν .

Beweis: In Aufgabe 22 haben wir

$$\left(R \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\theta, s) = \theta_i \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, s)$$

gezeigt. Somit erhalten wir für $\nu \in S^2$

$$\begin{aligned} \nu \cdot \theta \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, a \cdot \theta) &= \sum_{i=1}^3 \nu_i \left(R \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\theta, a \cdot \theta) = \left(R \sum_{i=1}^3 \nu_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\theta, a \cdot \theta) \\ &= \left(R \frac{\partial f}{\partial \nu}\right)(\theta, a \cdot \theta) = \int_{\theta^\perp} \frac{\partial f}{\partial \nu}(a \cdot \theta\theta + y) dy. \end{aligned}$$

Wir substituieren $y \rightarrow y + E_\theta a$ und wegen $a = a \cdot \theta \theta + E_\theta a$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\nu \cdot \theta \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, a \cdot \theta) &= \int_{\theta^\perp} \frac{\partial f}{\partial \nu}(a + y) dy && (y = r\omega) \\
&= \int_{\theta^\perp \cap S^2} \int_0^\infty r \frac{\partial f}{\partial \nu}(a + r\omega) dr d\sigma(\omega) \\
&= \int_{\theta^\perp \cap S^2} \int_0^\infty r \frac{d}{ds} f(a + r\omega + s\nu) \Big|_{s=0} dr d\sigma(\omega).
\end{aligned}$$

Wir setzen $s = ru$. Dann ist $r \frac{d}{ds} = \frac{d}{du}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\nu \cdot \theta \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, a \cdot \theta) &= \int_{\theta^\perp \cap S^2} \int_0^\infty \frac{d}{du} f(a + r\omega + ru\nu) \Big|_{u=0} dr d\sigma(\omega) \\
&= \int_{\theta^\perp \cap S^2} \frac{d}{du} \int_0^\infty f(a + r(\omega + u\nu)) dr \Big|_{u=0} d\sigma(\omega) \\
&= \int_{\theta^\perp \cap S^2} \frac{d}{du} (Df)(a, \omega + u\nu) \Big|_{u=0} d\sigma(\omega) \\
&= \int_{\theta^\perp \cap S^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (Df)(a, \omega) d\sigma(\omega).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Dies ist eine Erweiterung der Formel von Grangeat (1987), die sich auf den Fall $\nu = \theta$ beschränkt.

Wir können nun die Cone-Beam-Transformation mit Hilfe der Formel von Gindikin invertieren, falls die Quellkurve $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ die Tuysche Bedingung erfüllt. Für $\lambda \in \Lambda$ und $\theta \in S^2$ setzen wir

$$G(\lambda, \theta) = \frac{1}{\nu \cdot \theta} \int_{\theta^\perp \cap S^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (Df)(a(\lambda), \omega) d\sigma(\omega). \quad (2.37)$$

Dann liefert die Formel von Gindikin

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, x \cdot \theta) &= \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, a(\lambda(\theta, x)) \cdot \theta) \\ &= G(\lambda(\theta, x), \theta).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Mit (2.37), (2.38) und der Radonschen Inversionsformel

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(Rf)(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta)$$

läßt sich nun f aus Df bestimmen.

2.6 Das Abtasttheorem

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ führen wir die shah-Distribution

$$\text{shah}_h[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk)$$

mit Schrittweite $h > 0$ ein und bilden die Fourier-Transformierte

$$(\text{shah}_h)^\wedge[f] = \text{shah}_h[\hat{f}] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(hk) \quad \text{für } f \in \mathcal{S}.$$

Die Ergebnisse dieses Abschnitts beruhen alle auf dem folgenden Satz.

Satz 2.6.1 (Poissonsche Formel) Für $h > 0$ gilt

$$(\text{shah}_{2\pi/h})^\wedge = (2\pi)^{-n/2} h^n \text{shah}_h.$$

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass für $f \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{h}k\right) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk).$$

Dazu definieren wir die Funktion

$$g(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right).$$

Da g in allen Argumenten die Periode $\frac{2\pi}{h}$ hat, können wir g in $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ in eine Fourierreihe entwickeln:

$$g(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g_k e^{-ihk \cdot \xi}.$$

Die Fourierkoeffizienten g_k vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}
g_k &= (2\pi)^{-n} h^n \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} g(\xi) e^{ihk \cdot \xi} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} h^n \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right) e^{ihk \cdot \xi} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} h^n \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right) e^{ihk \cdot \xi} d\xi \quad \left(\xi' = \xi - \frac{2\pi}{h}l\right) \\
&= (2\pi)^{-n} h^n \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n - \frac{2\pi}{h}l} \hat{f}(\xi') e^{ihk \cdot \xi'} \underbrace{e^{i2\pi k \cdot l}}_{=1} d\xi' \\
&= (2\pi)^{-n} h^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi') e^{ihk \cdot \xi'} d\xi' \\
&= (2\pi)^{-n/2} h^n f(hk).
\end{aligned}$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die Fourierreihe ein

$$g(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk \cdot \xi}.$$

und erhalten durch Vergleich mit der Definition von g :

$$(2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk \cdot \xi} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right). \quad (2.39)$$

Indem wir $\xi = 0$ setzen ergibt sich das gewünschte Ergebnis

$$(2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(-\frac{2\pi}{h}l\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{h}l\right). \quad (2.40)$$

□

Bemerkung: Gleichung (2.39) und (2.40) sind äquivalent: Für $\eta \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $f_\eta(x) = f(x) e^{-i\eta \cdot x}$. Dann folgt

$$(f_\eta)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\eta \cdot x} e^{-i\xi \cdot x} dx = \hat{f}(\xi + \eta).$$

Wir ersetzen f in (2.40) durch f_η und erhalten

$$(2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk \cdot \eta} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\eta + \frac{2\pi}{h} l).$$

Folgerung: Wir lösen (2.39) nach $\hat{f}(\xi)$ auf und erhalten

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ih\xi \cdot k} - \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h} l)}_{\text{aliasing-Fehler}}.$$

Verschwindet der aliasing-Fehler, so ist \hat{f} eindeutig durch die Werte von f auf dem Gitter $h\mathbb{Z}^n$ bestimmt. Wir untersuchen unter welchen Voraussetzungen dies der Fall ist (siehe Abbildung 2.2).

Definition 2.6.1 Eine Funktion f heißt bandbeschränkt mit Bandbreite Ω , falls

$$\hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall |\xi| > \Omega.$$

Wir beschränken uns auf $n = 1$. Sei f Ω -bandbeschränkt und $\Omega \leq \frac{\pi}{h}$. Für $|\xi| \leq \frac{\pi}{h}$, insbesondere also für $|\xi| \leq \Omega$, und $l \neq 0$ ist dann $\xi - \frac{2\pi}{h}l \notin [-\Omega, \Omega]$ und wir erhalten $\hat{f}(\xi - \frac{2\pi}{h}l) = 0$. Der aliasing-Fehler ist also 0 in $[-\Omega, \Omega]$ und es gilt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) e^{-ih\xi k} \quad \text{für } \xi \in [-\Omega, \Omega]. \quad (2.41)$$

Nach Voraussetzung ist f Ω -bandbeschränkt und $\hat{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| > \Omega$. Daher ist \hat{f} und somit auch f eindeutig durch die Werte von f auf dem Gitter $h\mathbb{Z}$ bestimmt. Da (2.41) auch noch für $|\xi| \leq \frac{\pi}{h}$ richtig ist, folgt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) e^{-ih\xi k} \chi_{\pi/h}(\xi)$$

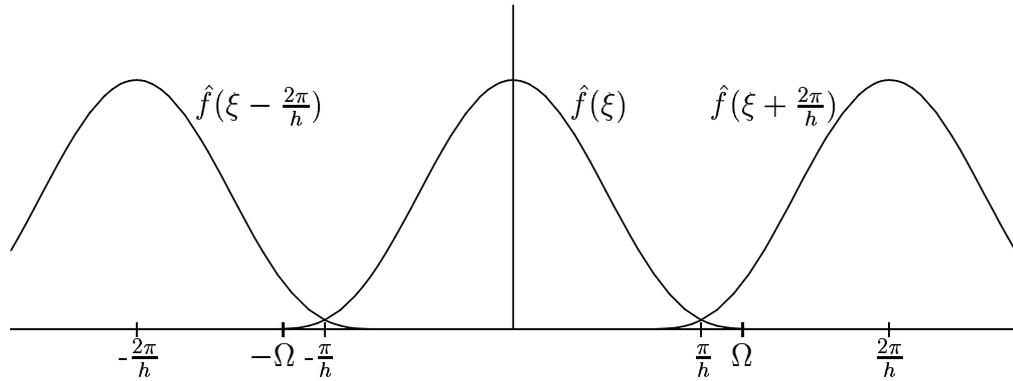


Abbildung 2.2: Der Aliasing-Fehler einer Ω -bandbeschränkten Funktion f entsteht bei einer Abtastrate $h \geq \frac{\pi}{\Omega}$, da sich die Träger von $\hat{f}(\xi \pm \frac{2\pi}{h})$ und $\hat{f}(\xi)$ überschneiden.

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Wir erhalten f durch inverse Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}
 (\chi_{\pi/h}(\xi)e^{-ih\xi k})^\sim(x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\pi/h}(\xi) e^{-ih\xi k} e^{ix\xi} d\xi \\
 &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(x-hk)\xi} d\xi \\
 &= (2\pi)^{-1/2} \frac{e^{i(x-hk)\frac{\pi}{h}} - e^{-i(x-hk)\frac{\pi}{h}}}{i(x-hk)} \\
 &= 2(2\pi)^{-1/2} \frac{\sin((x-hk)\frac{\pi}{h})}{x-hk} \\
 &= (2\pi)^{1/2} h^{-1} \operatorname{sinc}\left((x-hk)\frac{\pi}{h}\right).
 \end{aligned}$$

Für f ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) \operatorname{sinc}\left((x-hk)\frac{\pi}{h}\right).$$

Satz 2.6.2 (Shannon, Whittaker, Kotelnikov) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ Ω -bandbeschränkt und $h > 0$ erfülle die Nyquist-Bedingung $h \leq \frac{\pi}{\Omega}$. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die Werte $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, und es gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) \operatorname{sinc}\left((x-hk)\frac{\pi}{h}\right).$$

Beweis: s.o. □

Bemerkung: Sei $f(x) = \text{sinc}(\Omega x)$. Dann ist f Ω -bandbeschränkt und ist in $(-\frac{\pi}{\Omega}, \frac{\pi}{\Omega})$ positiv. Ausserhalb dieses Intervalls oszilliert f und konvergiert gegen 0. Somit repräsentiert f ein Objekt der Größe $\frac{2\pi}{\Omega}$. Das entspricht einem Grundsatz der Nachrichtentechnik:

- Um Details der Größe $\frac{2\pi}{\Omega}$ darzustellen, benötigen wir Funktionen der Bandbreite Ω .
- Umgekehrt stellen Funktionen der Bandbreite Ω Details der Größe $\frac{2\pi}{\Omega}$, aber keine kleineren, dar.

Wir nennen $\frac{2\pi}{\Omega}$ die Auflösung von f . Die maximale Abtastrate (Nyquist-Rate) $\frac{\pi}{\Omega}$ einer solchen Funktion ist also gerade die Hälfte ihrer Auflösung.

Folgerung: Sei f Ω -bandbeschränkt und $h \leq \frac{2\pi}{\Omega}$. Einerseits liefert (2.40)

$$\hat{f}(0) = (2\pi)^{-1/2} h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) - \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{h}l\right)}_{=0}.$$

Andererseits ist $\hat{f}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Somit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk), \quad (2.42)$$

d.h. die Trapezregel ist exakt. Sind f, g Ω -bandbeschränkt und $h \leq \frac{\pi}{\Omega}$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk)g(hk), \quad (2.43)$$

denn fg hat die Bandbreite 2Ω (vgl. Falungssatz 2.1.1).

Kapitel 3

Das Inverse Problem der Wellengleichung

3.1 Migration

Die Migration ist eine Technik, die früher in der Seismologie genutzt wurde, um die Schallgeschwindigkeit $c(x)$ eines Mediums (z.B. des Erdinneren) zu messen. Die Migration macht keinen Gebrauch von der Wellengleichung, sondern beruht auf einfachen Laufzeitüberlegungen. Wir betrachten ein einfaches zweidimensionales Erdmodell $\{(x_1, x_3) : x_3 > 0\}$, wobei x_3 die Tiefe bedeutet. In diesem Halbraum habe die Schallgeschwindigkeit $c(x)$ oberhalb einer Kurve Γ den konstanten Wert c_0 , unterhalb sei $c(x) = c_1 \neq c_0$. Das bedeutet, dass eintreffende Schallwellen an Γ teilweise (abhängig von der Differenz $c_0 - c_1$) reflektiert werden. Sei nun $g(x_1, t)$ das zero-offset Seismogramm, d.h. die Quelle q und der Receiver r befinden sich beide an der Stelle $(x_1, 0)$ und das reflektierte Signal wird in Abhängigkeit der Zeit t gemessen. In diesem Seismogramm ist Γ als eine Γ ähnliche Kurve Γ' zu sehen. Unser Ziel ist es nun, Γ aus der uns bekannten Kurve Γ' zu bestimmen.

Wir nehmen zunächst an, dass $a = (a_1, a_3)^T \in \Gamma$ der einzige Reflektor ist. Dann beträgt die Laufzeit t einer Schallwelle von der Quelle $q = (x_1, 0)^T$ zum Punkt a und zurück

$$t = \frac{2}{c_0} \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + a_3^2}.$$

Das bedeutet, dass a im Seismogramm als die Hyperbel

$$R_a = \left\{ (x_1, t) : t = \frac{2}{c_0} \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + a_3^2} \right\}$$

zu sehen ist. Wir werden sehen, dass Γ' die Einhüllende der Hyperbeln R_a , $a \in \Gamma$, ist.

Dazu benötigen wir das folgende Lemma. Wir betrachten die Kurvenschar $x = \varphi(t, s) = (\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s))^T$ im \mathbb{R}^2 . Als Einhüllende dieser Schar bezeichnen wir eine Kurve, die jede Kurve der Schar berührt.

Lemma 3.1.1 *Sei $t = t(\lambda)$, $s = s(\lambda)$ eine Kurve in der s - t -Ebene, entlang der $\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = 0$ ist. Dann ist $x = \varphi(t(\lambda), s(\lambda))$ Einhüllende der Schar $x = \varphi(t, s)$.*

Beweis: Wir leiten $x(\lambda) = \varphi(t(\lambda), s(\lambda))$ nach λ ab:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t(\lambda), s(\lambda)) + \frac{ds}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t(\lambda), s(\lambda)).$$

Aus $\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = 0$ folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t(\lambda), s(\lambda)) = \omega(\lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t(\lambda), s(\lambda)).$$

Somit gilt

$$\frac{dx}{d\lambda} = \left(\frac{dt}{d\lambda} + \omega(\lambda) \frac{ds}{d\lambda} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t(\lambda), s(\lambda)),$$

d.h. die Tangente an $x = \varphi(t(\lambda), s(\lambda))$ hat die selbe Richtung wie die Tangente der Kurve $\varphi(t, s(\lambda))$ im Punkt $t = t(\lambda)$. \square

Beispiele: 1) Wir betrachten die Schar der Kreise mit Radius r und Mittelpunkt auf der x_1 -Achse. Diese ist durch

$$\varphi(t, s) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es gilt

$$0 = \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = \begin{vmatrix} -r \sin t(\lambda) & 1 \\ r \cos t(\lambda) & 0 \end{vmatrix} = -r \cos t(\lambda) \iff t(\lambda) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Wir setzen $s(\lambda) = \lambda$ und erhalten die Einhüllenden

$$x = r \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Die Kurvenschar sei durch

$$y = f(x, s)$$

gegeben. Setzen wir $x(t) = t$ und $y(t) = f(x(t), s)$, so erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\varphi(t, s) = \begin{pmatrix} t \\ f(t, s) \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) & \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial s}(t, s).$$

Zur Berechnung der Einhüllenden müssen wir also $\frac{\partial f}{\partial s}(x, s) = 0$ nach $s = s(x)$ bzw. $x = x(s)$ auflösen und erhalten die Einhüllende

$$y = f(x, s(x)) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x(s), s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ f(x(s), s) \end{pmatrix}.$$

Mit dem Lemma 3.1.1 können wir folgenden Satz beweisen.

Satz 3.1.1 Γ' ist die Einhüllende der Kurvenschar R_a , $a \in \Gamma$.

Beweis: Sei $a = a(s)$ eine Parameterdarstellung von Γ . Wir können Γ' als Funktion $t(x_1)$ darstellen, wobei $t(x_1)$ die minimale Laufzeit aller von $(x_1, 0)$ ausgehenden und an Γ reflektierten Schallwellen ist, also

$$t(x_1) = \min_s \frac{2}{c_0} \sqrt{(a_1(s) - x_1)^2 + a_3^2(s)}.$$

Die Kurvenschar R_a , $a \in \Gamma$, ist durch

$$t(x_1, s) = \frac{2}{c_0} \sqrt{(a_1(s) - x_1)^2 + a_3^2(s)}$$

gegeben und die Einhüllende ist durch die Gleichung

$$\frac{d}{ds} \frac{2}{c_0} \sqrt{(a_1(s) - x_1)^2 + a_3^2(s)} = 0 \quad (3.1)$$

bestimmt. Dies bedeutet aber gerade, dass die Einhüllende die Wurzel minimiert und somit mit Γ' übereinstimmt. \square

Beispiel: Sei Γ die Gerade $a(s) = (s, \alpha s + \beta)^T$ bzw. $x_3 = \alpha x_1 + \beta$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{(a_1(s) - x_1)^2 + a_3^2(s)} = \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{(s - x_1)^2 + (\alpha s + \beta)^2} \\ &= \frac{s - x_1 + \alpha(\alpha s + \beta)}{\sqrt{(s - x_1)^2 + (\alpha s + \beta)^2}} \\ \Leftrightarrow x_1 &= (\alpha^2 + 1)s + \alpha\beta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für t ergibt sich

$$t = \frac{2}{c_0} \sqrt{(s - x_1)^2 + (\alpha s + \beta)^2} = \frac{2}{c_0} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\alpha s + \beta). \quad (3.3)$$

Wir sehen, dass Γ' ebenfalls eine Gerade ist, die sich allerdings von Γ unterscheidet. Lösen wir nämlich (3.2) nach s auf und setzen das Ergebnis in (3.3) ein, so bekommen wir

$$t = \frac{2}{c_0} (\alpha^2 + 1)^{-1/2} (\alpha x_1 + \beta).$$

Wir haben gesehen, wie wir Γ' aus Γ erhalten. Das Ziel der Migration ist es aber Γ aus Γ' zu rekonstruieren. Das können wir auf folgende Weise realisieren:

1. Suche für jedes $a' \in \Gamma'$ die Hyperbel R_a , welche Γ' in a' berührt.
2. Verschiebe a' nach a .

Das ist die geometrische Migration nach Hagedorn (1954).

3.2 Die Born-Approximation

Wir nehmen an, die gesuchte Schallgeschwindigkeit c unterscheide sich nur in einem Gebiet Ω geringfügig von der konstanten Hintergrundgeschwindigkeit c_0 :

$$\frac{1}{c^2} = (1 + f) \frac{1}{c_0^2}, \quad \Omega = \text{supp}(f) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}, \quad |f| \text{ klein.}$$

Die Quelle q und der Receiver r befinden ausserhalb von Ω , typischerweise auf der Erdoberfläche $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$. Zur Zeit $t = 0$ wird an der Stelle q ein δ -Impuls ausgesandt und der Zeitverlauf der reflektierten Schallwellen an den Receivern r gemessen. Wir beschreiben dieses Experiment durch die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2(\Delta u + \delta(x - q)\delta(t)) && \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u &= 0 && \text{für } t < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gegeben sind die Meßwerte $g(r, q, t) = u(r, t)$ und die Aufgabe besteht darin, c bzw. f aus den Meßwerten g zu bestimmen.

Sei u_0 die Lösung für $f \equiv 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= c_0^2(\Delta u_0 + \delta(x - q)\delta(t)) && \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u_0 &= 0 && \text{für } t < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wir zerlegen die Lösung u in $u = u_0 + v$. Dann gilt

$$(1 + f) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = c_0^2(\Delta u_0 + \Delta v + \delta(x - q)\delta(t)).$$

Aus (3.5) folgt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta v.$$

Die Born-Approximation besteht nun darin, in dieser Gleichung u durch u_0 zu ersetzen. Wir sprechen auch von einer Linearisierung des Problems, da der "f-Term" nun von v unabhängig ist und v und f somit linear voneinander abhängen. v erfüllt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_0^2 \Delta v - f \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} && \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ v &= 0 && \text{für } t < 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Satz (2.4.3) mit $h = -f \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ liefert uns die Lösung

$$v(x, t) = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \int_{|x-y| \leq c_0 t} \frac{f(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(y, t - \frac{|x-y|}{c_0})}{|x-y|} dy.$$

Wegen $u_0(x, t) = 0$ für $t < 0$ können wir auf die Integrationsgrenzen verzichten. Ziehen wir noch die Ableitung vor das Integral, so erhalten wir

$$v(x, t) = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{f(y) u_0(y, t - \frac{|x-y|}{c_0})}{|x-y|} dy. \quad (3.7)$$

Analog ergibt sich für u_0

$$u_0(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq c_0 t} \frac{\delta(y-q) \delta(t - \frac{|x-y|}{c_0})}{|x-y|} dy = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - \frac{|x-q|}{c_0})}{|x-q|}.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (3.7) ein:

$$v(x, t) = -\frac{1}{(4\pi c_0)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{f(y) \delta(t - \frac{|x-y|+|y-q|}{c_0})}{|x-y||y-q|} dy. \quad (3.8)$$

Um dieses Integral weiter auszuwerten, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.2.1 Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|\nabla \phi| > 0$ und sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$. Dann gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\phi(x)) \varphi(x) dx = \int_M \frac{\varphi(x)}{|\nabla \phi(x)|} d\sigma(x).$$

Bemerkung: Bevor wir das Lemma beweisen, überlegen wir uns zunächst, wie wir die linke Seite zu verstehen haben. Sei $\chi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\chi\|_1 = 1$, $\chi(x) \geq 0$ und $\text{supp}(\chi)$ kompakt. Wir setzen $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi(\varepsilon^{-1}x)$. Dann gilt $\chi_\varepsilon \rightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und wir definieren:

$$\begin{aligned} (\delta \circ \phi)[\varphi] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\chi_\varepsilon \circ \phi)[\varphi] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(\phi(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Beweis: Wir lösen $\phi(x) = z$ nach x_n auf und setzen $x = (x', x_n)^T$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann können wir x_n als Funktion von x' und z auffassen: $x_n = \psi(x', z)$. Mit $dz = \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right| dx_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\phi(x)) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \delta(\phi(x)) \varphi(x', x_n) dx_n dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int \delta(z) \varphi(x', \psi(x', z)) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x', \psi(x', z)) \right|^{-1} dz dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', \psi(x', 0)) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x', \psi(x', 0)) \right|^{-1} dx'. \end{aligned}$$

Die Mannigfaltigkeit M ist durch $x_n = \psi(x', 0)$ gegeben. Somit gilt für das Oberflächenmaß σ (vgl. [2], S.142f)

$$d\sigma = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right|^2} dx'.$$

Aus

$$\phi(x', \psi(x', 0)) = 0$$

folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0.$$

Mit der Schreibweise $\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ erhalten wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{\phi_i}{\phi_n}$$

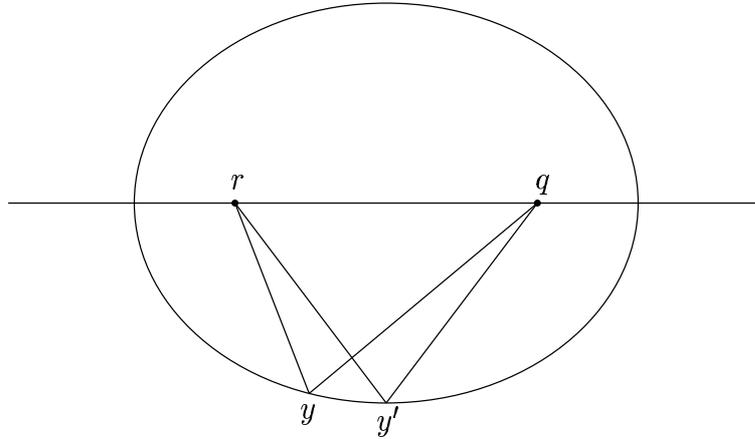
und

$$d\sigma = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\phi_i|^2}{|\phi_n|^2}} dx' = \frac{1}{|\phi_n|} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\phi_i|^2} dx' = \frac{|\nabla \phi|}{|\phi_n|} dx'.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\phi(x)) \varphi(x) dx = \int_M \frac{\varphi(x)}{|\nabla \phi(x)|} d\sigma(x).$$

□

Abbildung 3.1: Ellipsoid $I_{r,q,t}$ mit den Brennpunkten r und q .

Sei nun

$$\phi(y) = t - \frac{|x - y| + |y - q|}{c_0}$$

das Argument der δ -Funktion in (3.8). Die Nullstellen von ϕ sind durch die Mengen $I_{x,q,t} = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| + |y - q| = c_0 t\}$ gegeben. Weiterhin ist

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i} = \frac{1}{c_0} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|} - \frac{y_i - q_i}{|y - q|} \right)$$

und somit

$$\nabla \phi = \frac{1}{c_0} \left(\frac{x - y}{|x - y|} - \frac{y - q}{|y - q|} \right).$$

Aus Lemma 3.2.1 erhalten wir

$$v(x, t) = -\frac{1}{16\pi^2 c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{I_{x,q,t}} \frac{f(y)}{||y - q|(x - y) - |x - y|(y - q)|} d\sigma(y).$$

Da u_0 bekannt ist, kennen wir auch $v(r, t) = u(r, t) - u_0(r, t)$. Setzen wir $\tilde{g}(r, q, t) = g(r, q, t) - u_0(r, t)$, so besteht unsere Aufgabe darin, die Funktion f anhand von

$$\tilde{g}(r, q, t) = -\frac{1}{16\pi^2 c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{I_{r,q,t}} \frac{f(y)}{|(r - y)|y - q| - |(y - q)|r - y|} d\sigma(y).$$

aus den modifizierten Daten \tilde{g} zu bestimmen. Das ist ein Problem der Integralgeometrie.

Wir untersuchen die Mengen $I_{r,q,t}$ etwas genauer. Da für $y \in I_{r,q,t}$ die Summe der Abstände zu r und q konstant ist, handelt es sich um Ellipsoide mit den Brennpunkten r und q sowie der großen Halbachse $\frac{c_0 t}{2}$ (siehe Abbildung 3.1).

Wir kommen nun zur Born-Approximation im Frequenzbereich. Wir nehmen an, dass $\text{supp}(f) \subset B_R(0)$ gilt. Die Quelle q und die Receiver r befinden sich weit ausserhalb dieser Kugel, also $|q|, |r| \gg R$ (in der Praxis reicht schon $|q|, |r| \geq \frac{3}{2}R$). Anstatt des δ -Impulses werde das zeitharmonische Signal $w(t) = e^{i\omega t}$ mit der festen Frequenz ω ausgesandt. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 (\Delta u(x, t) + \delta(x - q) e^{i\omega t}).$$

Mit dem Ansatz $u(x, t) = U(x) e^{i\omega t}$ ergibt sich

$$-U(x) \omega^2 e^{i\omega t} = c^2 (\Delta U(x) e^{i\omega t} + \delta(x - q) e^{i\omega t}).$$

Die Exponentialfunktion fällt somit heraus und mit $k = \frac{\omega}{c_0}$ haben wir

$$\Delta U + k^2(1 + f)U = -\delta(x - q). \quad (3.9)$$

Wir zerlegen U in $U = U_0 + V$, wobei U_0 die Lösung für $f \equiv 0$ ist:

$$\Delta U_0 + k^2 U_0 = -\delta(x - q). \quad (3.10)$$

Aus Satz 2.3.4 folgt, dass U_0 die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung ist, also

$$U_0(x) = \frac{e^{ik|x-q|}}{4\pi|x-q|}. \quad (3.11)$$

Diese Lösung ist unter Berücksichtigung der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (2.27) eindeutig bestimmt. Aus (3.9) und (3.10) ergibt sich für V die Helmholtzgleichung

$$\Delta V + k^2 V = -k^2 f U.$$

Wie oben ersetzen wir U durch U_0 (Born-Approximation). Die resultierende Differentialgleichung

$$\Delta V + k^2 V = -k^2 f U_0$$

hat zusammen mit der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} V(x) &= k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) U_0(y) dy \\ &= \frac{k^2}{16\pi^2} \int_{B_R(0)} \frac{e^{ik(|x-y|+|y-q|)}}{|x-y||y-q|} f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wir machen nun eine Fernfeld-Approximation. Für $|x| \gg R$ und $|y| \leq R$ ist

$$|x-y| = |x| - \frac{x}{|x|} \cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (3.13)$$

Somit folgt

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x| - \frac{x}{|x|} \cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right)} = \frac{1}{|x|} \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)}.$$

Aus der Taylorreihe $(1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2)$ erhalten wir

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right). \quad (3.14)$$

Wir setzen (3.13) und (3.14) in Gleichung (3.12) ein. Wegen $e^{O\left(\frac{1}{|x|}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ ergibt sich

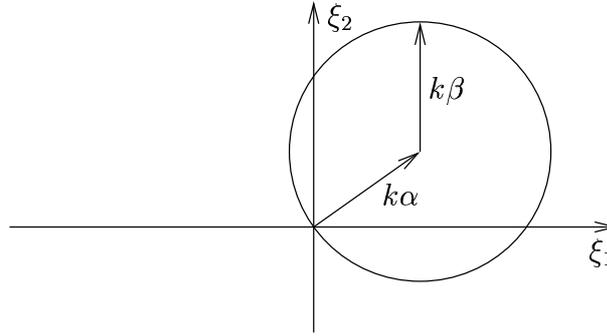
$$V(x) = \frac{k^2}{16\pi^2} \frac{e^{ik(|x|+|q|)}}{|x||q|} \int_{B_R(0)} e^{-ik\left(\frac{x}{|x|} + \frac{q}{|q|}\right) \cdot y} f(y) dy \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|q|}\right)\right).$$

Somit gilt an den Receivern $x = r$ näherungsweise

$$V(r) = \frac{k^2}{4(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{ik(|r|+|q|)}}{|r||q|} \hat{f}\left(k\left(\frac{r}{|r|} + \frac{q}{|q|}\right)\right).$$

Wir setzen $\alpha = \frac{q}{|q|}$ und $\beta = \frac{r}{|r|}$, $\alpha, \beta \in S^2$. Dann ist

$$\hat{f}(k\alpha + k\beta) = \frac{4(2\pi)^{1/2}}{k^2} e^{-ik(|r|+|q|)} |r||q| V(r).$$

Abbildung 3.2: Ewald-Kugel für eine feste Quellposition α .

Ist $\alpha \in S^2$ fest und durchläuft β die Einheitssphäre S^2 , so sind die Werte von \hat{f} auf der sogenannten Ewald-Kugel $\{\xi = k\alpha + k\beta : \beta \in S^2\}$ gegeben (siehe Abbildung 3.2). Falls α und β die ganze Einheitssphäre S^2 durchlaufen, durchläuft $\xi = k\alpha + k\beta$ die Kugel $K_{2k}(0)$. Somit ist $\hat{f}(\xi)$ für alle $|\xi| \leq 2k$ bestimmt.

Bemerkungen: 1) Da $\hat{f}(\xi)$ für $|\xi| \leq 2k$ bekannt ist, ist f mit der örtlichen Auflösung $\frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$ rekonstruierbar. Der Zeitanteil $e^{i\omega t}$ des ausgesandten Signals hat wegen $k = \frac{\omega}{c_0}$ die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$. Die Auflösung ist also gerade die halbe Wellenlänge. Um die Auflösung zu verbessern, könnten wir einfach die Frequenz ω erhöhen. Das ist jedoch nicht so einfach, da mit ω auch die Dämpfung wächst.

2) Wir wollen nun die Gültigkeit der Born-Approximation untersuchen und eine Bedingung für $U \approx U_0$ herleiten. Wir beschränken uns auf den 1-dimensionalen Fall und betrachten die homogenen Helmholtzgleichungen

$$\begin{aligned} U'' + k^2(1+f)U &= 0, \\ U_0'' + k^2U_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ist f in $|x| \leq \rho$ konstant, so lauten die Lösungen

$$\begin{aligned} U(x) &= e^{\pm ik\sqrt{1+f}x}, \\ U_0(x) &= e^{\pm ikx}. \end{aligned}$$

Damit nun $U \approx U_0$ gilt, dürfen sich die Phasen nur um deutlich weniger als

π unterscheiden. Wir erhalten also die notwendige Bedingung

$$|x| |k\sqrt{1+f} - k| \ll \pi \quad \forall |x| \leq \rho.$$

Wegen $\sqrt{1+f} = 1 + \frac{f}{2} + O(f^2)$ erhalten wir für kleines f

$$\rho|f| \ll \frac{2\pi}{k} = \lambda.$$

Diese Formel wird von den Ingenieuren tatsächlich benutzt, wobei \ll hier etwa den Faktor 0.1 bedeutet.

3) Um eine gute Auflösung zu erhalten, müssen wir $k \rightarrow \infty$ laufen lassen. Weiterhin gelte $f \rightarrow 0$, so dass kf konstant bleibt. Dann werden die Oberflächen der Ewald-Kugeln nahe des Ursprungs zu Ebenen. Sei $\beta = -\alpha + \gamma$, $\gamma \approx 0$, $\gamma \perp \alpha$. Dann gilt

$$\hat{f}(k\alpha + k\beta) = \hat{f}(k\gamma) = (2\pi)^{-1/2} (Pf)^\wedge(\alpha, k\gamma).$$

Wir erhalten also ein Problem der Röntgen-Transformation. Das ist nicht weiter verwunderlich, da für großes k und kleines f die Schallwellen kaum abgelenkt werden und die Meßwerte Pf entsprechen.

3.3 Radar

Einfache Radarmodelle beruhen auf Messungen der Laufzeit, die ein elektromagnetisches Signal von der Antenne zum Objekt und zurück benötigt. Wir betrachten hier die mathematische Modellierung (ab 1960) über die Wellen- bzw. Helmholtzgleichung. Wir nehmen an, eine Antenne q sende ein Signal $s(t)$ aus, dessen Fourier-Transformierte $S(\omega) = \hat{s}(\omega)$ die Form eines Rechteckimpulses hat, also

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \chi_{[-1/2, 1/2]} \left(\frac{\omega - \omega_c}{b} \right).$$

Das Signal s besteht somit aus allen Frequenzen zwischen $\omega_c - \frac{b}{2}$ und $\omega_c + \frac{b}{2}$. Für $s(t)$ erhalten wir (siehe Abbildung 3.3)

$$\begin{aligned} s(t) &= b^{-1/2} \int_{\omega_c - \frac{b}{2}}^{\omega_c + \frac{b}{2}} e^{i\omega t} d\omega \\ &= b^{-1/2} \left[\frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{\omega_c - \frac{b}{2}}^{\omega_c + \frac{b}{2}} \\ &= b^{-1/2} \frac{e^{i\omega_c t}}{it} (e^{ibt/2} - e^{-ibt/2}) \\ &= \sqrt{b} e^{i\omega_c t} \operatorname{sinc} \left(\frac{bt}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das Signal s erzeugt ein elektromagnetisches Feld $u(x, t)$, das die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (\Delta u + \delta(x - q) s(t)), \quad c^2 = \frac{c_0^2}{1 + f}. \quad (3.16)$$

erfüllt. Sei

$$U(x, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} u(x, t) dt$$

die inverse Fourier-Transformierte von $u(x, t)$. Durch inverse Fourier-Transformation geht (3.16) dann in die Helmholtzgleichung

$$-\omega^2 U = c^2 (\Delta U + \delta(x - q) S(\omega))$$

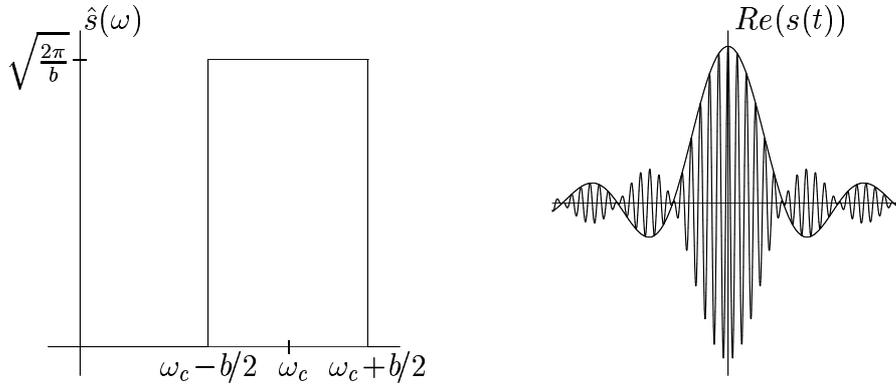


Abbildung 3.3: *Links:* Das ausgesandte Signal S ist im Fourierraum ein Rechteckimpuls mit Bandbreite b und der zentralen Frequenz ω_c . *Rechts:* $Re(s(t))$.

über (siehe Abschnitt 2.4). Setzen wir $k = \frac{\omega}{c_0}$, so ergibt sich

$$\Delta U + k^2(1 + f)U = -\delta(x - q)S(\omega). \quad (3.17)$$

Wir nehmen an, dass $U_0(x, \omega)$ die Lösung für $f \equiv 0$ ist. Aus Satz 2.3.2 erhalten wir

$$U_0(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \delta(y - q) S(\omega) dy = \frac{e^{ik|x-q|}}{4\pi|x-q|} S(\omega). \quad (3.18)$$

Sei nun $U = U_0 + V$. Setzen wir diese Zerlegung in (3.17) ein, so sehen wir, dass V die Gleichung

$$\Delta V + k^2 V = -k^2 f U$$

erfüllt. Durch die Born-Approximation erhalten wir

$$\Delta V + k^2 V = -k^2 f U_0$$

und somit (Satz 2.3.2)

$$\begin{aligned} V(x, \omega) &= k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) U_0(y, \omega) dy \\ &= \frac{k^2 S(\omega)}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(|x-y|+|y-q|)}}{|x-y||y-q|} f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir behandeln hier nur den Fall des Mono static radar. Das bedeutet, dass die Antenne sowohl Sender als auch Empfänger ist (entspricht dem zero-offset in der Seismologie). $V(x, \omega)$ ist also für $x = q$ bekannt:

$$V(q, \omega) = \frac{k^2 S(\omega)}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{2ik|y-q|}}{|y-q|^2} f(y) dy.$$

Unter der Annahme, dass die Antenne weit vom Objekt entfernt ist ($|y| \ll |q|$), können wir die Fernfeld-Approximation $|y-q| \approx |q| - \frac{q}{|q|} \cdot y$ und $|y-q|^{-1} \approx |q|^{-1}$ anwenden und erhalten mit $\theta = \frac{q}{|q|}$

$$\begin{aligned} V(q, \omega) &= \frac{k^2 S(\omega)}{16\pi^2} \frac{e^{2ik|q|}}{|q|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2ik \frac{q}{|q|} \cdot y} f(y) dy \\ &= \frac{k^2 S(\omega)}{4(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{2ik|q|}}{|q|^2} \hat{f}(2k\theta). \end{aligned}$$

Bis auf einen uns bekannten Faktor ist $V(q, \omega)$ also mit $\hat{f}(2k\theta)$ identisch. Ist $|\omega - \omega_c| \leq \frac{b}{2}$, so ist $S(\omega) \neq 0$ und $\hat{f}(2k\theta)$ ist somit bekannt. Indem wir Messungen für viele q durchführen, versuchen wir $\hat{f}(\xi)$ in einem möglichst großen Gebiet Ω zu erhalten. Wir betrachten zwei Beispiele:

Beispiele: 1) SAR (Synthetic Aperture Radar)

Die Antenne q bewege sich entlang einer Geraden, die weit vom Objekt entfernt ist (z.B. an einem Flugzeug). Dann durchläuft θ den Halbkreis $\{\theta(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T : |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\}$. Mit der Normierung $c_0 = 2$ ist $2k\theta = \omega\theta$ und $\hat{f}(\xi)$ ist in dem halben Kreisring $\Omega = \{\xi = \omega\theta(\varphi) : |\omega - \omega_c| \leq \frac{b}{2}, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\}$ gegeben (siehe Abbildung 3.4).

2) ISAR (Inverse SAR)

Der Unterschied zu SAR besteht darin, dass die Antenne q fest ist und sich das Objekt (z.B. ein Flugzeug oder Schiff) bzgl. der Antenne dreht. Eine eventuelle Translation wird nicht berücksichtigt. Sei $R(t)$ die Rotationsmatrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

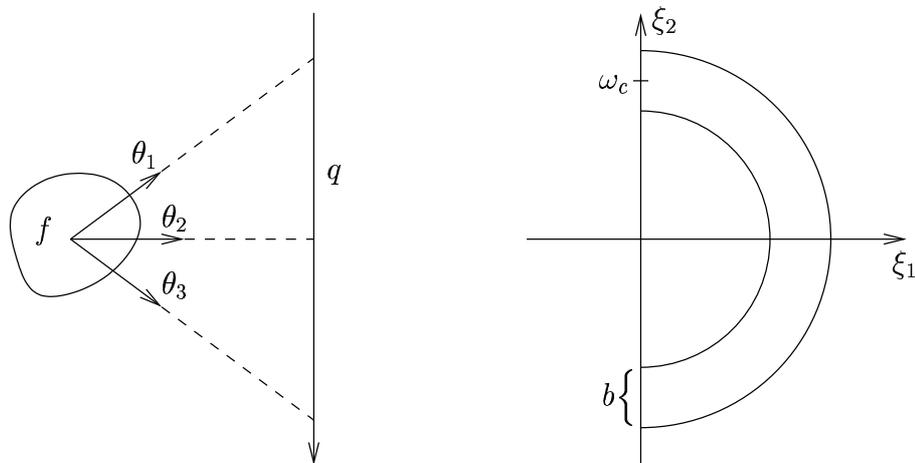


Abbildung 3.4: SAR. *Links:* Die Antenne bewegt sich entlang einer weit vom Objekt entfernten Geraden. *Rechts:* $\hat{f}(\xi)$ ist in einem halbem Kreisring der Breite b bekannt.

Wir nehmen an, dass der Winkel $\varphi(t)$ durch $|\varphi(t)| \leq \phi = 1^\circ$ beschränkt und durch Dopplerradar bekannt ist. Zur Zeit t wird somit nicht mehr $f(x)$ sondern $f(R(t)x)$ gemessen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 V(q, \omega) &= \frac{k^2 S(\omega)}{16\pi^2} \frac{e^{2ik|q|}}{|q|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2ik\frac{q}{|q|} \cdot y} f(R(t)y) dy \quad (y' = R(t)y) \\
 &= \frac{k^2 S(\omega)}{16\pi^2} \frac{e^{2ik|q|}}{|q|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2ik\frac{R(t)q}{|q|} \cdot y'} f(y') dy' \\
 &= \frac{k^2 S(\omega)}{4(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{2ik|q|}}{|q|^2} \hat{f}(2kR(t)\theta).
 \end{aligned}$$

Da q bzw. θ fest ist, ist $\hat{f}(\xi)$ nur in dem sehr kleinen Bereich $\Omega = \{\xi = \omega\theta(\varphi) : |\omega - \omega_c| \leq \frac{b}{2}, |\varphi| \leq \phi\}$ gegeben (siehe Abbildung 3.5). Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, inwiefern f durch diese Werte von \hat{f} bestimmt ist.

Ist $f \in C_0(\mathbb{R})$ und ist $\hat{f}(\xi)$ für $\xi \in [-r, r] \subset \mathbb{R}$ gegeben, so ist f theoretisch eindeutig bestimmt, denn

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

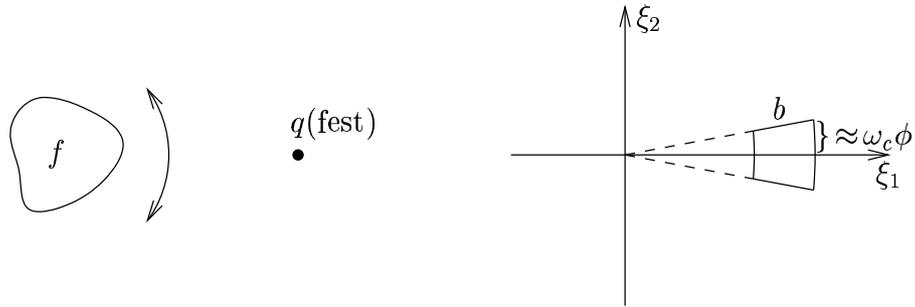


Abbildung 3.5: ISAR. *Links:* Die Antenne q ist fest und das Objekt dreht sich um die eigene Achse. *Rechts:* $\hat{f}(\xi)$ ist nur in einem kleinem Segment des Kreisrings bekannt.

ist analytisch in ξ und kann durch Potenzreihenentwicklung auf ganz \mathbb{R} berechnet werden. Dieses Verfahren ist aber äußerst instabil und hat daher keinen praktischen Nutzen.

Wir versuchen auf einem anderen Weg Informationen über die Funktion f zu erhalten. Wir definieren

$$\hat{K}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \xi \in \Omega \\ 0 & \text{falls } \xi \notin \Omega. \end{cases}$$

Dann ist $\hat{K}\hat{f}$ durch die ISAR-Daten bekannt und wir können

$$(\hat{K}\hat{f})^\sim = (2\pi)^{-3/2} K * f$$

berechnen (ist stabil). Wir nehmen $f_R = K * f$ als eine Rekonstruktion der Funktion f . Die Faltung bezeichnen wir als Filterung von f mit dem Filter K . Wir sagen (für $n = 1$), K sei ein

- Tiefpass, falls $\hat{K}(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq \xi_0$,
- Hochpass, falls $\hat{K}(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq \xi_0$,
- Bandpass, falls $\hat{K}(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq \xi_0 \vee |\xi| \geq \xi_1$.

Wir untersuchen, inwiefern f und die Rekonstruktion $f_R = K * f$ zusammenhängen. Wir beschränken uns zunächst auf den 1-dimensionalen Fall.

1D: Wir berechnen zunächst den Filter K (vgl. (3.15)):

$$\begin{aligned} K(x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\omega_c - b/2}^{\omega_c + b/2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= (2\pi)^{-1/2} b e^{i\omega_c x} \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{2}x\right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (K * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} K(x-y) f(y) dy \\ &= (2\pi)^{-1/2} b \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_c(x-y)} \underbrace{\operatorname{sinc}\left(\frac{b}{2}(x-y)\right)}_{=F_x(y)} f(y) dy. \end{aligned}$$

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist auch $F_x \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und eine Hochfrequenzanalyse ergibt

$$\begin{aligned} (K * f)(x) &= (2\pi)^{-1/2} b e^{i\omega_c x} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_c y} F_x(y) dy \\ &= b e^{i\omega_c x} \hat{F}_x(\omega_c) \\ &= b e^{i\omega_c x} O(\omega_c^{-N}), \quad \forall N > 0, \end{aligned}$$

denn die Fourier-Transformierte einer C_0^∞ -Funktion verschwindet im Unendlichen schneller als jede Potenz von ξ . Das bedeutet, dass wir keine glatten Funktionen sehen können!

Sei nun $f = \sum_{l=1}^p f_l \delta(x - x_l)$ ein Objekt, das aus p Punkten an den Stellen x_l besteht. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (K * f)(x) &= \sum_{l=1}^p f_l (K * \delta)(x - x_l) \\ &= \sum_{l=1}^p f_l K(x - x_l) \\ &= (2\pi)^{-1/2} b \sum_{l=1}^p f_l e^{i\omega_c(x-x_l)} \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{2}(x-x_l)\right). \end{aligned}$$

Die Funktionen $\text{sinc}\left(\frac{b}{2}(x - x_l)\right)$ repräsentieren ein Objekt der Breite $\frac{4\pi}{b}$ um den Punkt x_l . Ist $\|x_l - x_k\| \gg \frac{4\pi}{b}$ für alle $k \neq l$ (Faktor 1.5 reicht in der Praxis), so sind die Objekte weit genug voneinander entfernt um sie zu unterscheiden und es gilt ungefähr

$$|(K * f)(x)| = (2\pi)^{-1/2} b \sum_{l=1}^p |f_l| \left| \text{sinc}\left(\frac{b}{2}(x - x_l)\right) \right|.$$

Wir erhalten also die Auflösung $\frac{4\pi}{b}$, die nur von der Bandbreite b nicht aber von der zentralen Frequenz ω_c abhängig ist. ω_c ist dafür zuständig, die glatten Teile der Funktion f zu vernichten.

2D: Sei

$$\hat{K}(\xi) = \hat{K}_b(\xi - \omega_c \alpha), \quad \alpha \in S^1,$$

wobei \hat{K}_b die charakteristische Funktion des Quadrats mit Seitenlänge b , also $\hat{K}(\xi) = 0$ für $\|\xi\|_\infty \geq \frac{b}{2}$, sei. Aus (2.3), (2.4) und (2.6) folgt

$$K(x) = e^{i\omega_c \alpha \cdot x} K_b(x), \quad K_b(x) = \frac{b^2}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{b}{2}x_1\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{2}x_2\right).$$

Wir berechnen $K * f$ für verschiedene Funktionen f :

1) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Wie im 1-dimensionalen Fall folgt $K * f = O(\omega_c^{-N})$ für alle $N > 0$.

2) Sei $f(x) = \sum_{l=1}^p f_l \delta(x - x_l)$. Wie oben erhalten wir $(K * f)(x) = \sum_{l=1}^p f_l K(x - x_l)$, d.h. die Punkte sind mit der Auflösung $\frac{4\pi}{b}$ sichtbar.

3) Das Objekt sei eine Kurve $\Gamma : x = \gamma(s)$, $s_1 \leq s \leq s_2$ mit $|\gamma'(s)| = 1$. Wir können f als Distribution auffassen. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$f[\varphi] = \int_{\Gamma} \varphi(x) d\sigma(x) = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(\gamma(s)) ds.$$

Somit folgt laut Definition der Faltung für Distributionen

$$\begin{aligned}
 (f * K)(x) &= f[(\check{K})_x] = \int_{s_1}^{s_2} (\check{K})_x(\gamma(s)) ds \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \check{K}(\gamma(s) - x) ds = \int_{s_1}^{s_2} K(x - \gamma(s)) ds \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} e^{i\omega_c \alpha \cdot (x - \gamma(s))} K_b(x - \gamma(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Sei $x \notin \Gamma$ und $\text{dist}(x, \Gamma) \gg \frac{4\pi}{b}$. Da K_b glatt und $e^{i\omega_c \alpha \cdot (x - \gamma(s))}$ hochoszillierend ist, gilt

$$(K * f)(x) = O(\omega_c^{-N}) \quad \forall N > 0.$$

b) Sei $x \in \Gamma$, $x = \gamma(s_0)$ mit $s_1 \leq s_0 \leq s_2$. Dann ist

$$(K * f)(x) = \int_{s_1}^{s_2} e^{i\omega_c \alpha \cdot (\gamma(s_0) - \gamma(s))} K_b(\gamma(s_0) - \gamma(s)) ds.$$

i) Sei Γ glatt in einer Umgebung von x . Dann gilt bis auf $O((s_0 - s)^2)$

$$\gamma(s_0) - \gamma(s) = (s_0 - s)\gamma'(s_0).$$

Mit $\beta = \gamma'(s_0)$ folgt

$$\begin{aligned}
 (K * f)(x) &= \int_{s_1}^{s_2} e^{i\omega_c \alpha \cdot \beta(s_0 - s)} K_b((s_0 - s)\beta) ds \quad (s \rightarrow s_0 - s) \\
 &= \int_{s_0 - s_2}^{s_0 - s_1} e^{i\omega_c \alpha \cdot \beta s} K_b(s\beta) ds \\
 &= (2\pi)^{1/2} \tilde{K}_{b,\beta}(\omega_c \alpha \cdot \beta), \quad K_{b,\beta}(s) = K_b(s\beta).
 \end{aligned}$$

Für $\alpha \perp \beta$ ist $(K * f)(x) = (2\pi)^{1/2} \tilde{K}_{b,\beta}(0)$ nicht klein für $\omega_c \rightarrow \infty$. Γ heißt in diesem Fall specular und übertönt alle anderen Signale. Ist dagegen $\alpha \parallel \beta$,

so gilt $(K * f)(x) = (2\pi)^{1/2} \tilde{K}_{b,\beta}(\pm\omega_c) \approx 0$ und Γ ist nicht zu sehen.

ii) Sei $x = \gamma(s_0)$ eine Ecke von γ mit

$$\gamma'(s) = \begin{cases} \beta_- & \text{falls } s < s_0 \\ \beta_+ & \text{falls } s > s_0. \end{cases}$$

und $\beta_+ \neq \beta_-$. Dann ist

$$\gamma(s_0) - \gamma(s) = \begin{cases} (s_0 - s)\beta_- & \text{falls } s < s_0 \\ (s_0 - s)\beta_+ & \text{falls } s > s_0 \end{cases}$$

und mit $c(x) = e^{i\omega_c \alpha \cdot x} K_b(x)$ folgt durch wiederholte partielle Integration

$$\begin{aligned} (K * f)(x) &= \int_{s_1}^{s_0} e^{i\omega_c \alpha \cdot \beta_- (s_0 - s)} K_b((s_0 - s)\beta_-) ds \\ &\quad + \int_{s_0}^{s_2} e^{i\omega_c \alpha \cdot \beta_+ (s_0 - s)} K_b((s_0 - s)\beta_+) ds \\ &= \frac{1}{-i\omega_c \alpha \cdot \beta_-} (K_b(0) - c(\beta_- (s_0 - s_1))) \\ &\quad + \frac{1}{i\omega_c \alpha \cdot \beta_+} (K_b(0) - c(\beta_+ (s_0 - s_2))) + O(\omega_c^{-2}). \end{aligned}$$

Wir können $c(\beta_{\mp}(s_0 - s_{1/2}))$ gegenüber $K_b(0) = c(0)$ vernachlässigen und erhalten

$$(K * f)(x) \approx \left(\frac{1}{i\omega_c \alpha \cdot \beta_+} - \frac{1}{i\omega_c \alpha \cdot \beta_-} \right) K_b(0) + O(\omega_c^{-2}),$$

d.h. Ecken sind auf einem ISAR-Bild sichtbar.

Wir haben oben angenommen, dass $\hat{K}(\xi) = K_b(\xi - \omega_c \alpha)$ die charakteristische Funktion des Quadrates Ω mit Seitenlänge b und Mittelpunkt in $\omega_c \alpha$ ist. In der Situation von Abbildung 3.5 ist $\alpha = e_1$ und Ω ist kein Quadrat, sondern in etwa ein Rechteck mit den Seitenlängen $b_1 = b$ und $b_2 = 2\phi\omega_c$. Das bedeutet, wir erhalten zwei verschiedene Auflösungen, nämlich

- $\frac{4\pi}{b}$ in x_1 -Richtung (downrange) und
- $\frac{2\pi}{\phi\omega_c}$ in x_2 -Richtung (crossrange).

Kapitel 4

Tomographie

4.1 Gefilterte Rückprojektion

Die gefilterte Rückprojektion ist ein Verfahren zur Rekonstruktion einer Funktion f aus den Werten ihrer Radon-Transformation Rf , das auf dem folgenden Satz beruht. Wir beweisen den Satz nur für C_0^∞ -Funktionen, werden ihn später aber auch auf andere Funktionen anwenden.

Satz 4.1.1 Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g = Rf$, $v \in C_0^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ und $V = R^*v$. Dann gilt

$$V * f = R^*(v * g).$$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}(V * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} V(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (R^*v)(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} v(\theta, (x-y) \cdot \theta) f(y) d\sigma(\theta) dy \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} v(\theta, (x-y) \cdot \theta) f(y) dy d\sigma(\theta) \quad (y = s\theta + z, z \in \theta^\perp) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta^\perp} v(\theta, x \cdot \theta - s) f(s\theta + z) dz ds d\sigma(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} v(\theta, x \cdot \theta - s) (Rf)(\theta, s) ds d\sigma(\theta) \\
&= \int_{S^{n-1}} (v * g)(\theta, x \cdot \theta) d\sigma(\theta) \\
&= (R^*(v * g))(x)
\end{aligned}$$

□

Unser Ziel ist es, V so zu wählen, dass $f \approx V * f$ gilt, d.h. V muss eine Approximation der δ -Funktion sein. Durch Fourier-Transformation erhalten wir

$$\hat{f} \approx (V * f)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{V} \hat{f},$$

also

$$\hat{V} \approx (2\pi)^{-n/2}.$$

Sei

$$\hat{\phi}(\sigma) \begin{cases} \approx 1 & \text{falls } |\sigma| \leq 1 \\ = 0 & \text{falls } |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Dann setzen wir für $\Omega > 0$

$$\hat{V}_\Omega(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \hat{\phi}\left(\frac{|\xi|}{\Omega}\right)$$

und erhalten somit

$$f \approx V_\Omega * f = R^*(v_\Omega * g), \quad (4.1)$$

wobei v_Ω durch $V_\Omega = R^* v_\Omega$ gegeben ist. Gleichung (4.1) erklärt den Namen gefilterte Rückprojektion: Die Datenfunktion g wird zunächst mit dem Filter v_Ω gefaltem (gefiltert) und dann rückprojiziert. Da mit V_Ω auch $V_\Omega * f$ Ω -bandbeschränkt ist, hat die Rekonstruktion die Auflösung Ω , d.h. die kleinsten sichtbaren Details haben die Größe $\frac{2\pi}{\Omega}$.

Der folgende Satz hilft uns, v_Ω aus V_Ω zu berechnen.

Satz 4.1.2 Sei $g \in \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ gerade, d.h. $g(-\theta, -s) = g(\theta, s)$. Dann gilt

$$(R^*g)^\wedge(\xi) = 2(2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \hat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right).$$

Beweis: Da R^*g im Allgemeinen nicht in $L_1(\mathbb{R}^n)$ liegt, müssen wir die Fourier-Transformation auf der linken Seite in \mathcal{S}' bilden. Sei also $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
(R^*g)^\wedge[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (R^*g)(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&\stackrel{(2.35)}{=} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta, s) (R\hat{\varphi})(\theta, s) ds d\sigma(\theta) \\
&\stackrel{(2.9)}{=} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\theta, s) \underbrace{(R\hat{\varphi})^\sim(\theta, s)}_{=(2\pi)^{(n-1)/2} \tilde{\varphi}(s\theta)} ds d\sigma(\theta) \\
&= (2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{g}(\theta, s) \varphi(s\theta) ds d\sigma(\theta) \\
&\quad + (2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \hat{g}(\theta, s) \varphi(s\theta) ds d\sigma(\theta).
\end{aligned}$$

Im letzten Integral substituieren wir $s \rightarrow -s$ und $\theta \rightarrow -\theta$. Da mit g auch \hat{g} gerade ist, stimmen die letzten beiden Integrale überein und wir erhalten

$$\begin{aligned}
(R^*g)^\wedge[\varphi] &= 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{g}(\theta, s) \varphi(s\theta) ds d\sigma(\theta) \quad (\xi = s\theta) \\
&= 2(2\pi)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{1-n} \hat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) \varphi(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

□

Mit diesem Satz können wir nun \hat{v}_Ω bestimmen:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_\Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) &= \frac{1}{2} (2\pi)^{(1-n)/2} |\xi|^{n-1} (R^*v_\Omega)^\wedge(\xi) \\
&= \frac{1}{2} (2\pi)^{(1-n)/2} |\xi|^{n-1} \hat{V}_\Omega(\xi) \\
&= \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} |\xi|^{n-1} \hat{\phi}\left(\frac{|\xi|}{\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass \hat{v}_Ω nur vom zweiten Argument abhängt. Setzen wir $\hat{\phi}$ als gerade voraus, so erhalten wir

$$\hat{v}_\Omega(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2-n}|\sigma|^{n-1}\hat{\phi}\left(\frac{\sigma}{\Omega}\right) \quad (4.2)$$

und

$$\begin{aligned} v_\Omega(s) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{n-1} \hat{\phi}\left(\frac{\sigma}{\Omega}\right) e^{is\sigma} d\sigma \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\sigma|^{n-1} \hat{\phi}\left(\frac{\sigma}{\Omega}\right) e^{is\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Es gibt viele verschiedene Vorschläge für die Wahl des Filters. Wir untersuchen einige typische Beispiele für den Fall $n = 2$.

Beispiele: 1) Wir betrachten den idealen Tiefpass

$$\hat{\phi}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |\sigma| \leq 1 \\ 0 & \text{falls } |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Wir erhalten

$$v_\Omega(s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-2} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\sigma| e^{is\sigma} d\sigma = \frac{\Omega^2}{4\pi^2} u_{RL}(\Omega s)$$

mit $u_{RL}(s) = \text{sinc}(s) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{s}{2}\right)$. Dies ist der Ram-Lak Filter, der nach Ramachandran und Lakshminarayanan benannt ist.

2) Sei nun

$$\hat{\phi}(\sigma) = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{\sigma\pi}{2}\right) & \text{falls } |\sigma| \leq 1 \\ 0 & \text{falls } |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Es ergibt sich der Shepp-Logan-Filter (siehe Aufgabe 41)

$$v_\Omega(s) = \frac{\Omega^2}{2\pi^3} u_{SL}(\Omega s), \quad u_{SL}(s) = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2} - s \sin s}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - s^2} & \text{falls } s \neq \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} & \text{falls } s = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3) Zuletzt betrachten wir den Cosinus-Filter, der durch

$$\hat{\phi}(\sigma) = \begin{cases} \cos(\frac{\sigma\pi}{2}) & \text{falls } |\sigma| \leq 1 \\ 0 & \text{falls } |\sigma| > 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Beispielen ist $\hat{\phi}$ stetig. Wir erhalten

$$v_{\Omega}(s) = \frac{\Omega^2}{8\pi^2} \left(u_{RL} \left(s\Omega + \frac{\pi}{2} \right) + u_{RL} \left(s\Omega - \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

4.2 Standard Parallelgeometrie

In diesem Abschnitt werden wir (4.1) für $n = 2$ diskretisieren. Wir nehmen an, dass f für $|x| > \rho$ verschwindet und wesentlich Ω -bandbeschränkt ist, d.h. $\hat{f}(\xi) \approx 0$ für $|\xi| > \Omega$. Dann ist $g(\theta, s) = (Rf)(\theta, s) = 0$ für $|s| > \rho$. Sei $g(\theta, s)$ für

$$\theta_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{pmatrix}, \quad \varphi_j = j\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{p}, \quad j = 0, \dots, p-1, \\ s_l = l\Delta s, \quad \Delta s = \frac{\rho}{q}, \quad l = -q, \dots, q$$

gegeben.

Im ersten Schritt berechnen wir das Faltungsintegral

$$(v_\Omega * g)(\theta, s) = \int_{-\rho}^{\rho} v_\Omega(s - s')g(\theta, s')ds'. \quad (4.3)$$

v_Ω ist Ω -bandbeschränkt (siehe Gleichung (4.2)) und der Projektionssatz 2.5.1 liefert, dass g wie f wesentlich Ω -bandbeschränkt ist. Aus der Folgerung zu Satz 2.6.2 folgt, dass wir (4.3) mit einer Schrittweite

$$\Delta s \leq \frac{\pi}{\Omega} \quad \text{bzw.} \quad q \geq \frac{\rho\Omega}{\pi} \quad (4.4)$$

diskretisieren müssen:

$$(v_\Omega * g)(\theta, s) = \Delta s \sum_{l=-q}^q v_\Omega(s - s_l)g(\theta, s_l). \quad (4.5)$$

Da g nur wesentlich Ω -bandbeschränkt ist, ist die Trapezregel hier nicht ganz exakt, der Fehler ist aber vernachlässigbar klein.

Im zweiten Schritt diskretisieren wir die Rückprojektion

$$R^*(v_\Omega * g)(x) = \int_0^{2\pi} (v_\Omega * g)(\theta(\varphi), x \cdot \theta(\varphi))d\varphi, \quad \theta(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Wir überlegen uns, welche Schrittweite $\Delta\varphi$ wir wählen müssen, um den Diskretisierungsfehler möglichst gering zu halten. Der Integrand $h(\varphi) = (v_\Omega * g)(\theta(\varphi), x \cdot \theta(\varphi))$

$g)(\theta(\varphi), x \cdot \theta(\varphi))$ ist 2π -periodisch. Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten

$$\hat{h}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} (v_\Omega * g)(\theta(\varphi), x \cdot \theta(\varphi)) d\varphi. \quad (4.6)$$

Aus dem Faltungs- und dem Projektionssatz folgt

$$\begin{aligned} (v_\Omega * g)(\theta, x \cdot \theta) &= ((v_\Omega * g)^\wedge)^\sim(\theta, x \cdot \theta) \\ &= (2\pi)^{1/2} (\hat{v}_\Omega \hat{g})^\sim(\theta, x \cdot \theta) \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{v}_\Omega(\sigma) \hat{g}(\theta, \sigma) d\sigma \\ &= (2\pi)^{1/2} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{v}_\Omega(\sigma) \hat{f}(\sigma\theta) d\sigma \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\sigma x \cdot \theta} \hat{v}_\Omega(\sigma) \int_{|y|<\rho} e^{-i\sigma\theta \cdot y} f(y) dy d\sigma \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{|y|<\rho} f(y) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\sigma(x-y) \cdot \theta} \hat{v}_\Omega(\sigma) d\sigma dy. \end{aligned}$$

Wir wählen $\psi \in [0, 2\pi)$ so, dass $x - y = |x - y|\theta(\psi)$ gilt. Somit haben wir $(x - y) \cdot \theta(\varphi) = |x - y|\theta(\psi) \cdot \theta(\varphi) = |x - y| \cos(\varphi - \psi)$ und erhalten

$$(v_\Omega * g)(\theta(\varphi), x \cdot \theta(\varphi)) = (2\pi)^{-1/2} \int_{|y|<\rho} f(y) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\sigma|x-y|\cos(\varphi-\psi)} \hat{v}_\Omega(\sigma) d\sigma dy.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (4.6) ein und vertauschen die Integrationsreihenfolge:

$$\hat{h}_k = (2\pi)^{-3/2} \int_{|y|<\rho} f(y) \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{v}_\Omega(\sigma) \int_0^{2\pi} e^{i\sigma|x-y|\cos(\varphi-\psi)-ik\varphi} d\varphi d\sigma dy.$$

Im innersten Integral substituieren wir $\varphi \rightarrow \varphi + \psi$ und erhalten (siehe Aufgabe 1)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i\sigma|x-y|\cos(\varphi-\psi)-ik\varphi} d\varphi &= e^{-ik\psi} \int_0^{2\pi} e^{i\sigma|x-y|\cos\varphi-ik\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi i^k e^{-ik\psi} J_k(\sigma|x-y|) \end{aligned}$$

sowie

$$\hat{h}_k = (2\pi)^{-1/2} i^k \int_{|y|<\rho} f(y) e^{-ik\psi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{v}_\Omega(\sigma) J_k(\sigma|x-y|) d\sigma dy.$$

Wir benutzen die Debyesche Beziehung, die besagt, dass $J_k(x)$ vernachlässigbar klein ist, falls $|x| < |k|$ und $|k|$ groß ist. Für $|x| < \rho$ ist $|\sigma|x-y|| < 2\rho\Omega$ und wir erhalten

$$\hat{h}_k \approx 0 \quad \text{für } |k| > 2\rho\Omega$$

und näherungsweise

$$h(\varphi) = \sum_{|k|<2\rho\Omega} \hat{h}_k e^{-ik\varphi}.$$

Ist nun $2p \geq 2\rho\Omega$, so liefert Aufgabe 37a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi &= \sum_{|k|<2\rho\Omega} \hat{h}_k \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} d\varphi = \sum_{|k|<2\rho\Omega} \hat{h}_k \frac{\pi}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} e^{-ik\varphi_j} \\ &= \frac{\pi}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} h(\varphi_j), \end{aligned}$$

d.h. die Trapezregel ist unter der Annahme $\hat{h}_k = 0$ für $|k| > 2\rho\Omega$ exakt. Wir erhalten also in etwa

$$\begin{aligned} R^*(v_\Omega * g)(x) &= \Delta\varphi \sum_{j=0}^{2p-1} (v_\Omega * g)(\theta_j, x \cdot \theta_j) \\ &= 2\Delta\varphi \sum_{j=0}^{p-1} (v_\Omega * g)(\theta_j, x \cdot \theta_j), \end{aligned} \quad (4.7)$$

falls

$$p \geq \rho\Omega \quad \text{bzw.} \quad \Delta\varphi \leq \frac{\pi}{\rho\Omega}.$$

(4.5) und (4.7) ergeben zusammen

$$(V_\Omega * f)(x) = 2\Delta\varphi\Delta s \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=-q}^q v_\Omega(x \cdot \theta_j - s_l)g(\theta_j, s_l). \quad (4.8)$$

Da f wesentlich Ω -bandbeschränkt ist, müssen wir (4.8) auf einem Gitter der Schrittweite $\frac{\pi}{\Omega}$, also für $O(\Omega^2)$ Werte von x , auswerten. Für jedes x benötigen wir $O(pq) = O(\Omega^2)$ Rechenoperationen. Insgesamt hat eine direkte Implementierung von (4.8) somit die Komplexität $O(\Omega^4)$.

Wir können den Rechenaufwand reduzieren, indem wir einen Interpolationsschritt einfügen. Zunächst berechnen wir $(v_\Omega * g)(\theta_j, s_l)$. Hierfür benötigen wir $O(\Omega^3)$ Rechenoperationen. Dann benutzen wir (4.7), um $(V_\Omega * f)(x)$ zu berechnen. Die Werte $(v_\Omega * g)(\theta_j, x \cdot \theta_j)$, die wir hierfür benötigen, können wir durch lineare Interpolation bestimmen. Für den zweiten Schritt brauchen wir auch $O(\Omega^3)$ Rechenoperationen, so dass wir insgesamt auf eine Komplexität von $O(\Omega^3)$ kommen.

Wir erhalten folgenden Algorithmus zur Berechnung der Rekonstruktion f_R :

1. Für $j = 0, \dots, p-1$ berechne die Faltung

$$h_{j,k} = \Delta s \sum_{l=-q}^q v_\Omega(s_k - s_l)g(\theta_j, s_l), \quad k = -q, \dots, q.$$

2. Für jeden Rekonstruktionspunkt x berechne die Rückprojektion

$$f_R(x) = 2\Delta\varphi \sum_{j=0}^{p-1} ((1 - \vartheta)h_{j,k} + \vartheta h_{j,k+1}),$$

wobei $k = k(j, x)$ und $\vartheta = \vartheta(j, x)$ durch

$$t = \frac{x \cdot \theta_j}{\Delta s}, \quad k = \lfloor t \rfloor, \quad \vartheta = t - k$$

gegeben sind.

4.3 Fächergeometrie

In diesem Abschnitt werden wir eine andere Abtastgeometrie betrachten. Wir nehmen an, dass eine Röntgenquelle auf einem Kreis mit Radius r um das Objekt f rotiert und dabei Röntgenstrahlen in einem Kreissektor (Fächer) mit dem Öffnungswinkel $2\gamma = 2 \arcsin \frac{\rho}{r}$ emittiert. Dann sind die Daten

$$\begin{aligned} g(\beta_j, \alpha_l) &= (Df)(r\theta(\beta_j), \theta(\alpha_l + \beta_j + \pi)) \\ &= (Rf)(\theta(\alpha_l + \beta_j - \frac{\pi}{2}), r \sin \alpha_l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_j &= j\Delta\beta, \quad \Delta\beta = \frac{2\pi}{p}, \quad j = 0, \dots, p-1, \\ \alpha_l &= l\Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \frac{\gamma}{q}, \quad l = -q, \dots, q \end{aligned}$$

gegeben (siehe Abbildung 4.1). Unser Ziel ist es, in der Formel

$$(V_\Omega * f)(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} v_\Omega(x \cdot \theta(\varphi) - s)(Rf)(\theta(\varphi), s) ds d\varphi$$

die Koordinaten β, α einzuführen. Es ist

$$\varphi = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}, \quad s = r \sin \alpha.$$

Dies ist eine Bijektion zwischen $[0, 2\pi) \times (-\gamma, \gamma)$ in der β - α -Ebene und $[0, 2\pi) \times (-\rho, \rho)$ in der φ - s -Ebene. Die zugehörige Funktionaldeterminante lautet

$$\frac{\partial(\varphi, s)}{\partial(\beta, \alpha)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} & \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial s}{\partial\beta} & \frac{\partial s}{\partial\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r \cos \alpha.$$

Somit erhalten wir

$$(V_\Omega * f)(x) = r \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} v_\Omega(x \cdot \theta(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}) - r \sin \alpha) g(\beta, \alpha) \cos \alpha d\alpha d\beta.$$

Diese Formel diskretisieren wir mit den Schrittweiten

$$\Delta\beta \leq \frac{r + \rho}{r} \frac{\pi}{\rho\Omega}, \quad \Delta\alpha \leq \frac{\pi}{r\Omega}$$

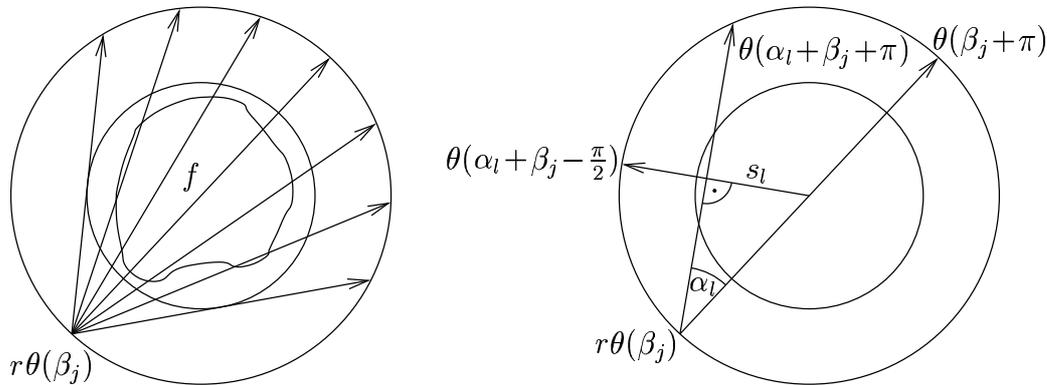


Abbildung 4.1: Fächergeometrie. *Links:* Die Röntgenquelle $r\theta(\beta_j)$ emittiert fächerförmige Strahlen, die das Gebiet $|x| \leq \rho$ abdecken. *Rechts:* Zusammenhang zwischen $(Df)(r\theta(\beta_j), \theta(\alpha_l + \beta_j + \pi))$ und $(Rf)(\theta(\alpha_l + \beta_j - \frac{\pi}{2}), r \sin \alpha_l)$.

(siehe [6, S.75ff]) und bekommen

$$(V_\Omega * f)(x) = r \Delta \beta \Delta \alpha \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=-q}^q v_\Omega(x \cdot \theta(\alpha_l + \beta_j - \frac{\pi}{2}) - r \sin \alpha_l) g(\beta_j, \alpha_l) \cos \alpha_l.$$

Eine direkte Implementierung dieser Formel liefert einen Algorithmus der Komplexität $O(\Omega^4)$. Da $x \cdot \theta(\alpha_l + \beta_j - \frac{\pi}{2})$ sowohl von α als auch von β abhängt, ist es in diesem Fall nicht so einfach - aber dennoch möglich -, den Rechenaufwand durch lineare Interpolation auf $O(\Omega^3)$ zu reduzieren (siehe [6, S.91ff]).

Kapitel 5

Schlecht gestellte Probleme

5.1 Einführung

Seien H, K normierte Räume und $A : H \rightarrow K$ ein linearer Operator. Wir betrachten folgendes Problem: Für $g \in K$ löse

$$Af = g. \tag{5.1}$$

Definition 5.1.1 (Hadamard) *Das Problem (5.1) ist gut gestellt, falls*

1. *es für alle $g \in K$ lösbar ist,*
2. *die Lösung eindeutig ist,*
3. *f stetig von g abhängt.*

Ein Problem ist schlecht gestellt, wenn es nicht gut gestellt ist.

Beispiele: 1)a) Seien $H = K = C([0, 1])$ und $(Af)(x) = \int_0^x f(x')dx'$. Dann ist

$$Af = g \iff \int_0^x f(x')dx' = g(x)$$

schlecht gestellt, denn es ist nicht lösbar, falls $g(0) \neq 0$ ist.

b) Sei nun $K = \{g \in C^1([0, 1]) : g(0) = 0\}$ mit der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm. Dann ist $Af = g$ für alle $g \in K$ eindeutig lösbar und die Lösung lautet $f = g'$.

Das Problem ist aber weiterhin schlecht gestellt, da f nicht stetig von g abhängt: Sei $g_n = g + \frac{1}{n} \sin(nx)$. Dann gilt $g_n \rightarrow g$ in K , aber die Lösungen $f_n = g'_n = g' + \cos(nx)$ konvergieren nicht gegen $f = g'$.

c) Sei K wie in b) allerdings versehen mit der Norm $\|g\| = \max_{[0,1]} |g'(x)|$. Dann ist das Problem gut gestellt:

$$\begin{aligned} g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g \text{ in } K &\iff g'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g' \text{ glm. in } [0, 1] \\ &\iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ glm. in } [0, 1] \\ &\iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ in } H. \end{aligned}$$

2) Seien $K = H = C[0, \infty)$ und

$$(Af)(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy.$$

Dieses Problem ist schlecht gestellt, da A^{-1} nicht stetig ist (vgl. Aufgabe 31). Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ radialsymmetrisch, also $f(y) = F(|y|)$. Dann ist (siehe Aufgabe 32)

$$(Rf)(\theta, s) = 2 \int_s^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2 - s^2}} F(t) dt$$

und f hängt nicht stetig von den Daten $g = Rf$ der radialsymmetrischen Radon-Transformation ab. Allerdings können wir Stetigkeit durch Filtern der Daten erzwingen.

3) Ein typisches Beispiel für lineare Operatoren sind Integralgleichungen 1. Art:

$$(Af)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy, \quad x \in D.$$

Diese sind im Allgemeinen schlecht gestellt. Wir können die Radon-Transformation als eine solche Integralgleichung auffassen, indem wir $x = (\theta, s)$, $k(x, y) = \delta(y \cdot \theta - s)$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$ setzen.

4) Wir betrachten eine spezielle Integralgleichung, bei der der Kern K nur von der Differenz $x - y$ abhängt, also $K(x, y) = K(x - y)$. Es ergibt sich die Faltungsgleichung

$$(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y)f(y)dy = (K * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ist $K \in L_2(\mathbb{R}^n)$, so können wir A als Abbildung $A : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ auffassen. Durch Fourier-Transformation erhalten wir

$$(Af)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{K}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Für $\hat{K}(\xi) \neq 0$ ist diese Gleichung lösbar:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \frac{(Af)^\wedge(\xi)}{\hat{K}(\xi)}.$$

Allerdings ist diese Lösung nicht notwendig quadratintegrierbar.

5) Als letztes Beispiel betrachten wir den endlich dimensionalen Fall

$$A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$$

mit einer $(m \times n)$ -Matrix A . Im Allgemeinen ist

$$Af = g$$

dann ein über- bzw. unterbestimmtes lineares Gleichungssystem.

5.2 Der endlich dimensionale Fall

Beispiel: Wir diskretisieren die Integralgleichung

$$\int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy = g(x)$$

und erhalten

$$\sum_{l=1}^L K(x_j, y_l) f(y_l) w_l = g(x_j), \quad j = 1, \dots, J.$$

Wir werden etwas konkreter und betrachten das Beispiel

$$\int_0^x f(y) dy = g(x).$$

Mit $x_j = jh$ und $y_l = lh$ lautet dies in diskreter Form

$$h \sum_{l=1}^j f(lh) = g(jh), \quad j = 1, \dots, J. \quad (5.2)$$

Wir setzen

$$A = h \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{1} & & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(h) \\ \vdots \\ F(Jh) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g(h) \\ \vdots \\ g(Jh) \end{pmatrix}$$

und können (5.2) in der Form

$$AF = G$$

schreiben. Wir berechnen nun die Konditionszahl $k_{\infty}(A)$. Dazu benötigen wir die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\|A\|_\infty = \max_j \sum_k |a_{j,k}| = hJ$ und $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{2}{h}$ erhalten wir

$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 2J.$$

Bei der Diskretisierung schlecht gestellter Probleme treten also Matrizen mit schlechter Kondition auf.

Wir wollen nun den Begriff der verallgemeinerten Inversen wiederholen. Sei A eine $(m \times n)$ -Matrix. Dann nennen wir f^+ die verallgemeinerte (oder Moore-Penrose) Lösung von $Af = g$, falls gilt

- 1) f^+ minimiert $\|Af - g\|_2$.
- 2) Unter allen Lösungen von 1. hat f^+ die kleinste Norm $\|f^+\|_2$.

Diese Bedingungen sind jeweils äquivalent zu

- 1') $A^*Af^+ = A^*g$ (Normalengleichung)
- 2') $f^+ \in \text{range}(A^*)$.

f^+ ist eindeutig bestimmt und die durch $f^+ = A^+g$ definierte lineare Abbildung heißt die verallgemeinerte Inverse von A .

Die verallgemeinerte Inverse existiert auch im unendlich dimensionalen Fall, allerdings ist sie dann im Allgemeinen nicht stetig. Durch Regularisierung können wir Stetigkeit erreichen. Wir bleiben zunächst beim endlich dimensionalen Fall und führen das Funktional

$$J_\omega(f) = \|Af - g\|_2^2 + \omega \|f\|_2^2 \quad (5.3)$$

mit dem Regularisierungsparameter $\omega > 0$ ein. Wir nennen f_ω die regularisierte Lösung, wenn f_ω das Funktional J_ω minimiert, also

$$J_\omega(f_\omega) \leq J_\omega(f) \quad \forall f \in \mathbb{R}^n.$$

Die beiden Bedingungen 1) und 2) werden also zu einer Minimierungsaufgabe zusammengefasst und je nach Wahl von ω unterschiedlich gewichtet. Dies ist die Regularisierung nach Tychonoff und Phillips (1944).

Satz 5.2.1 f_ω ist die eindeutig bestimmte Lösung von

$$(A^*A + \omega I_n)f_\omega = A^*g. \quad (5.4)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Für $f \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} ((A^*A + \omega I_n)f, f) &= (A^*Af, f) + \omega(f, f) = \underbrace{(Af, Af)}_{\geq 0} + \omega(f, f) \\ &\geq \omega(f, f). \end{aligned}$$

Wegen $\omega > 0$ ist $A^*A + \omega I_n$ positiv definit und invertierbar. Somit ist die Lösung von (5.4) eindeutig bestimmt.

Sei f_ω die Lösung von (5.4) und $C = A^*A + \omega I_n$. Wegen $Cf_\omega = A^*g$ und $C^* = C$ erhalten wir

$$\begin{aligned} J_\omega(f) &= (Af - g, Af - g) + \omega(f, f) \\ &= (A^*Af, f) - (A^*g, f) - (f, A^*g) + (g, g) + \omega(f, f) \\ &= (Cf, f) - (Cf_\omega, f) - (f, Cf_\omega) + (g, g) \\ &= (C(f - f_\omega), f) - (Cf, f_\omega) + (g, g) \\ &= (C(f - f_\omega), f) - (C(f - f_\omega), f_\omega) - (Cf_\omega, f_\omega) + (g, g) \\ &= (C(f - f_\omega), f - f_\omega) - (Cf_\omega, f_\omega) + (g, g). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass f_ω J_ω minimiert. □

Satz 5.2.2 *Es gilt $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_\omega = f^+$.*

Beweis: Wir setzen ohne Beweis voraus, dass f_ω konvergiert und setzen $f_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} f_\omega$. Aus

$$\begin{aligned} \|Af_\omega - g\|_2^2 &\leq \|Af_\omega - g\|_2^2 + \omega\|f_\omega\|_2^2 = J_\omega(f_\omega) \\ &\leq J_\omega(f^+) = \|Af^+ - g\|_2^2 + \omega\|f^+\|_2^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\|Af_0 - g\|_2^2 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \|Af_\omega - g\|_2^2 \leq \|Af^+ - g\|_2^2.$$

Somit löst f_0 1).

Wir müssen noch zeigen, dass f_0 Bedingung 2) bzw. 2') erfüllt. Aus

$$A^*(AA^* + \omega I_m) = (A^*A + \omega I_n)A^*$$

folgt

$$(A^*A + \omega I_n)^{-1}A^* = A^*(AA^* + \omega I_m)^{-1}$$

und

$$f_\omega = (A^*A + \omega I_n)^{-1} A^*g = A^*(AA^* + \omega I_m)^{-1}g \in \text{range}(A^*).$$

Also ist $f_0 \in \text{range}(A^*)$. □

Wir betrachten nun einen anderen Zugang zur Regularisierung. Sei A eine $(m \times n)$ -Matrix. Dann ist A^*A eine symmetrische und positiv definite $(n \times n)$ -Matrix, denn $(A^*Af, f) = (Af, Af) \geq 0$. A^*A habe die Eigenwerte

$$\underbrace{\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2, 0, \dots, 0}_n, \quad 0 < \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_p.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$$

bilden eine ONB des \mathbb{R}^n . Die ersten p Vektoren fassen wir zu der $(n \times p)$ -Matrix $V = (v_1, \dots, v_p)$ zusammen. Für $k = 1, \dots, p$ setzen wir

$$u_k = \frac{1}{\sigma_k} Av_k \in \mathbb{R}^m. \quad (5.5)$$

Dann gilt

$$A^*u_k \stackrel{(5.5)}{=} \frac{1}{\sigma_k} A^*Av_k = \sigma_k v_k \quad (5.6)$$

und

$$AA^*u_k \stackrel{(5.6)}{=} A\sigma_k v_k \stackrel{(5.5)}{=} \sigma_k^2 u_k. \quad (5.7)$$

A^*A und AA^* haben also die gleichen von Null verschiedenen Eigenwerte σ_k^2 und wir können die Eigenvektoren u_k durch Vektoren aus dem Kern von AA^* zu einer ONB des \mathbb{R}^m ergänzen. Für $k = p+1, \dots, m$ ist also $(A^*u_k, A^*u_k) = (AA^*u_k, u_k) = 0$ und somit $A^*u_k = 0$. Analog gilt $Av_k = 0$ für $k = p+1, \dots, n$.

Sei nun $f \in \mathbb{R}^n$. Dann haben wir für Af die Darstellung

$$\begin{aligned} Af &= \sum_{k=1}^m (Af, u_k) u_k = \sum_{k=1}^m (f, A^*u_k) u_k \\ &= \sum_{k=1}^p (f, A^*u_k) u_k \stackrel{(5.6)}{=} \sum_{k=1}^p \sigma_k (f, v_k) u_k \\ &= \sum_{k=1}^p \sigma_k v_k^* f u_k. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Setzen wir

$$V^* = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_p^* \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_p \end{pmatrix}, \quad U = (u_1, \dots, u_p),$$

so ist (5.8) gleichbedeutend mit

$$Af = U\Sigma V^* f.$$

Wir nennen

$$A = U\Sigma V^* \tag{5.9}$$

die Singulärwertzerlegung (kurz SVD: singular value decomposition) von A .

Satz 5.2.3 *Es ist $A^+ = V\Sigma^{-1}U^*$.*

Beweis: Mit $(AB)^+ = B^+A^+$, $(V^*)^+ = V$ und $U^+ = U^*$ folgt die Behauptung sofort aus (5.9). \square

Für die Moore-Penrose-Lösung f^+ erhalten wir also

$$f^+ = V\Sigma^{-1}U^*g = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sigma_k} (g, u_k) v_k. \tag{5.10}$$

Ist nun g nur näherungsweise bekannt, so können kleine σ_k den Datenfehler verstärken. Wir regularisieren die Lösung, indem wir die Summe abschneiden

$$f_\omega^+ = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ \sigma_k \geq \omega}} \frac{1}{\sigma_k} (g, u_k) v_k, \quad \omega > 0. \tag{5.11}$$

Dann gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f_\omega^+ = f^+.$$

Eine allgemeinere Methode zur Regularisierung von (5.10) erhalten wir, indem wir

$$T_\omega g = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sigma_k} F_\omega(\sigma_k) (g, u_k) v_k$$

setzen. Dabei ist $F_\omega(\sigma)$ eine Funktion, die die kleinen σ_k herausfiltert. Wir betrachten einige Beispiele zur Wahl von F_ω .

Beispiele: 1) Wir setzen $F_\omega(\sigma) \equiv 1$. Dann erhalten wir die Moore-Penrose-Lösung:

$$T_\omega g = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sigma_k} (g, u_k) v_k = f^+.$$

Eine Regularisierung findet also nicht statt, da F_ω gar nicht von ω abhängt.

2) Sei

$$F_\omega(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \geq \omega \\ 0 & \text{falls } \sigma < \omega. \end{cases}$$

Dann ist

$$T_\omega g = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ \sigma_k \geq \omega}} \frac{1}{\sigma_k} (g, u_k) v_k = f_\omega^+.$$

3) Wir setzen $F_\omega(\sigma) = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\sigma^2}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_\omega g &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\sigma_k^2}} (g, u_k) v_k = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sigma_k^2 + \omega} (g, \sigma_k u_k) v_k \\ &\stackrel{(5.5)}{=} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sigma_k^2 + \omega} (g, Av_k) v_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2 + \omega} (g, Av_k) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n (A^* g, (\sigma_k^2 + \omega)^{-1} v_k) v_k. \end{aligned}$$

Aus $(A^* A + \omega I_n) v_k = A^* A v_k + \omega v_k = (\sigma_k^2 + \omega) v_k$ folgt

$$(\sigma_k^2 + \omega)^{-1} v_k = (A^* A + \omega I_n)^{-1} v_k.$$

Da mit $A^* A + \omega I_n$ auch $(A^* A + \omega I_n)^{-1}$ selbstadjungiert ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} T_\omega g &= \sum_{k=1}^n ((A^* A + \omega I_n)^{-1} A^* g, v_k) v_k \\ &= (A^* A + \omega I_n)^{-1} A^* g. \end{aligned}$$

Aus Satz 5.2.1 folgt

$$T_\omega g = f_\omega$$

mit der Tychonoff-Phillips-Lösung f_ω .

5.3 Erweiterung auf Operatoren

Im Folgenden sei $A : H \rightarrow K$ ein linearer, stetiger Operator zwischen den Hilberträumen H und K . Ist A zusätzlich kompakt, d.h. A bildet beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen ab, so erhalten wir wie im endlich dimensionalen Fall

$$\begin{aligned} A^* Av_k &= \sigma_k^2 v_k, & k = 1, \dots, p, & \quad p \leq \infty \\ AA^* u_k &= \sigma_k^2 u_k \\ Av_k &= \sigma_k u_k. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte seien so numeriert, dass

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$$

gilt. Dann können wir den Operator A darstellen als

$$Af = \sum_{k=1}^p \sigma_k (f, v_k) u_k.$$

Die verallgemeinerte Inverse

$$A^+ g = \sum_{\sigma_k > 0} \frac{1}{\sigma_k} (g, u_k) v_k$$

ist im Allgemeinen nicht mehr stetig, kann aber durch

$$T_\omega g = \sum_{\sigma_k > 0} \frac{1}{\sigma_k} F_\omega(\sigma_k) (g, u_k) v_k$$

regularisiert werden.

Satz 5.3.1 *Gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$, so ist $Af = g$ schlecht gestellt.*

Beweis: Falls ein k mit $\sigma_k = 0$ existiert, ist A nicht invertierbar und $Af = g$ ist schlecht gestellt. Sei nun $\sigma_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$. Wir nehmen an, dass A^{-1} stetig sei. Dann folgt aus $Av_k = \sigma_k v_k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{-1}(\sigma_k u_k)\| = \|A^{-1}(\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k u_k)\| = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\|v_k\| = 1$. Also ist A^{-1} nicht stetig und das Problem ist schlecht gestellt. \square

Definition 5.3.1 $Af = g$ ist

1. gut gestellt, falls $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$,
2. mäßig schlecht gestellt, falls $\sigma_k \sim k^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$
3. extrem schlecht gestellt, falls $\sigma_k \sim e^{-k}$.

Beispiele: 1) mäßig schlecht gestellt:

- Die Radon-Transformation sowie alle weiteren Integralgeometrischen Probleme mit vollständigen Daten
- Inverse Probleme der Wellengleichung und der Helmholtzgleichung (bei großem k)

2) extrem schlecht gestellt:

- Impedanz-Tomographie
- optische Tomographie
- Inverse Probleme von elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen

3) gut gestellt:

- Identität

Literaturverzeichnis

- [1] O.Forster, *Analysis 1*. Vieweg, 1983.
- [2] O.Forster, *Analysis 3*. Vieweg, 1984.
- [3] I.M.Gelfand, G.E.Schilov, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I-II*. DVW, 1960.
- [4] A.K.Louis, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner, 1989.
- [5] F.Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [6] F.Natterer, F.Wübbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, 2001.
- [7] L.Schwartz, *Théorie des Distribution*. Hermann, 1973.