Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 29.4.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei A eine reelle invertierbare (n,n)-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei $g(x) = f(Ax+b)$ mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Zeigen Sie:

(a) $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(b) $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\det(A)|}\, e^{ib\cdot A^{-T}\xi} \hat{f}(A^{-T}\xi)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $v(\xi) = \hat{f}/(1+|\xi|^2)$.
Zeigen Sie:

(a) $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(b) $-\Delta\tilde{v} + \tilde{v} = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen liegen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$?

(a) $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \left||x|^\alpha e^{c|x|^2}\right|,\ \alpha \geq 0,\ c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe)

Die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx\ .$$

(a) Schreiben Sie ein Programm zur näherungsweisen Berechnung von $\hat{f}(\xi)$, indem Sie f auf das Intervall $[-M, M]$ einschränken und die Trapezregel anwenden.

(b) Benutzen Sie eine numerische Bibliothek (NAG, IMSL, Numerical Recipes, scilab ...), um $\hat{f}(\xi_k)$, $\xi_k = \pi k/M$, effizient zu berechnen, $k = -N \dots N-1$.

Testen Sie Ihr Programm am Beispiel $f(x) = e^{-x^2/2}$, $M = 8$, $N =$ Anzahl der Diskretisierungspunkte $= 1024$.

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 2 , Abgabe: 7.5.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei H die Heaviside-Funktion. Zeigen Sie:

$$\hat{H} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $n = 2$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}\frac{x}{|x|^2} = 2\pi\delta$

(b) $\operatorname{div}\frac{x^\perp}{|x|^2} = 0$, $x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, sei $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \pi\delta$$

Bemerkung: $\delta(z) = \delta(x, y)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei $f(x) = p(x)e^{-x^2/2}$ mit einem Polynom p vom Grade n. Zeigen Sie, daß $\hat{f}$ die gleiche Gestalt hat.

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 3 , Abgabe: 13.5.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Ein sich mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^n$ bewegendes Bild $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ werde mit Belichtungszeit Δt photographiert. Auf dem Film entsteht dann das Bild

$$g(x) = \int_0^{\Delta t} f(x + tv)dt \; .$$

Sei T die Distribution

$$Th = \int_0^{\Delta t} h(-tv)dt \; .$$

Zeigen Sie:

(a) $g = f * T$
(b) $\hat{g}(\xi) = e^{ia} \operatorname{sinc}(a) \hat{f}(\xi) \Delta t \quad \text{mit } a = \Delta t v \cdot \xi/2$.

Kann man f aus g berechnen?

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Ein mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit T photographiert. Auf dem Film entsteht dann das verschmierte Bild

$$g(x) = \int_0^T f(U(t)x)dt \; , \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos\, \omega\, t & -\sin\, \omega\, t \\ \sin\, \omega\, t & \cos\, \omega\, t \end{pmatrix} .$$

Setzen Sie

$$x = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \; , \quad f(x) = \sum_k f_k(r) e^{ik\varphi} \; , \quad g(x) = \sum_k g_k(r) e^{ik\varphi}$$

und berechnen Sie die g_k aus den f_k.

Kann man f aus g berechnen?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Fourier-Reihen von

(a) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad |x| \le \pi/2 \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$ (b) $f(x) = |\sin x|$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe)

(a) Schreiben Sie ein Programm, das die Cosinus-Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ zu der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad x = -\pi \ldots \pi \ ,$$

auswertet.

(b) Berechnen Sie numerisch das Maximum der Reihe im Intervall $[\frac{\pi}{2} - 0.1, \frac{\pi}{2} + 0.1]$ für $n = 100,\ 1000,\ 10.000$ und erklären Sie das Ergebnis .

(c) Wiederholen Sie den Versuch mit der Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin(k\pi/2n)}{k\pi/2n} \right) \cdot (a_k \cos kx) \ .$$

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 20.5.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Für $h < \frac{\pi}{\Omega}$ gilt

$$e^{i\Omega x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\Omega kh} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x-kh)$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei f lokal integrierbar in $\mathbb{R}^1$ und periodisch mit der Periode $2A$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \hat{f} &= (2\pi)^{1/2} \sum_k \hat{f}_k \delta_{\pi k/A} , \\ \hat{f}_k &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} f(x) e^{-i\pi xk/A} dx . \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei f stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^1$ und periodisch mit der Periode $2A$. Zeigen Sie:

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = h \sum_{k=0}^{p-1} f(hk) - 2A \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}_{\ell p} , \qquad h = 2A/p$$

mit den f_k aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei mit der Notation von Aufgabe 3, Blatt 2

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} z^k/|z|^k & , \quad |z| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} . \end{cases}$$

(a) Stellen Sie $f(x)$ in $[-1,+1]^2$ auf einer 129×129-Matrix dar, $k = 10, 20, 30, 40$.

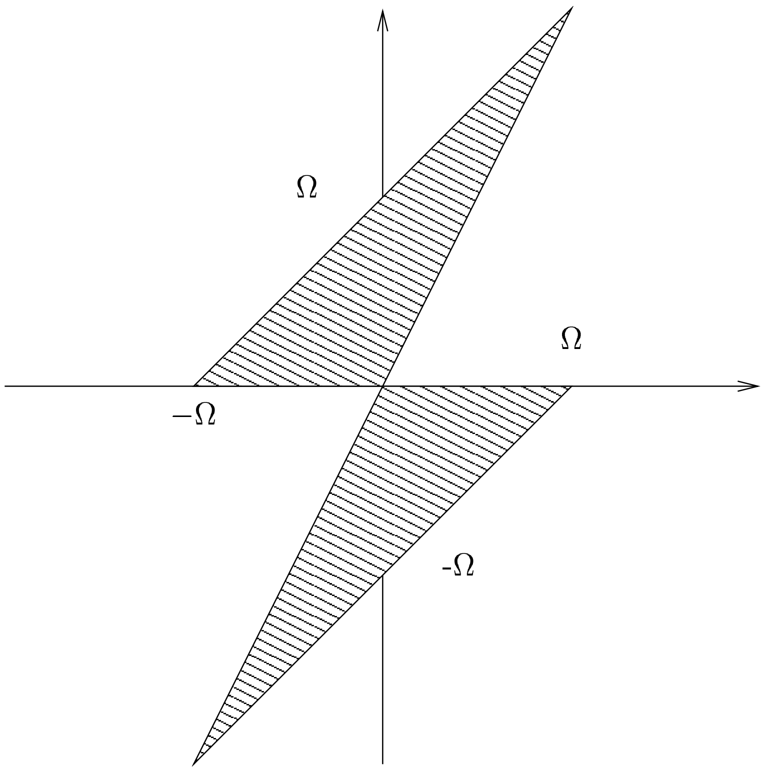
(b) Stellen Sie die zweidimensionale sinc-Reihe $S_h f$ für $h = 1/16$ wie in (a) dar.

(c) Vergleichen Sie die beiden Bilder.

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 5 , Abgabe: 10.6.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei K die Menge



Konstruieren Sie ein Gitter minimaler Dichte, so daß sich K-bandbeschränkte Funktionen fehlerfrei aus den abgetasteten Werten rekonstruieren lassen.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei f Ω-bandbeschränkt, $h \leq \pi/\Omega$, und

$$(I_h f)(x) = \sum_l f(hl)\chi\left(\frac{x-hl}{h}\right)$$

mit der charakteristischen Funktion χ von $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (“Sample and Hold”). Zeigen Sie:

$$I_h f = F_h * f + a_h,$$

wobei $\widehat{a_h}(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq \pi/h$ und

$$\widehat{F_h}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\begin{cases} \mathrm{sinc}(\frac{\xi h}{2}), & |\xi| \leq \frac{\pi}{h} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Stellen Sie die Funktionen $\widehat{F_h}$ und F_h graphisch dar.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Machen Sie sich mit den Funktionen zur Audioausgabe in Matlab oder Scilab vertraut. Benutzen Sie die Funktionen wavwrite und sound bzw. savewave.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das eine T Sekunden lange Audiodatei mit dem Kammerton A (440 Hz) bei einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde erstellt.
(b) Schreiben Sie ein Programm, das eine Audiodatei erstellt, die die Funktion $\sin(t^2/A^2)$ (chirp) für $t = 0 \ldots T$ (Sekunden) mit einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde repräsentiert.
(c) Testen Sie Ihr Programm für $T = 5$ und $P = 8192$. Wählen Sie A so, daß bei $t = 5$ die Frequenz 1000 Hz beträgt.
(d) Spielen Sie Ihre Datei ab und erklären Sie das Ergebnis. Wie muß P mindestens gewählt werden, damit der Effekt nicht mehr auftritt?

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 6 , Abgabe: 14.6.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Geben Sie einen Algorithmus fft6 (ifft6) zur Berechnung der schnellen (inversen) Fouriertransformation der Länge $n = 6$ an, mit Hilfe des Algorithmus von Cooley und Tukey. Geben Sie, wie in der Vorlesung, alle Zwischenergebnisse an. Wieviele Rechenoperationen benötigen Sie?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Geben Sie einen Algorithmus fft7 zur Berechnung der schnellen Fouriertransformation der Länge $n = 7$ an, mit Hilfe des Algorithmus von Rader und Winograd. Benutzen Sie die Routinen fft6 bzw. ifft6 aus Aufgabe 2. Wieviele Rechenoperationen benötigen Sie?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Programmieren Sie die FFT für die Längen 6 und 7. Testen Sie Ihre Programme, indem Sie die Fouriertransformierte der Vektoren x mit $x_k = \exp(2\pi ikj/n)$ berechnen, $j = 0..n-1$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Machen Sie sich mit der zweidimensionalen Fouriertransformierten in Matlab und Scilab vertraut. Lösen Sie damit das folgende Problem:

Ein Bild B (http://wwwmath.uni-muenster.de/u/wuebbel/bild) soll komprimiert werden durch Weglassen von Fourierkoeffizienten. Berechnen Sie zunächst die Fourierkoeffizienten von B, setzen Sie dann ca. $x\%$ der Fourierkoeffizienten auf Null, und berechnen Sie die Rücktransformation, für $x = 50, 60, 70, 80, 90, 95, 96, 99$. Lassen Sie sich die neuen Bilder jeweils anzeigen.

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 7 , Abgabe: 17.6.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ reell und kausal. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f(t) &= 4(2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \mathrm{Re}\hat{f}(\omega) \cos \omega t d\omega \\ &= -4(2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \mathrm{Im}\hat{f}(\omega) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Fouriertransformation der kausalen Signale, die für $t > 0$ durch

$$x_n(t) = t^n e^{-\lambda t}, \ \lambda > 0, \, n = 0, 1, 2, \ldots$$

bzw.

$$y(t) = \cos(\omega_0 t)$$

gegeben sind. Hinweis zu y: Setzen Sie den Realteil von $\hat{y}$ als $c \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$ an und berechnen Sie mit der Hilberttransformation den Imaginärteil.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Seien x, h stabil und $y = h * x$. Zeigen Sie, daß dann auch y stabil ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini in der Form des Buches J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei x Ω-bandbeschränkt und $y = \mathcal{H}x$. Zeigen Sie:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int x(t-s) \frac{\sin^2(\Omega s)}{s} ds.$$

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 8 , Abgabe: 1.7.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Impulsantwort des Butterworth–Filters der Ordnung 3. Stellen Sie diese zusammen mit der Impulsantwort des idealen Tiefpasses graphisch dar.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Invertieren Sie die z-Transformation für

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{3}{4} + \frac{1}{8z}}$$

für $|z| > 1/2$ und für $1/4 < |z| < 1/2$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Für die kausale Folge

$$x_n = r^n(\sin n\alpha), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}, \ r > 0,$$

gilt

$$X(z) = \frac{r \sin \alpha}{z - 2r\cos\alpha + r^2/z}, \ |z| > r.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $H(z)$ die z-Transformation eines kausalen Filters der Länge n. Sei $\omega_k = \exp(2\pi i k/n)$, $k = 0 \dots n-1$. Zeigen Sie:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-n}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H(\omega_k)}{1 - \omega_k/z}$$

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 9 , Abgabe: 8.7.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß sich ein Butterworth–Filter der Ordnung 2 durch einen LRC–Schaltkreis realisieren läßt. Bestimmen Sie die Werte für L, R und C aus dem Parameter Ω.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Ein FIR–Filter h hat lineare Phase genau dann, wenn die Phase von $H'(\omega)$ eine lineare Funktion von ω ist.

Zeigen Sie: Ein reeller FIR–Filter h hat lineare Phase genau dann, wenn $h_{m+k} = h_{m-k}$ für ein m und alle k.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $W'(\omega)$ des Blackman–Windows

$$W_n = 0.42 + 0.5\cos\frac{\pi n}{N} + 0.08\cos\frac{2\pi n}{N},\ |n| \le N$$

numerisch für $N = 60$. Stellen Sie $|W'(\omega)|$ in $0 \le \omega \le 2\pi \cdot 5$ kHz graphisch (in dB) dar und vergleichen Sie mit der Übertragungsfunktion des Rechteck–Fensters. Wählen Sie die Schrittweite a als 10^{-4} Sekunden.

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 15.7.04, 13.00 Uhr, Übungskasten 49.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Die Operatoren $\uparrow q$ and $\downarrow p$ kommutieren genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie einen kausalen Filter mit $|H'(\omega)| = \cos^2 \frac{\omega}{2a}$. Ist er bis auf die Phase eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei B der Operator

$$(Bf)(t) = \frac{\Omega}{\pi} \int \operatorname{sinc} \Omega(t-s) f(s) \mathrm{ds}$$

in $L_2(\mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie:

1. $B^2 = B$.
2. B ist positiv semidefinit.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Ein Filter heißt Allpass–Filter, falls seine z-Transformation auf dem Einheitskreis den Betrag 1 hat. Zeigen Sie:

$$H(z) = \prod_{l=1}^{L} \frac{z_l \overline{z_l} - 1}{z - z_l}$$

ist die z-Transformation eines Allpasses, falls die z_l alle strikt außerhalb des Einheitskreises liegen.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Im Standard für ISDN-Kommunikation wird ein ADPCM–Encoder (Adaptive Differential PulseCode Modulation) definiert. Die schematische Definition des Netzwerks finden Sie unten. Der Prediktor aus A und B macht eine Vorhersage für das wahrscheinliche Signal $\hat{x}$, die Differenz $x - \hat{x}$ wird kodiert. In unserer Betrachtung ignorieren wir den Quantisierer Q und betrachten vereinfacht lineare Filter.

1. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion dieses Netzwerks.
2. Zeigen Sie: $r(n) = x(n)$.