

Mathematische Grundlagen der Nachrichtentechnik

F. Natterer

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik

Westf. Wilhelms-Universität Münster

Einsteinstrasse 62, D-48149 Münster, Germany

e-mail: nattere@math.uni-muenster.de

SS2004

Inhaltsverzeichnis

Bemerkung zu diesem Skriptum:

1. In dieser Ausarbeitung sind nur die Teile III, IV enthalten. Die Teile I, II sind durch andere Vorlesungen abgedeckt (z. B. Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen, WS 02-03) und in der Literatur leicht zugänglich, vergl. Literaturverzeichnis.
2. Im übrigen sei gewarnt: Sorgfältiges Korrekturlesen war aus Zeitmangel nicht möglich. Es können also kleinere Fehler und Umstimigkeiten nicht ausgeschlossen werden. Für Mitteilung bin ich dankbar (nattere@math.uni-muenster.de).
3. Die in der Vorlesung gezeigten Abbildungen auf Folien sind in dem Skriptum nicht enthalten.

1 Einleitung

Teil I

Fourier-Analyse und Distributionen

1 Die Fouriertransformation in \mathcal{S}

2 Distributionen

3 Die Fouriertransformation in L_1 und L_2

Teil II

Abtasttheorie

1 Das Abtasttheorem von Shannon

2 Das Abtasttheorem in \mathbb{R}^n

3 Berechnung von Fourierintegralen und Faltungen

4 Das Unbestimmtheitsprinzip

Teil III

Lineare Systeme

1 Kontinuierliche lineare Systeme in \mathbb{R}

Sei h eine reellwertige Funktion in \mathbb{R} . Sie definiert ein lineares (zeitinvariantes bzw. translationsinvariantes) System (oder Filter) gemäß

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)x(s)ds. \quad (1.1)$$

Dabei ist x das Eingangssignal (input), y das Ausgangssignal (output). Für $x = \delta$ (Impuls) haben wir $y = h$. Man nennt daher h die Impulsantwort (impulse response) des Systems.

Man nennt ein Signal x stabil, falls $x \in L_1$, d. h. x ist meßbar und

$$\int |x(s)|ds < \infty.$$

Man sagt ein Signal x habe endliche Energie, wenn $x \in L_2$, d. h. x meßbar und

$$\int |x(s)|^2 ds < \infty.$$

Entsprechende Sprechweisen hat man für Impulsantwort und das zugehörige System.

Die Beziehung (1) ist sinnvoll z. B. in den Fällen

$$\begin{aligned} & h, x \in \mathcal{S}, \\ & h \in \varphi, \quad x \in L_1 \text{ oder umgekehrt} \\ & h, x \in L_2, \\ & x \in \mathcal{S}', \quad h \in \varphi \text{ oder umgekehrt} \end{aligned}$$

Für $x = e^{iwt}$ haben wir

$$\begin{aligned} y(t) &= (2\pi)^{-1/2} \hat{h}(w) e^{iwt} \\ &= H(w)x(t) \end{aligned}$$

mit der Übertragungsfunktion (Frequenzgang, frequency response) $H(w) = (2\pi)^{1/2} \hat{h}(w)$. Da h reell ist gilt $\bar{H}(w) = H(-w)$. Man nennt $|H(w)|$ den gain, $\arg H(w)$ die Phase. Bei all diesen Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß in der Nachrichtentechnik die Fourier-Transformation als

$$\hat{f}(w) = \int e^{-2\pi i t w} f(t) dt$$

definiert wird. Die Inversionsformel lautet dann

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{2\pi i t w} \hat{f}(w) dw$$

Es gilt nach wie vor

$$\int |f|^2 dt = \int |\hat{f}|^2 dw.$$

Weiter wird der gain in Dezibel (dB) angegeben, statt einfach $|H|$, also $20 \log_{10} |H|$.

Für

$$\begin{aligned} x_{t_0}(t) &= x(t + t_0) \text{ wird} \\ y_{t_0}(t) &= \int h(t - s) x_{t_0}(s) ds = y(t_0 + t). \end{aligned}$$

Dies erklärt den Namen zeitinvariant. Ist $h(t) = 0$ für $t < 0$, so nennt man h und das System kausal. Es ist dann

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - s) x(s) ds.$$

Solche Filter nennt man auch realisierbar.

Beispiele: 1) Tiefpass Filter (low pass) mit Bandbreite Ω :

$$H(w) = 0, \quad |w| > \Omega.$$

Ein spezieller Fall ist der ideale Tiefpass (ideal low pass)

$$H(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq \Omega, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}h(t) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{iwt} \hat{h}(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{iwt} dw \\ &= \frac{\Omega}{\pi} \operatorname{sinc}(\Omega t).\end{aligned}$$

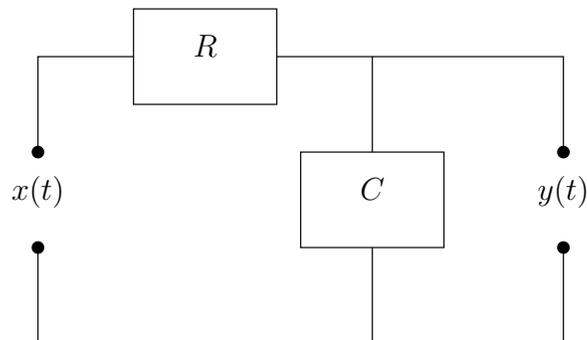
2) Bandpass (band pass) mit Zentralfrequenz w_0 und Bandbreite 2Ω :

$$H(w) = 0, \quad |w \pm w_0| > \Omega, \quad w_0 > \Omega.$$

Der ideale Bandpass ist entsprechend dem idealen Tiefpass definiert. Die Impulsantwort ist dann

$$h(t) = \frac{2\Omega}{\pi} \cos(tw_0) \operatorname{sinc}(t\Omega).$$

3) RC-Schaltkreis:



Dieser Schaltkreis wird durch die Differentialgleichung

$$y(t) + RC\dot{y}(t) = x(t)$$

beschrieben. Für $x(t) = e^{i\omega t}$ hat sie die Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= H(\omega)e^{i\omega t}, \\ H(\omega) &= \frac{1}{1 + i\omega RC} \end{aligned}$$

Die Nulllösung $y = e^{-t/RC}$ wird ignoriert, da sie schnell abfällt für $t \rightarrow \infty$.

Die Impulsantwort ist

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC} d\omega.$$

Dieses Integral kann mit dem Residuensatz der komplexen Analysis ausgewertet werden: Das Residuum beim einzigen Pol $w_0 = i/RC$ ist

$$\operatorname{Res}_{w=w_0} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC} = \frac{e^{i\omega_0 t}}{iRC},$$

also ergibt sich für das Integral für $t > 0$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i\omega_0 t}}{iRC} = \frac{1}{RC} e^{i\omega_0 t}.$$

Für $t < 0$ ergibt sich $h(t) = 0$. Das System ist also kausal.

4) Hilbert-Filter: Hier ist $h(t) = 1/(\pi t)$, also

$$(\mathcal{H}x)(t) = y(t) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{x(s)}{t-s} ds.$$

In I.3 haben wir nachgerechnet, daß

$$\hat{h}(w) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}(w) \text{ also } H(w) = \frac{1}{i} \operatorname{sgn}(w).$$

Dieser Filter hat eine große Bedeutung für kausale Signale: Ist $x(t) = 0$ für $t < 0$, so ist $x = x\chi$ mit der Heaviside-Funktion χ . also ist

$$\hat{x} = (2\pi)^{1/2} \hat{x} * \hat{\chi}.$$

Nach Aufgabe 1 auf Blatt 2 ist

$$\hat{\chi}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(w) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w},$$

also

$$\begin{aligned}\hat{x}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(w - w') - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w - w'} \right) \hat{x}(w') dw', \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}(w) - \frac{i}{2} (\mathcal{H}\hat{x})(w)\end{aligned}$$

und damit $\hat{x} = -i\mathcal{H}\hat{x}$. Zerlegen wir \hat{x} in Real- und Imaginärteil, $\hat{x} = \hat{x}_1 + i\hat{x}_2$, so entsteht

$$\hat{x}_1 + i \hat{x}_2 = -i \mathcal{H} (\hat{x}_1 + i \hat{x}_2),$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$\hat{x}_1 = \mathcal{H} \hat{x}_2 \quad , \quad \hat{x}_2 = -\mathcal{H} \hat{x}_1.$$

Für ein kausales Signal genügt es also, den Realteil oder den Imaginärteil zu kennen. Der jeweils andere kann dann durch den Hilbert-Filter berechnet werden.

5) Differentiation:

$$x'(t) = \int \delta'(t - s) x(s) ds$$

Offenbar ist $(x')^\sim(w) = i w \hat{x}(w)$, also $H(w) = i w$.

6) Oft gibt es zu einer Übertragungsfunktion H keine vernünftige Impulsantwort h . Dann definiert man das lineare System durch

$$y = (H \hat{x})^\sim ,$$

also

$$y(t) = (2\pi)^{-1/2} \int H(w) \hat{x}(w) e^{iwt} dw$$

Ein Beispiel ist $H(w) = 1/(iw)$. Für dieses System ist

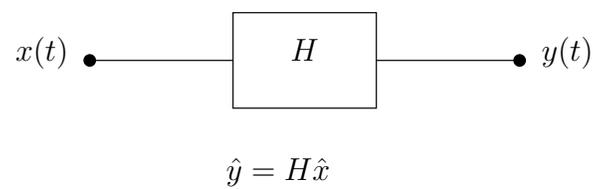
$$\begin{aligned}y'(t) &= (2\pi)^{-1/2} \int H(w) i w \hat{x}(w) e^{iwt} dw \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int \hat{x}(w) e^{iwt} dw \\ &= x(t),\end{aligned}$$

d. h. das System führt eine Integration aus.

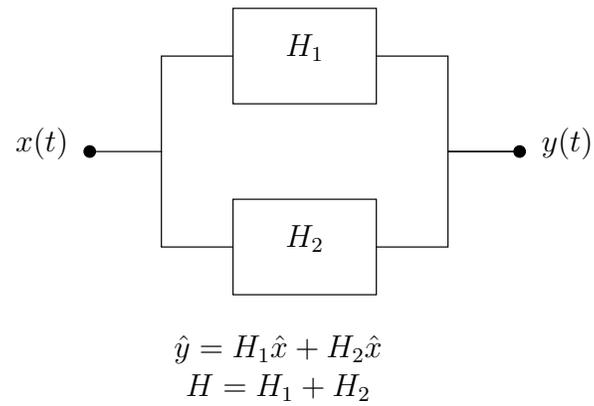
7) Kombination von Systemen.

Durch Parallelschaltung, Reihenschaltung und Rückkopplung kann man aus Einzelsystemen komplexe Netzwerke herstellen:

Einzelsystem:



Parallelschaltung:



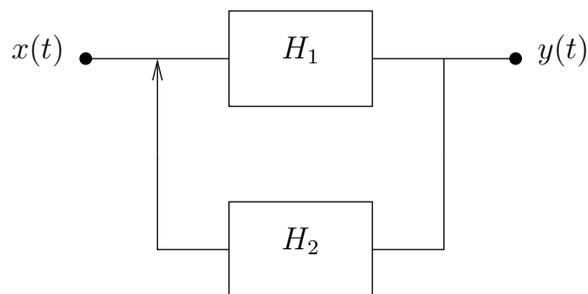
Reihenschaltung:



$$\hat{y} = H_2 H_1 \hat{x}$$

$$H = H_2 H_1$$

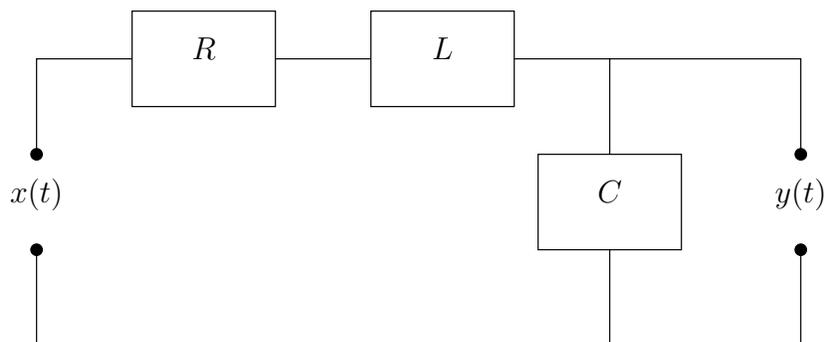
Rückkopplung



$$\hat{y} = H_1 (\hat{x} + H_2 \hat{y})$$

$$H = \frac{H_1}{1 - H_1 H_2}$$

8) LRC-Schaltkreis:



Es gilt die Differentialgleichung

$$L C \ddot{y} + R C \dot{y} + y = x.$$

Für $x = e^{i\omega t}$ erhält man als Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1 + iRC\omega - LC\omega^2} x(t)$$

Die Nulllösung $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda^2 LC + \lambda RC + 1 = 0$, also

$$\lambda = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2L}$$

ist offenbar abklingend und wird ignoriert.

2 Rationale Filter

Filter, bei denen $H(\omega)$ eine rationale Funktion ist, nennt man rational. Man schreibt

$$H(\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)}$$

$$Q(z) = \sum_{n=0}^q q_n z^n, \quad P(z) = \sum_{n=0}^p P_n z^n$$

Seien z_1, \dots, z_r die Nullstellen von P mit den Vielfachheiten v_1, \dots, v_r . Dann ist

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{n=0}^m a_n z^n + \sum_{n=1}^r \sum_{\ell=1}^{v_r} \frac{b_{n\ell}}{(z - z_\ell)^\ell}$$

wobei $m = q - p$ falls $q \geq p$; andernfalls ist die erste Summe leer. Man nennt dies die Partialbruchzerlegung.

Für das System mit H als Übertragungsfunktion ist

$$y = (2\pi)^{-1/2} \int \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.1)$$

Um sicherzustellen, daß dies Sinn hat, setzt man voraus, daß $P(i\omega) \neq 0$ für $\omega \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten: $P(z)$ hat keine rein imaginären Nullstellen.

Satz 2.1 Hat $P(z)$ nur Nullstellen mit $\operatorname{Re}(z) < 0$, dann ist das System (1) kausal.

Beweis: Sei h die Impulsantwort des Systems. Es ist zu zeigen, daß $h(t) = 0$ für $t < 0$. Wir können annehmen, daß in der Partialbruchzerlegung von Q/P das Polynom nicht auftritt. Dieses führt nur zu einer Linearkombination von δ und seinen Ableitungen.

Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int H(w) e^{iwt} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{C_A} H(w) e^{iwt} dw \end{aligned}$$

wobei C_A die Kurve $[-A, A]$, ergänzt durch den Halbkreis vom Radius A in der unteren Halbebene ist. Da $H(w) = Q(iw)/P(iw)$ in der unteren Halbebene keine Pole hat verschwindet dieses Integral nach dem Cauchy'schen Integralsatz. Also ist tatsächlich $L(t) = 0$ für $t < 0$. \square

Bemerkung: Polynome P , die nur Nullstellen mit $\operatorname{Re} z < 0$ haben, nennt man stabil.

Beispiele: 1) Systeme, die von Differentialgleichungen beschrieben werden, also

$$\sum_{n=0}^p P_n y^{(n)} = \sum_{n=0}^q q_n x^{(n)} .$$

Für den Input $x = e^{iwt}$ hat man den output

$$y(t) = H(w)e^{iwt} , \quad H(w) = \frac{Q(iw)}{P(iw)} .$$

Die Nulllösungen sind $y = e^{z_e t}$ mit den Nullstellen z_e von P . Ist P stabil, so sind diese abklingend und werden ignoriert.

2) Butterworth-Filter. Für die Übertragungsfunktion eines Butterworth-Filters der Ordnung p gilt

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{w}{\Omega})^{2p}}$$

Es ist $p \geq 1$ ganz. Für große p approximiert $|H(w)|$ den idealen Tiefpass zur Bandbreite Ω . Wir wollen erreichen, daß H kausal ist.

Dazu machen wir den Ansatz $H(w) = 1/P(iw)$. Wegen $\bar{H}(w) = H(-w)$ muß gelten

$$\left| \frac{1}{H(w)} \right|^2 = \frac{1}{H(w) \bar{H}(w)} = P(iw)P(-iw) = 1 + \left(\frac{w}{\Omega} \right)^{2p}.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind

$$w = \Omega e^{i(\ell+1/2)/p}, \ell = 0, \dots, 2p-1.$$

Diese Nullstellen liegen symmetrisch zur reellen Achse und zum Ursprung. Wir können sie so numerieren daß w_1, \dots, w_p in der oberen Halbebene liegen und

$$w_1, \dots, w_p, -w_1, \dots, -w_p$$

alle Nullstellen sind. Wir setzen

$$P(iw) = i^p \prod_{\ell=1}^p \frac{w - w_\ell}{\Omega}.$$

Dann hat $P(z)$ nur Nullstellen in der linken Halbebene. P ist also stabil und damit der Filter kausal. Den Faktor i^p haben wir eingeführt damit die Impulsantwort reell wird.

3 Diskrete Systeme

Ein (diskretes) Signal ist eine Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen. Es heißt stabil bzw. von endlich Energie, wenn

$$\sum_n |x_n| < \infty \text{ bzw. } \sum_n |x_n|^2 < \infty.$$

Es heißt kausal, falls $x_n = 0$ für $n < 0$.

Ist h ein reelles Signal so heißt

$$y_n = \sum_n h_{n-k} x_k \text{ oder } y = h * x$$

ein lineares (zeitinvariantes bzw. translationsinvariantes) System oder Filter. Für $x_n = \delta_n$ ($= 1$ für $n = 0$, sonst 0) ist $y_n = h_n$. Also heißt h wieder die Impulsantwort.

Die Funktion

$$X(z) = \sum_n x_n z^{-n} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

heißt die z -Transformierte von x . In der Funktionentheorie nennt man dies eine Laurent-Reihe. Ihr Konvergenzgebiet ist ein Ring $r_0 < |z| < r_1$, welcher auch leer sein kann. Es ist wichtig, mit X auch immer das Konvergenzgebiet anzugeben.

Beispiele: 1) $x_n = a^n$ für $n \geq 0$, sonst $x_n = 0$. Es ist für $|z| > |a|$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a} .$$

2) $x_n = -a^n$ für $n < 0$, sonst $x_n = 0$.

Es ist für $|z| < |a|$

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a} .$$

X stimmt also mit dem X aus Beispiel 1 überein, hat aber einen anderen Konvergenzbereich.

3) $x_n = \delta_{n-n_0}$ (Verzögerung).

$$X(z) = z^{-n_0}$$

Ein Filter heißt FIR (finite impulse response) wenn nur endlich viele $h_n \neq 0$ sind. In diesem Fall ist X eine rationale Funktion. Andernfalls heißt der Filter IIR (infinite impulse response).

Satz 3.1 (*Inversionsformel der z -Transformation*): $X(z)$ konvergiere in $r_0 < |z| < r_1$, und C_r sei der im mathematisch positiven Sinne (d. h. gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufene Kreis $|z| = r, r_0 < r < r_1$. Dann gilt für alle n

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} X(z) z^{n-1} dz .$$

Beweis: Auf C_r ist $z = re^{i\varphi}$, also $dz = ire^{i\varphi}d\varphi$.

$$\int_C z^m dz = i \int_0^{2\pi} r^{m+1} e^{i(m+1)\varphi} d\varphi = 2\pi i \delta_{m+1}.$$

Man setzt nun $X(z)$ in das Integral ein. $X(z)$ konvergiert gleichmäßig auf C_r , also darf man Integration und Summation vertauschen. Es bleibt nur das Integral mit der Potenz z^{-1} stehen, und dieses hat den Faktor x_n . \square

Die Inversionsformel wird am besten durch den Residuensatz ausgewertet. Nehmen wir zum Beispiel den Fall $X(z) = z/(z-a)$, $|z| < |a|$. Sei C_r der Kreis $|z| = r$, $r > |a|$. Die Funktion

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z-a} = -\frac{z^n}{w} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^\ell$$

hat innerhalb C_r nur den Pol $z = 0$ für $n < 0$, und zwar mit dem Residuum $-a^n$. Also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} X(z) z^{n-1} dz = \begin{cases} 0, & n \geq 0, \\ -a^n, & n < 0, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 2.

Nehmen wir hingegen $X(z) = z/(z-a)$ in $|z| > |a|$, so müssen wir zunächst $z = 1/w$ setzen und bekommen dann für $r > |a|$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{1/r}} X\left(\frac{1}{w}\right) w^{-n-1} dw.$$

Die Funktion

$$X\left(\frac{1}{w}\right) w^{-n-1} = \frac{w^{-n-1}}{1-wa} = w^{-n-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (wa)^\ell$$

hat innerhalb C_r nur den Pol $w = 0$ für $n \geq 0$, und zwar mit dem Residuum a^n . Also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} X(z) z^{n-1} dz = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.

Satz 3.2 Sei $y = h * x$. Damit ist $Y = HX$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y_n z^{-n} = \sum_n \sum_k z^{-n} h_{n-k} x_k \\ &= \sum_n \sum_k h_{n-k} z^{k-n} x_k z^{-k} = \sum_m \sum_k h_m z^{-m} x_k z^{-k} \\ &= H(z) X(z) \end{aligned}$$

□

Es besteht eine einfache Beziehung zwischen der z -Transformation und Fourier-Reihen: Setzen wir $z = re^{i\omega a}$, $a > 0$, so wird

$$X(re^{i\omega a}) = \sum_n x_n r^{-n} e^{-i\omega a n}.$$

Dies ist eine Fourier-Reihe in $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$. Nach I.4 gilt

$$x_n r^{-n} = \frac{1}{2\pi/a} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} X(re^{i\omega a}) e^{i\omega a n} d\omega.$$

Mit $z = re^{i\omega a}$ wird daraus Satz 1.

Wir nehmen von nun an an daß alle z -Transformierten auf den Einheitskreis konvergieren. Dort setzen wir $z = e^{i\omega a}$ und $X'(w) = X(e^{i\omega a})$ usw. Wir haben dann

$$Y'(w) = H'(w)X'(w).$$

Dies betrachten wir als diskretes Analogon zu der Beziehung $\hat{y} = H\hat{x}$ für kontinuierliche Systeme. Wir nennen daher H' die Übertragungsfunktion des diskreten Systems.

4 Die Beziehung zwischen kontinuierlichen und diskreten Systemen

Ziel der digitalen Nachrichtentechnik ist die Simulation kontinuierlichen Systeme durch diskrete. Sei

$$y = h^c * x \quad (4.1)$$

ein kontinuierliches System. Das Signal x werde mit der Schrittweite a abgetastet und $x_n = x(t_n), t_n = an$ gesetzt. Wir wollen ein diskretes System finden, das sich möglichst gleich wie (1) verhält.

Am einfachsten ist es, die Impulsantwort des diskreten Systems als

$$h_n = ah^c(t_n) \quad (4.2)$$

zu wählen.

Satz 4.1 Sei H^c die Übertragungsfunktion von (4.1) und H' die von (4.2). Dann gilt

$$H'(w) = \sum_n H^c \left(w - \frac{2\pi}{a}n \right).$$

Beweis: Es ist

$$H'(w) = \sum_n h_n e^{iwan} = a \sum_n h^c(an) e^{-iwan}$$

Nach der Poisson'schen Formel (siehe II.1) folgt

$$H'(w) = (2\pi)^{1/2} \sum_n \hat{h}^c \left(w - \frac{2\pi}{a}n \right) = \sum_n H^c \left(w - \frac{2\pi}{a}n \right).$$

□

Hat H^c die Bandbreite Ω und ist die Nyquit-Bedingung $a \leq \frac{\pi}{\Omega}$ erfüllt, so

stimmen also H^c und H' in $|w| \leq \pi/\Omega$ überein. Hat auch x die Bandbreite Ω , so ist nach II. 1

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_k h_{n-k} x_k \\ &= a \sum_k h^c(t_{n-k}) x(t_k) \\ &= \int h^c(t-s) x(s) ds \\ &= y(t_n) \end{aligned}$$

und damit das kontinuierliche System vollständig durch das digitale simuliert.

Praktisch kann man keine der obigen Bedingungen exakt erfüllen: Weder H^c noch x ist bandbeschränkt.

Die Übergang vom Kontinuierlichen zum Diskreten wird durch einen A/D-Wandler oder ADC geleistet. Er besteht aus zwei Komponenten: Einem (analogen) Vorfilter und einem Sampler.

Wir studieren zunächst den Fehler des Samplers. Er macht aus den kontinuierlichen Signal x das diskret $x_n = x(t_n)$. Im Frequenzraum ist dies

$$\begin{aligned} X'(n) &= \sum_n x(t_n) e^{-iwan} \\ &= (2\pi)^{1/2} \frac{1}{a} \sum_n \hat{x}\left(w - \frac{2\pi}{a} n\right). \end{aligned}$$

Idealerweise hätte man in der Summe nur den Term für $n = 0$ stehen. Die anderen Terme verursachen das Aliasing. Der größten Beitrag der Terme $n \neq 0$ bekommt man durch Spiegelung (fold over) an $w = \pm \frac{2\pi}{a}$. Wenn man also möchte, daß der Abtastfehler für $|w| \leq w_0$ klein ist, muß man

$$\left| \hat{x}\left(\frac{2\pi}{a} - w_0\right) \right| \ll |\hat{x}(w_0)|$$

sein. Dies kann man für hinreichend kleinen a , also durch Überabtasten (oversampling) erreichen.

Beispiel: Bei Sprache kann man davon ausgehen, daß $\hat{x}(w) \sim \frac{1}{|w|}$, $|w| > w_0$.

Dies bedeutet einen Abfall von \hat{x} um 6dB per Oktave: Für $|w| > w_0$ ist

$$20 \log_{10} \frac{1/|2w|}{1/|w|} = 20 \log_{10} \frac{1}{2} = -6.021.$$

Bestimmen wir den Aliasing-Fehler für den Frequenzbereich bis 3kHz, wenn wir mit 10kHz abtasten.

Es ist

$$20 \log_{10} \left| \frac{\hat{x}(2\pi \cdot (10 - 3)kHz)}{\hat{x}(2\pi \cdot 3kHz)} \right| = 20 \log_{10} = -7.4$$

Bemerkung: Wir müssen unterscheiden zwischen der Frequenz f und der Kreisfrequenz $w = 2\pi f$. Im Sprachgebrauch bedeutet f die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde: $x(t) = e^{i2\pi ft}$ mit $f=440\text{Hz}$ (1Hz=1 Schwingungen/sec) ist der Kammerton a . In diesem Fall ist $\hat{x}(w) = (2\pi)^{1/2} \delta(w - 2\pi f)$. Also entspricht der Frequenz f die Kreisfrequenz $2\pi f$. Bei unserer Definition der Fourier-Transformation bedeutet also die Fourier-Variable die Kreisfrequenz.

Der Frequenz f entspricht also die Nyquist-Rate $\pi/(2\pi f) = 1/(2f)$. Ein Signal mit der Frequenz f muß man also mit der doppelten Frequenz abtasten.

Nun zum Vorfilter. Er sorgt dafür, daß das abzutastende Signal x eine schnell abklingende Fourier-Transformierte hat. Ist die Übertragungsfunktion des Vorfilters $H(w)$, so ist diese $H(w)\hat{x}(w)$.

Beispiel: Wir verwenden im vorigen Beispiel den Butterworth-Filter der Ordnung 2 zum Parameter $\Omega = 2\pi \cdot 3kHz$, also

$$|H(w)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{w}{\Omega}\right)^4}}$$

Jetzt gestaltet sich die Rechnung so:

$$20 \log_{10} \frac{|(H\hat{x})(2\pi \cdot (10 - 3)kHz)|}{|(H\hat{x})(2\pi \cdot 3kHz)|} = -19.2$$

Bei der Ordnung 8 würde man etwa -34 erreichen.

5 FIR-Filter

Die Filter (h_n) aus III.4 sind in der Regel IIR. Um daraus einen FIR-Filter zu bekommen macht man Gebrauch von sogenannten Windows. Das sind Folgen, die außerhalb $[-N, N]$ verschwinden.

1. Rectangular window

$$w_n = 1, |n| \leq N.$$

2. Hanning window

$$w_n = \cos^2 \frac{\pi n}{2N}, |n| \leq N.$$

3. Hamming window

$$w_n = 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi n}{N}, |n| \leq N.$$

4. Kaiser-Bessel window

$$w_n = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - n^2/N^2})}{I_0(\beta)}, |n| \leq N.$$

I_0 modifizierte Bessel-Funktion der Ordnung 0.

Der FIR-Filter g zu dem IIR-Filter h ist dann

$$g_n = w_n h_n.$$

Satz 5.1 Sei $g_n = w_n h_n$. Dann gilt für die Übertragungsfunktionen

$$G' = \frac{a}{2\pi} W' * H'.$$

Die Faltung ist dabei im Sinne $\frac{2\pi}{a}$ -periodischer Funktionen zu verstehen, also

$$(W' * H')(w) = \int_0^{2\pi/a} W'(w - \sigma) H'(\sigma) d\sigma.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
(W' * H')(w) &= \int_0^{2\pi/a} W'(w - \sigma) H'(\sigma) d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi/a} \sum_n w_n e^{-i(w\sigma)an} \sum_m h_m e^{-i\sigma am} d\sigma \\
&= \sum_{n,m} w_n h_m e^{iwan} \int_0^{2\pi/a} e^{-i\sigma a(m-n)} d\sigma \\
&= \frac{2\pi}{a} \sum_{n,m} w_n h_m e^{-iwan} \delta_{m-n} \\
&= \frac{2\pi}{a} \sum_n w_n h_n e^{-iwan} \\
&= \frac{2\pi}{a} G'(w).
\end{aligned}$$

□

Für den (idealen) Fall $w_n = 1$ ist

$$\frac{a}{2\pi} W'(w) = \frac{a}{2\pi} \sum_n e^{-iawn} = \delta(w)$$

Für das Beispiel 1 ist

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2\pi} W'(w) &= \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{-iawn} \\
&= \frac{a}{2\pi} \frac{\sin(N + 1/2)aw}{\sin(aw/2)} \quad (\text{vergl. I.4})
\end{aligned}$$

Dies ist eine approximative δ -Funktion

Zur Konstruktion guter Windows verwenden wir die Landau-Slepian-Pollak-Theorie.

Besonders gute Windwos vereinen zwei Eigenschaften:

1. Sie sind möglichst vollständig in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ konzentriert.

Sei $D = L_2(\mathbb{R}^1) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ der Abschneideoperator

$$(Dw)(t) = \begin{cases} w(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die erste Eigenschaft kann man also formulieren als:

$\frac{\|Dw\|}{\|w\|}$ soll möglichst groß sein (am besten 1).

2. Die Fourier-Transformation ist möglichst nahe bei 0 konzentriert. Sei $B : L_2(\mathbb{R}^1) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ der Operator der Bandbeschränkung:

$$(Bw)^\wedge(w) = \begin{cases} \hat{w}(w), & |w| \leq \Omega \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zweite Eigenschaft kann man dann so formulieren:

$\frac{\|BDw\|}{\|w\|}$ soll möglichst groß sein.

Wir berechnen den Operator $A = BD$: Es ist

$$(Dw)^\wedge(w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-D}^D e^{-iwt} w(t) dt,$$

also

$$\begin{aligned} (BDw)(t) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{iwt} (Dw)^\wedge(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{iwt} \int_{-T/2}^{T/2} e^{iws} w(s) ds dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} w(s) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{iw(t-s)} dw ds. \end{aligned}$$

Also ist

$$(Aw)(t) = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sinc}(\Omega(t-s)) w(s) ds.$$

A besitzt die Eigenwerte $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq 0$ und die Eigenfunktionen ψ_0, ψ_1, \dots , also $A\psi_n = \lambda_n \psi_n$ oder

$$\lambda_n \psi_n(t) = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sinc}(\Omega(t-s)) \psi_n(s) ds$$

Setzen wir $t = Tt'$, $s = Ts'$, so wird mit $c = \frac{T\Omega}{2}$

$$\lambda_n \psi_n(Tt') = \frac{2c}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \text{sinc}(2c(t' - s')) \psi_n(Ts') ds.$$

Die λ_n hängen also nur von c ab: $\lambda_n = \lambda_n(c)$.

Die λ_n haben eine interessante Eigenschaft: Sie sind für $n \leq \frac{2}{\pi}c$ praktisch 1, für $n > \frac{2}{\pi}c$ praktisch 0, mit einer sehr schmalen Übergangszone.

Wegen

$$\frac{\|A\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = \lambda_n$$

sind die ψ_n für $n \leq \frac{2}{\pi}c$ fast völlig in $[-T/2, T/2]$, ihre Fourier-Transformation fast völlig in $[-\Omega, \Omega]$ konzentriert. Insbesondere ist φ_0 die Funktion, bei der diese simultane Konzentration am besten gelingt. ψ_0 gilt daher als bestmögliches Window.

Da ψ_0 schwierig zu berechnen ist, sich aber sehr genau durch die Bessel-Funktion I_0 approximieren läßt verwendet man in der Praxis das Kaiser-Bessel-Window mit $\beta \sim 4 - 9$.

Sei V der lineare Raum, der von ψ_0, \dots, ψ_n mit $n = \lfloor \frac{2c}{\pi} \rfloor$ aufgespannt wird. Diese Funktionen sind fast völlig in $[-T/2, T/2]$, ihre Fourier-Transformation fast völlig in $[-\Omega, \Omega]$ konzentriert. Sie bilden eine Orthogonale Basis von V . V hat also die Dimension $\sim \frac{2c}{\pi}$. Mit Recht sagt man also, der Raum der $T/2$ zeitbeschränkten und Ω bandbeschränkten Funktionen habe die Dimension $\frac{2c}{\pi} = \Omega T/\pi$. Dies stimmt mit unserer Beobachtung in II. 4 überein.

Tabelle der λ_n für $c = 8$:

	n	λ_n
	0	1.0000
	1	0.9998
	2	0.9970
	3	0.9606
	4	0.7479
$\frac{2}{\pi}c \rightarrow$	5	0.3203
	6	0.0608
	7	0.0061
	8	0.0004

6 Up- and downsampling.

Sei x ein diskretes Signal. Wir setzen

$$(p \downarrow x)_n = x_{np},$$

$$(p \uparrow x)_n = \begin{cases} x_{n/p} & \text{falls } n/p \text{ ganz,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$p \downarrow$ nennen wir downsampeln, $p \uparrow$ upsampeln.

Sei $Y = p \uparrow x$. Dann ist

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y_n z^{-n} = \sum_n x_n z^{-pn} \\ &= X(z^p) \end{aligned}$$

Ist $Y = p \downarrow x$, so haben wir

$$Y(z^p) = \sum_n Y_n z^{-pn} = \sum_n x_{np} z^{-pn}.$$

Mit

$$\delta_n = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} \omega_p^{-\ell n}, \quad \omega_p = e^{-2\pi i/p}$$

haben wir $\delta_n = 1$ für n/p ganz und sonst $\delta_n = 0$. Also ist

$$\begin{aligned}
Y(z^p) &= \sum_n x_n \delta_n z^{-n} \\
&= \frac{1}{p} \sum_n x_n \sum_{\ell=0}^{p-1} \omega_p^{-\ell n} z^{-n} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} X(\omega_p^\ell z)
\end{aligned}$$

Für $v = p \uparrow p \downarrow x$ erhalten wir

$$V(z) = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} X(\omega_p^\ell z).$$

Natürlich ist $p \downarrow p \uparrow$ die Identität. Zur Übung bestätigen wir dies mittels der z -Transformation: Mit $y = p \uparrow x$ und $v = \downarrow py$ ist

$$\begin{aligned}
Y(z) &= X(z^p) \\
V(z^p) &= \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} Y(\omega_p^\ell z) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} X(\omega_p^{\ell p} z^p) \\
&= X(z^p)
\end{aligned}$$

weil $\omega_p^{\ell p} = 1$.

Für die Übertragungsfunktionen $X'(\omega)$, $\omega = e^{i\omega a}$ bedeutet $y = p \uparrow x$

$$Y'(\omega) = X'(p\omega)$$

und $y = p \downarrow x$

$$Y'(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} X' \left(\frac{\omega}{p} - \frac{2\pi}{a} \frac{\ell}{p} \right).$$

Schließlich ist für $v = p \uparrow p \downarrow x$

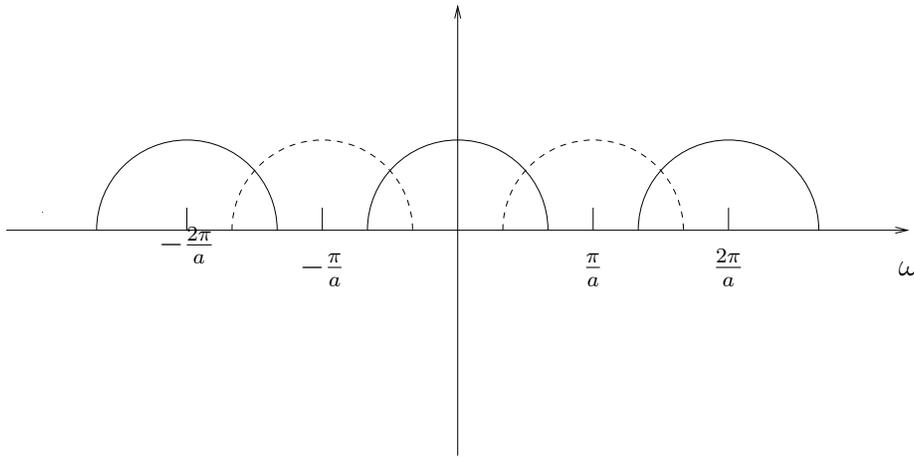
$$V'(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} X' \left(\omega - \frac{2\pi}{pa} \ell \right).$$

In dem wichtigen Fall $p = 2$ lauten die Formel

$$V(z) = \frac{1}{2}(X(z) + X(-z))$$

$$V'(\omega) = \frac{1}{2}\left(X'(\omega) + X'\left(\omega - \frac{\pi}{a}\right)\right).$$

Wir wollen aus den Effekt von downsampling, gefolgt von upsampling, im Frequenzraum ansehen:



Die durchgezogenen Linien stellen $X'(\omega)$ dar. Die gestrichelten Linien stellen den Alias in $V'(\omega)$ dar.

Wir können alle lineare Operationen auf Signalen auch in Matrizenform schreiben:

$$y = h * x \quad : \quad y = Tx \quad \text{mit} \quad T_{n,m} = h_{n-m}$$

$$y = \downarrow x \quad : \quad y = Dx \quad \text{mit} \quad D_{n,2n} = 1, \quad \text{sonst } 0.$$

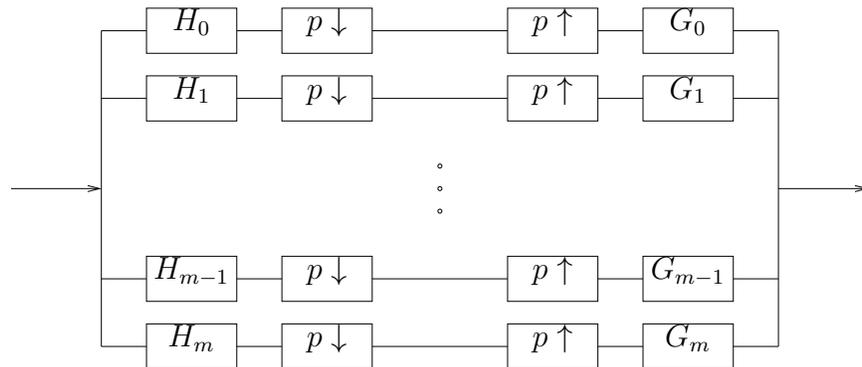
$$y = \uparrow x \quad : \quad y = Ux \quad \text{mit} \quad U_{2n,n} = 1, \quad \text{sonst } 0.$$

Es ist also T eine Toeplitz-Matrix und $D^T = U$.

7 Filter Banks

Eine Filter Bank besteht aus analysierenden Filtern $H_0 \dots, H_m$, synthetisierenden Filtern $G_0 \dots, G_m$ sowie aus up- und downsamplern, die in folgender

Weise zusammenwirken:



x und v sind diskrete Signale.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall $m = 1, p = 2$. Nach Abschnitt 6 ist

$$\begin{aligned}
 V(z) &= \frac{1}{2} G_0(z) (H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)) \\
 &+ \frac{1}{2} G_1(z) (H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)) \\
 &= \frac{1}{2} S(z) X(z) + \frac{1}{2} F(z)X(-z), \\
 S(z) &= G_0(z) H_0(z) + G_1(z)H_1(z), \\
 F(z) &= G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z).
 \end{aligned}$$

$S(z)$ ist die Übertragungsfunktion des Signals, F die des Alias. Wir wollen erreichen, daß die PR-Bedingung (PR=perfect reconstruction)

$$\begin{aligned}
 F(z) &= 0 \\
 S(z) &= 2z^{-q}.
 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Dies bedeutet, daß kein Aliasing statt findet und das Signal bis auf Verzögerung unverändert bleibt.

Wir betrachten Analyse-Filter mit

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

Es ist dann $H_1'(\omega) = H_0'(\omega + \frac{\pi}{a})$, also $|H_0'(\frac{\pi}{2a} - \omega)| = |H_0'(\frac{\pi}{2a} + \omega)|$.
 Wegen dieser Eigenschaft nennt man H_0, H_1 quadrature mirror filter (QMF).
 Wählen wir als G_0, G_1

$$\begin{aligned} G_0(z) &= H_0(z) \\ G_1(z) &= -H_1(z) \end{aligned}$$

so wird $F = 0$ und

$$S(z) = H_0^2(z) - H_0^2(-z).$$

Man muß nun H_0 so wählen, daß $S(z) \sim 2z^{-q}$ wird. Für ungerades q ist dies z. B. für $H_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^q)$ der Fall. So einfach ist das aber nicht, da H_0 auch noch andere Eigenschaften erfüllen muß, wie etwa Bandpaß.

Teil IV

Wavelets

1 Die Windowed Fourier-Transformation.

Ein Nachteil der Fourier-Transformation ist, daß sie nicht lokal ist. Oft interessiert man sich aber für das Frequenzverhalten eines Signals nur in einem bestimmten Bereich. Besonders offensichtlich ist dies bei Bildern.

In solchen Fällen kann man ein Fenster w um 0 wählen und statt der Fourier-Transformation von x die Windowed Fourier-Transformation

$$(F_w x)(\tau, \omega) = \int x(t) \omega(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (1.1)$$

betrachten. Diese enthält nur noch Information über x nahe τ . Für $w(t) = e^{-t^2/2}$ nennt man F_w die Gabor-Transformation.

Denis Gabor, 1900 - 1979, geboren in Budapest, Studium in Berlin, 1933 nach London, Nobelpreis 1971. Gilt als Erfinder der Holographie.

Satz 1.1 : *Es ist*

$$(F_w x)(\tau, \omega) = e^{-i\omega\tau} \int \hat{x}(\sigma) \hat{w}(\omega - \sigma) e^{i\sigma\tau} d\sigma.$$

Beweis: Setzen wir in (1.1) für x das Fourier-Integral ein, so entsteht

$$\begin{aligned} (F_w x)(\tau, \omega) &= (2\pi)^{-1/2} \int \int \hat{x}(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma w(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int \hat{x}(\sigma) \int e^{-it(\omega - \sigma)} w(t - \tau) dt d\sigma \\ &= \int \hat{x}(\sigma) \hat{w}(\omega - \sigma) e^{-i\tau(\omega - \sigma)} d\sigma. \end{aligned}$$

□

Wir sehen, daß Windowing in der Zeit notwendig auch zu Windowing in der Frequenz führt. Aus II. 4 wissen wir, daß die beiden Windows nicht gleichzeitig beliebig klein gemacht werden können.

w heißt das Analyse-Fenster. Man bekommt x aus $F_w x$ zurück durch ein Synthese-Fenster g .

Satz 1.2 *Sei*

$$\int w(t)g(t)dt = 1.$$

Dann gilt

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int \int (F_w x)(\tau, \omega) g(t - \tau) e^{i\omega t} d\tau d\omega.$$

Beweis: Wir verifizieren die Formel durch Einsetzen von $F_w x$:

$$\begin{aligned} &\int \int (F_w x)(\tau, \omega) g(t - \tau) e^{i\omega t} d\tau d\omega \\ &= \int \int \int x(s) w(s - \tau) e^{-i\omega s} ds g(t - \tau) e^{i\omega t} d\tau d\omega \\ &= \int x(s) \int w(s - \tau) g(t - \tau) d\tau \int e^{i\omega(t-s)} d\omega ds \\ &= 2\pi \int x(s) \int w(s - \tau) g(t - \tau) d\tau \delta(t - s) ds \\ &= 2\pi x(t) \int w(t - \tau) g(t - \tau) d\tau = 2\pi x(t). \end{aligned}$$

□

Unter dem Spektrogramm eines Signals x versteht man die Funktionen $|F_w x|^2$. Sie wird im Phasenraum (τ, ω) aufgetragen. Sie stellt das kombinierte Zeit-Frequenz-Verhalten von x dar.

2 Die Wavelet-Transformation.

Für eine gewisse Funktion ψ - das Wavelet - setzen wir

$$(W_\psi x)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} \int x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Dabei ist ψ reellwertig und

$$\begin{aligned} \psi &\in L_2(\mathbb{R}^1), \\ c_\psi &= 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \end{aligned}$$

Dann hat $W_\psi x$ für $x \in L_2(\mathbb{R}^1)$ einen Sinn.

Goupillaud, P., Grossmann, A., Morlet, J. 1985

Beispiele 1) Das Haar-Wavelet.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 = t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= (2\pi)^{-1/2} \left(\int_0^{1/2} e^{-i\omega t} dt - \int_{1/2}^1 e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega/2} \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right), \\ c_\psi &= 2\pi \int \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{|\omega|} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4}\right) d\omega < \infty. \end{aligned}$$

2) Mexican hat.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} = (1-x^2)e^{-x^2/2} \\ \hat{\psi} &= \omega^2 e^{-\omega^2/2} \\ c_\psi &= 2\pi \int |\omega|^3 e^{-\omega^2} d\omega < \infty.\end{aligned}$$

Satz 2.1 : Sei $x \in L_2(\mathbb{R}^1)$. Dann ist

$$(W_\psi x)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} |a|^{1/2} \int \hat{x}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

Beweis: Folgt sofort aus der Parseval'schen Beziehung.

Satz 2.2 : Für $x, y \in L_2(\mathbb{R}^1)$ ist

$$\int x(t) \overline{y}(t) dt = \int \int (W_\psi x)(a, b) \overline{(W_\psi y)(a, b)} \frac{dadb}{a^2}$$

Beweis: Wir setzen

$$p(\omega) = \hat{x}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega), \quad q(\omega) = \hat{y}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega).$$

Nach Satz 2.1 ist dann

$$\begin{aligned}(W_\psi x)(a, b) &= \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\psi}} \tilde{p}(b) \\ \overline{(W_\psi y)(a, b)} &= \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\psi}} \hat{q}(b).\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int (W_\psi x)(a, b) \overline{(W_\psi y)(a, b)} db &= \frac{2\pi|a|}{c_\psi} \int \tilde{p}(b) \hat{q}(b) db \\ &= \frac{2\pi|a|}{c_\psi} \int p(\omega) \overline{q}(\omega) d\omega \\ &= \frac{2\pi|a|}{c_\psi} \int \hat{x}(\omega) \overline{\hat{y}(\omega)} |\tilde{\psi}(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}$$

Wegen

$$\int \frac{|\tilde{\psi}(a\omega)|^2}{|a|} da = c_\psi/2\pi.$$

folgt

$$\begin{aligned} \int \int (W_\psi y)(a, b) \frac{da db}{a^2} &= \frac{2\pi}{c_\psi} \int \hat{x}(\omega) \bar{\hat{y}}(\omega) \int \frac{|\tilde{\psi}(a\omega)|^2}{|a|} da d\omega \\ &= \int \hat{x}(\omega) \bar{\hat{y}}(\omega) d\omega \\ &= \int x(t) \bar{y}(t) dt. \end{aligned}$$

□

Satz 2.3 Sei $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Dann ist

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \int (W_\psi x)(a, b) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{da db}{|a|^{5/2}}$$

Beweis: Wir setzen, zunächst formal, $y(t) = \delta(t-t')$ in Satz 2.2. Dann ist

$$\begin{aligned} \int x(t) \bar{y}(t) dt &= x(t'), \\ (W_\psi y)(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|c_\psi}} \psi \left(\frac{t'-b}{a} \right) \end{aligned}$$

also

$$x(t') = \int \int (W_\psi x)(a, b) \frac{1}{\sqrt{|a|c_\psi}} \psi \left(\frac{t'-b}{a} \right) \frac{da db}{a^2}$$

□

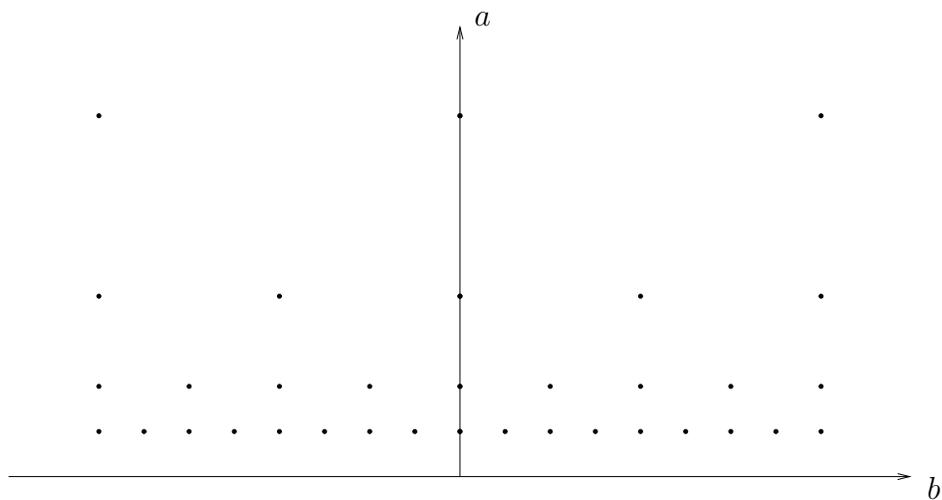
Die Funktion $|W_\psi x|^2$ nennt man das Scalogramm von x . Es wird in der b - a - Ebene aufgetragen. Zum Vergleich mit dem Spektrogramm muß man $\omega \sim \frac{1}{a}$ setzen.

3 Die diskrete Wavelet-Transformation(DWT).

Wir werten die Wavelet-Transformation nur für $a = 2^m$, $b = n 2^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$ aus. Das führt zu der diskreten Wavelet-Transformation

$$x \rightarrow (W_\psi x)(2^m n, 2^m), m, n \in \mathbb{Z}.$$

Die Punkte $(n2^m, 2^m)$ sind wie folgt in der (b,a) -Ebene verteilt:



Die DWT ist das Arbeitspferd der Wavelet-Analyse, genau so wie die diskrete Fourier-Transformation bei der Fourier-Analyse. Wir haben zwei Aufgaben vor uns:

1. Die Berechnung der DWT für ein Signal x .
2. Die Berechnung von x aus seiner DWT.

Die Algorithmen müssen stabil, schnell und wenn möglich einfach sein.

Alle drei Ziele werden wir mit der MSA erreichen, die wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

4 Die Multiskalenanalyse (MSA).

Eine MSA des $L_2(\mathbb{R})$ ist eine absteigende Folge abgeschlossener linearer Teilräume $V_j \subseteq L_2(\mathbb{R})$,

$$\dots \subseteq V_2 \subseteq V_1 \subseteq V_0 \subseteq V_{-1} \subseteq V_{-2} \subseteq \dots$$

mit

$$\overline{\bigcup_m V_m} = L_2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_m V_m = \{0\}.$$

Die entscheidende Eigenschaft ist

$$f \in V_m \Leftrightarrow f(2^m \cdot) \in V_0.$$

Dies bedeutet: Die Auflösung in V_m ist 2^m mal die Auflösung (also das kleinste darstellbare Detail) in V_0 . Man nennt eine MSA daher auch eine MRA (multi resolution analysis).

Eine Eigenschaft, die uns das Leben leicht machen wird, ist: Es gibt ein $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, so daß die Funktionen $\varphi(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ eine orthonormale Basis von V_0 bilden. φ heißt die Skalen-Funktion der MSA.

Wir setzen $\varphi_{m,k}(x) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}x - k)$. Es ist dann $\varphi_{m,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine orthonormale Basis in V_m .

Satz 4.1 *Es gibt eine Folge h_k , $k \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k)$$

Beweis: V_{-1} hat die Basis $\varphi_{-1,k} = 2^{1/2} \varphi(2 \cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. φ ist aus $V_0 \subseteq V_{-1}$, also läßt sich φ aus den $\varphi_{-1,k}$ linear kombinieren. \square

Die Gleichung aus Satz 4.1 heißt Skalierungsgleichung.

Da V_m ein Unterraum von V_{m-1} ist, gibt es einen zu V_m komplementären Unterraum W_m von V_{m-1} mit

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m.$$

Wir können W_m sogar orthogonal zu V_m wählen.

Satz 4.2 *Es ist*

$$\bigoplus_j W_j = L_2(\mathbb{R}), \quad \bigoplus_{j \geq m} W_j = V_{m-1}.$$

und es ist $f \in W_m$ genau dann, wenn $f(2^m \cdot) \in W_0$.

Beweis: Für $\ell \geq m$ gilt

$$V_{m-1} = V_\ell \oplus W_\ell \oplus \cdots \oplus W_m.$$

Für $\ell \rightarrow \infty$ folgt die zweite Behauptung und dann für $m \rightarrow -\infty$ die erste. Zum Beweis der dritten nehmen wir an daß $f \in W_m$ d. h.

$$f \in V_{m-1}, \quad \int f(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in V_m.$$

Dies bedeutet

$$f(2^m \cdot) \in V_{-1}, \quad \int f(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \text{ mit } v(2^m \cdot) \in V_0$$

oder auch

$$f(2^m \cdot) \in V_{-1}, \quad \int f(2^m x)v(x)dx, \quad \forall v \in V_0.$$

Dies aber bedeutet $f(2^m \cdot) \in W_0$. □

Wir führen noch die orthogonalen Projektionen

$$P_m : L_2(\mathbb{R}^1) \rightarrow V_m, \quad Q_m : L_2(\mathbb{R}^1) \rightarrow W_m$$

ein. P ist durch die Orthonormalbasis $\varphi_{m,k}, k \in \mathbb{Z}$, leicht ausgedrückt:

$$P_m f = \sum_k (f, \varphi_{m,k}) \varphi_{m,k}$$

mit dem inneren Produkt von $L_2(\mathbb{R}^1)$. Es gilt

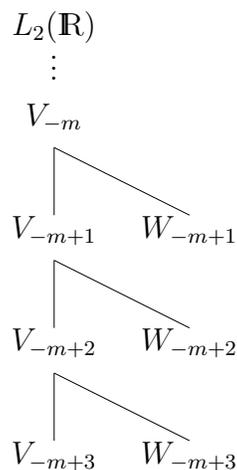
$$\begin{aligned} P_{m-1} &= P_m + Q_m \\ P_m Q_m &= Q_m P_m = 0 \\ P_m &\rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \\ P_m &\rightarrow I, m \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Was sagt die Gleichung

$$P_{m-1}f = P_m f + Q_m f?$$

$P_{m-1}f$ enthält alle Details von f der Größe 2^{m-1} und größer. Für $P_m f$ gilt Entsprechendes mit der Detailgröße 2^m . $Q_m f$ enthält demnach die Details der Größe 2^{m-1} , nicht aber die der Größe 2^m .

Durch wiederholtes Zerlegen entsteht dann folgendes Bild:



Beispiele 1) Sei

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

V_0 besteht dann aus den Funktionen, die in $[k, k+1)$ konstant sind, $k \in \mathbf{Z}$. Entsprechend besteht V_m aus den Funktionen, die in den Intervallen $[k, k+1)2^m$ konstant sind. Wir betrachten daher die Funktionen aus V_m als Funktionen, welche Details der Größe 2^m und größer darstellen können: V_m entspricht der Auflösung 2^m .

Offenbar ist

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \varphi(2x) + \varphi(2x - 1) \\
 &= \sqrt{2}(h_0\varphi(2x) + h_1\varphi(2x - 1))
 \end{aligned}$$

mit $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$. Die Funktionen $\varphi_{0,k}$ bilden eine Orthonormalbasis von V_0 . Die Funktionen in W_0 sind $\psi(\cdot - k)$ mit dem Haar-Wavelet

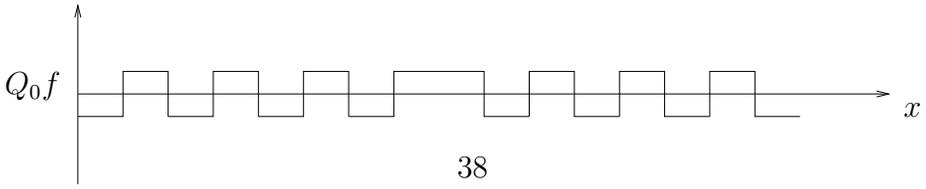
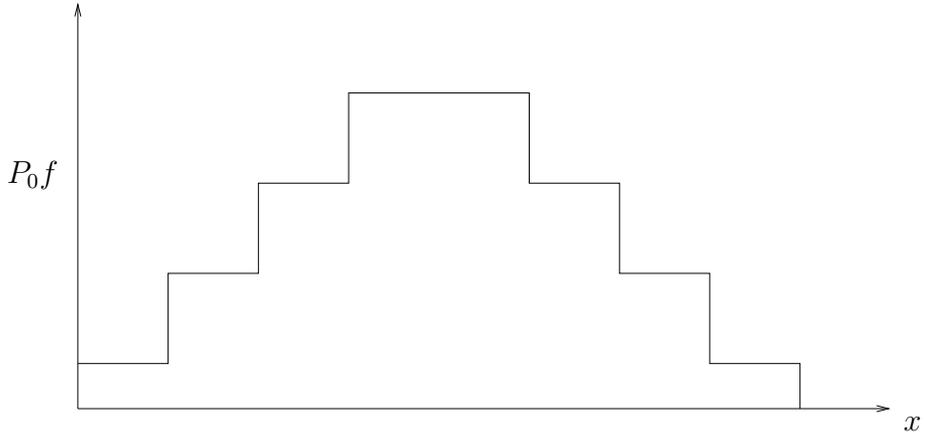
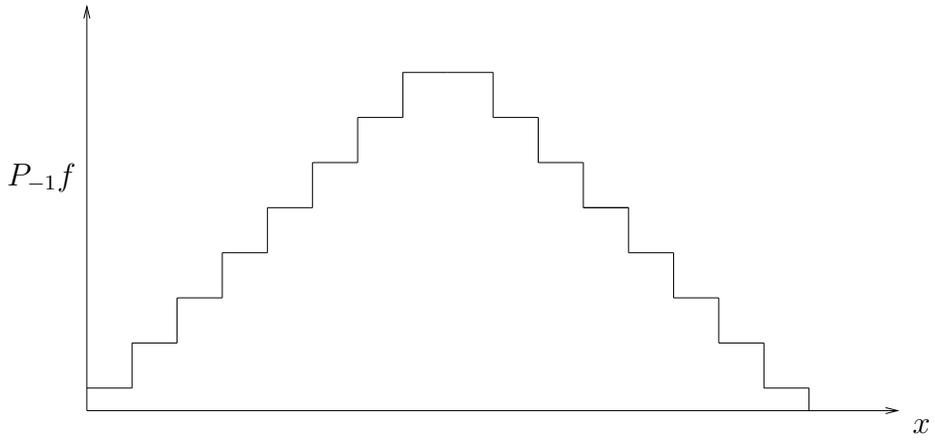
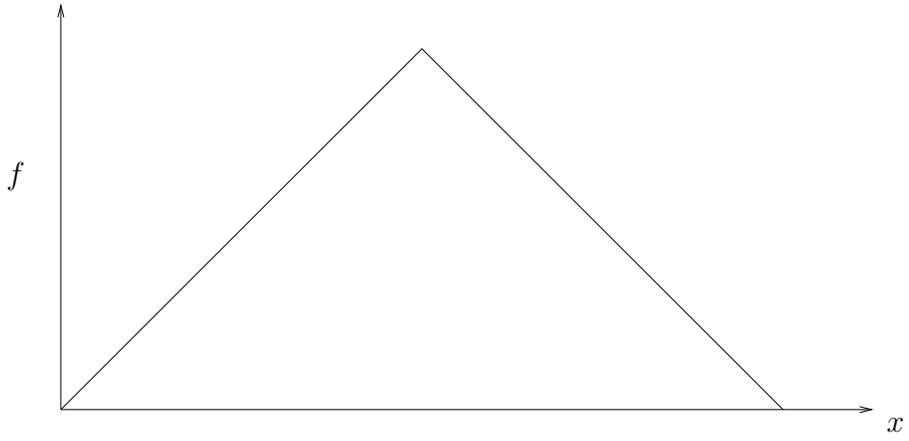
$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen

$$\psi_{m,k}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

bilden eine Orthonormalbasis von W_m .

Die Projektion P_m führt eine Mittelung auf den Intervallen $[k, (k+1)2^m]$ durch. Für ein einfaches f sehen wir uns einmal die Zerlegung $P_{-1}f = P_0f + Q_0f$ an:



2) Sei

$$\varphi(t) = \text{sinc}(\pi t).$$

Es ist

$$\hat{\varphi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int \varphi(t)\varphi(t-k)dt &= \int \hat{\varphi}(t)\varphi(tk)dt \\ &= \int \tilde{\varphi}(\omega)e^{-ik\omega}\hat{\varphi}(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ik\omega}d\omega \\ &= \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktionen in V_0 haben alle die Bandbreite π , lassen sich also durch die sinc-Reihe

$$f(t) = \sum_n f(n)\text{sinc}(\pi(t-n))$$

darstellen mit Konvergenz in $L_2(\mathbb{R}^1)$. Damit sind die Funktionen $\varphi_{0,k}, k \in \mathbb{Z}$ eine orthonormale Basis von V_0 . Die Funktion $f(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ hat die Bandbreite $\frac{\pi}{2} < \pi$, läßt sich also auch durch die sinc-Reihe darstellen:

$$\text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\text{sinc}(\pi(t-n)).$$

Ersetzt man t durch $2t$ so entsteht die Skalierungsgleichung mit $h_n = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}n\right) / \sqrt{2}$. Die Frage ist, ob es zu φ ein Wavelet ψ gibt, so daß die $\psi_{n,k}$ eine Orthonormalbasis von W_n sind. Im nächsten Abschnitt werden wir dies mit ja beantworten, und zwar für alle Skalierungsfunktionen φ .

5 MSA und Wavelets.

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 5.1 Sei eine MSA mit der Skalierungsfunktion φ gegeben. Sei

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{1-n} \varphi(2x - n).$$

Dann gilt: ψ ist ein Wavelet, und die $\psi_{m-k}, k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Orthonormalbasis von W_m .

In dem Beispiel aus Abschnitt 4 ist $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, und in der Tat ist

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1).$$

Der Satz ergibt sich aus einer Folge von Lemmas.

Lemma 5.1 Für die Skalierungsfunktion gilt

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= m_0(\xi/2) \hat{\varphi}(\xi/2), \\ m_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} \end{aligned}$$

Beweis: Wir führen in der Skalierungsgleichung die Fourier-Transformation aus:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sqrt{2} \sum_k h_k e^{-ik\xi} \frac{1}{2} \hat{\varphi}(\xi/2).$$

□

Lemma 5.2 Für die Funktion m_0 aus Lemma 5.1 gilt

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= 1 \text{ f.ü.}, \\ m_0(0) &= 1. \end{aligned}$$

Beweis: Die Orthonormalität der $\varphi_{0,k}$ ergibt für alle k

$$\begin{aligned} \delta_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \int \varphi(x) \overline{\varphi(x-k)} dx \\ &= \int \tilde{\varphi}(x) \overline{\varphi(x-k)} dx = \int \hat{\varphi} \overline{\widehat{\varphi(\cdot - k)}} dx \\ &= \int \hat{\varphi} \hat{\varphi}(\cdot - k) dx = \int e^{ik\xi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{\ell} \int_{2\pi\ell}^{2\pi(\ell+1)} e^{ik\xi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{\ell} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{\ell} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi} \text{ f. ü.}$$

Mit Hilfe von Satz 1 wird daraus

$$\sum_{\ell} |m_0(\xi/2 + \pi\ell)\hat{\varphi}(\xi/2 + \pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi} \text{ f. ü.}$$

Wir spalten die Summe in gerade und ungerade auf:

$$\sum_{\ell} |m_0(\xi/2 + 2\pi\ell)\hat{\varphi}(\xi/2 + 2\pi\ell)|^2 + \sum_{\ell} |m_0(\xi/2 + \pi(2\ell+1))\hat{\varphi}(\xi/2 + \pi(2\ell+1))|^2 = \frac{1}{2\pi} \text{ f. ü.}$$

Die Funktion m_0 hat die Periode 2π . Also folgt

$$|m_0(\xi/2)|^2 \sum_{\ell} |\hat{\varphi}(\xi/2 + 2\pi\ell)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_{\ell} |\hat{\varphi}(\xi/2 + \pi + 2\pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi} \text{ f. ü.}$$

oder

$$|m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 = 1 \text{ f. ü.}$$

Die Behauptung über $m(0)$ folgt direkt aus Lemma 5.1 mit $\xi = 0$. \square

Lemma 5.3 *Sei $f \in W_0$. Dann ist*

$$\begin{aligned} m_f(\xi)\overline{m_0(\xi)} + m_f(\xi + \pi)\overline{m_0(\xi + \pi)} &= 0 \text{ f. ü.}, \\ m_f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f_n e^{-in\xi} \end{aligned}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten f_n von f nach den $\varphi_{-1,n}$, d. h.

$$f = \sum_n f_n \varphi_{-1,n}, \quad f_n = (f, \varphi_{-1,n}).$$

Beweis: Sei $f \in W_0$. Dann ist $f \in V_{-1}$, also

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \sum_n f_n \hat{\varphi}_{-1,n}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f_n e^{-in\xi/2} \hat{\varphi}(\xi/2) \\ &= m_f(\xi/2) \hat{\varphi}(\xi/2). \end{aligned}$$

Es ist f senkrecht auf V_0 , d. h.

$$\begin{aligned}\int f(x)\overline{\varphi}(x-k)dx &= 0, \\ \int \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)e^{i\xi k}d\xi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\ell} \hat{f}(\xi+2\pi\ell)\hat{\varphi}(\xi+2\pi\ell) \right) e^{i\xi k}d\xi &= 0\end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{\ell} \hat{f}(\xi+2\pi\ell)\hat{\varphi}(\xi+2\pi\ell) = 0 \text{ f. ü.}$$

oder

$$\sum_{\ell} m_f\left(\frac{\xi}{2}+\pi\ell\right)\overline{m_0}\left(\frac{\xi}{2}+\pi\ell\right)\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+\pi\ell\right)\right|^2 = 0 \text{ f. ü.}$$

Wie beim Beweis zum vorigen Lemma ordnet man nach gerade und ungerade und erhält die Bedingung des Satzes. \square

Lemma 5.4 *Ist $f \in W_0$, so gibt es eine 2π -periodische Funktion p mit*

$$\hat{f}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \hat{\varphi}(\xi/2)p(\xi).$$

Beweis: Sei

$$p(\xi) = \begin{cases} -m_f(\xi + \pi)/\overline{m_0(\xi)}, & \overline{m_0(\xi)} \neq 0, \\ m_f(\xi)/\overline{m_0(\xi + \pi)}, & \overline{m_0(\xi + \pi)} \neq 0. \end{cases}$$

Wegen Lemma 5.2 ist p f. ü. definiert, und wegen Lemma 5.3 widerspruchsfrei. außerdem hat p die Periode 2π und $p(\xi + \pi) = -p(\xi)$; letzteres wieder nach Lemma 5.3. Weiter gilt

$$m_f(\xi) = p(\xi)\overline{m_0(\xi + \pi)}.$$

Dies ist klar für $\overline{m_0(\xi + \pi)} \neq 0$ und folgt sonst aus Lemma 5.3.

Im Beweis zu Lemma 5.3 haben wir gesehen, daß

$$\hat{f}(\xi) = m_f(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2).$$

Also ist

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= m_f(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2) \\ &= p(\xi/2)\overline{m_0(\xi/2 + \pi)}\hat{\varphi}(\xi/2).\end{aligned}$$

Die Funktion $p(\xi/2)e^{-i\xi/2}$ hat die Periode 2π . \square

Zum Beweis von Satz 1 setzen wir nun einfach

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i(p+1/2)\xi} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \hat{\varphi}(\xi/2)$$

mit $p \in \mathbb{Z}$. Nach unserer Konstruktion wird man annehmen können, daß $\psi \in W_0$. Dies kann man in der Tat auch verifizieren. Ebenso kann man zeigen, daß die Funktion $\psi_{0,k}$ eine Orthonormalbasis von W_0 bilden.

Wir berechnen noch ψ . Es ist

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \bar{h}_n e^{i(\xi/2 + \pi)n + i(p+1/2)\xi} \hat{\varphi}(\xi/2)$$

und daher

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_n \bar{h}_n (-1)^n \varphi(2x + n + 2p + 1) \\ &= \sqrt{2} \sum_n h_{-n-1-2p} (-1)^{-n-1} \varphi(2x - n). \end{aligned}$$

Für $p = -1$ ergibt sich (bis auf das Vorzeichen) die behauptete Formel. \square
Bemerkung: Da wir p beliebig wählen können, ist ψ keineswegs eindeutig bestimmt. Für $p = 0$ erhalten wir zum Beispiel

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_{-n-1} (-1)^{-n-1} \varphi(2x - n).$$

Im Falle $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$ (Beispiel 1 aus Abschnitt 4) ergibt sich

$$\psi(x) = \varphi(2x + 1) - \varphi(2x + 2),$$

und dieses Wavelet erfüllt den gleichen Zweck.

6 Die schnelle Wavelet-Transformation.

Sei eine MSA

$$\{0\} \subseteq \dots \subseteq V_1 \subseteq V_0 \subseteq V_{-1} \subseteq \dots \subseteq L_2(\mathbf{R})$$

mit Skalierungsfunktion φ und Skalierungsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k)$$

gegeben. Es bilden dann

$$\varphi_{m,k}(x) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}x - k), k \in \mathbb{Z}$$

eine Orthonormalbasis von V_m . Nach **5** bilden

$$\psi_{m,k}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - k)$$

eine Orthonormalbasis von W_m , wobei das Wavelet ψ durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k), g_k = (-1)^k h_{1-k}$$

gegeben ist.

Sei nun $f \in V_0$, also

$$f = \sum_k c_k^0 \varphi_{0,k}, \quad c_k^0 = (f, \varphi_{0,k}).$$

Es ist dann $f \in V_m$ für $m \geq 0$, also

$$f = \sum_k c_k^m \varphi_{m,k}, \quad c_k^m = (f, \varphi_{m,k}).$$

Wir betrachten die c_k^0 als gegeben. Unser Ziel ist, die diskrete Wavelet-Transformation

$$d_k^m = (\psi_{m,k}, f), \quad m = 0, \dots, M, k \in \mathbb{Z}$$

zu berechnen (Wavelet-Analyse). Dazu benutzen wir zwei Identitäten:

1. Aus der Definition von ψ folgt

$$\begin{aligned} \psi_{m,\ell}(x) &= 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - \ell) \\ &= 2^{-m/2} \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2^{1-m}x - 2\ell - k) \\ &= \sum_k g_k \varphi_{m-1, 2\ell+k}(x) \\ &= \sum_k g_{k-2\ell} \varphi_{m-1,k}(x) \end{aligned}$$

2. Aus der Skalierungsgleichung folgt

$$\begin{aligned}
 \varphi_{m,\ell}(x) &= 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}x - \ell) \\
 &= 2^{-m/2} \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2^{1-m}x - 2\ell - k) \\
 &= \sum_k h_k \varphi_{m-1,2\ell+k}(x) \\
 &= \sum_k h_{k-2\ell} \varphi_{m-1,k}(x)
 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Identitäten ergeben sich folgende Rekursionen:

$$\begin{aligned}
 d_\ell^m = (f, \psi_{m,\ell}) &= \sum_k g_{k-2\ell} (f, \varphi_{m-1,k}) \\
 &= \sum_k g_{k-2\ell} c_k^{m-1}, \\
 c_\ell^m = (f, \varphi_{m,\ell}) &= \sum_k h_{k-2\ell} (f, \varphi_{m-1,k}) \\
 &= \sum_k h_{k-2\ell} c_k^{m-1}.
 \end{aligned}$$

Mit den Operatoren

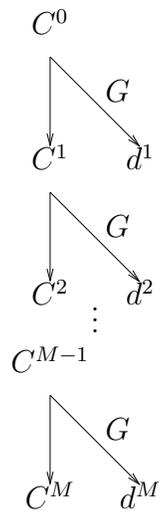
$$\begin{aligned}
 (Hc)_\ell &= \sum_k h_{k-2\ell} c_k \\
 (Gc)_\ell &= \sum_k g_{k-2\ell} c_k
 \end{aligned}$$

die auf die Folgen $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ wirken, schreibt sich dies mit den Folgen $(c^m)_k = c_k^m$, $(d^m)_k = d_k^m$ als

$$d^m = Gc^{m-1}, c^m = Hc^{m-1}, m = 1, 2, \dots, M.$$

Damit hat man zur Wavelet-Analyse den Algorithmus von Mallat (1989):

Gegeben c^0 , gesucht c^M, d^1, \dots, d^m .



Nun zur umgekehrten Aufgabe, der Berechnung von c^0 aus c^M, d^1, \dots, d^M (Wavelet-Synthese). Wir haben

$$\begin{aligned}
V_{m-1} &= V_m \oplus W_m, \\
P_{m-1} &= P_m + Q_m, \\
P_m f &= \sum_k (f, \varphi_{m,k}) \varphi_{m,k} = \sum_k c_k^m \varphi_{m,k}, \\
Q_m f &= \sum_k (f, \psi_{m,k}) \psi_{m,k} = \sum_k d_k^m \psi_{m,k},
\end{aligned}$$

also

$$\sum_k c_k^{m-1} \varphi_{m-1,k} = \sum_\ell c_\ell^m \varphi_{m,\ell} + \sum_\ell d_\ell^m \psi_{m,\ell}.$$

Mit Hilfe der beiden Identitäten wird daraus

$$\begin{aligned}
\sum_k c_k^{m-1} \varphi_{m-1,k} &= \sum_\ell c_\ell^m \sum_k h_{k-2\ell} \varphi_{m-1,k} \\
&+ \sum_\ell d_\ell^m \sum_k g_{k-2\ell} \varphi_{m-1,k} \\
&= \sum_k \left(\sum_\ell h_{k-2\ell} c_\ell^m + \sum_\ell g_{k-2\ell} d_\ell^m \right) \varphi_{m-1,k}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c_k^{m-1} = \sum_\ell h_{k-2\ell} c_\ell^m + \sum_\ell g_{k-2\ell} d_\ell^m.$$

Mit den zu H, G adjungierten Operatoren

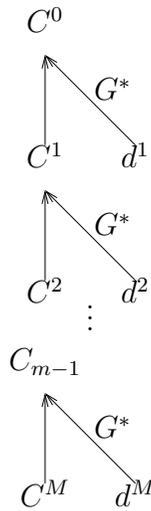
$$\begin{aligned}
(H^* c)_k &= \sum_\ell h_{k-2\ell} c_\ell, \\
(G^* c)_k &= \sum_\ell g_{k-2\ell} c_\ell
\end{aligned}$$

lautet dies

$$c^{m-1} = H^* c^m + G^* d^m, \quad m = M, \dots, 1.$$

Das ergibt den Wavelet-Synthese-Algorithmus von Mallat:

Gegeben c^M, d^1, \dots, d^M , gesucht c^0 .



Die Mallat-Algorithmen sind sicherlich elegant. Sind sie auch schnell?

Wir nehmen an, c^0 habe die Länge n , d. h. $c_k^0 = 0$ für $k < 0$ und $k \geq n$. Weiter nehmen wir an, h (und daher auch d) habe die Länge p . Wir nehmen p konstant und klein an (etwa $p \leq 10$). n kann sehr groß werden, etwa $10^4 - 10^6$. Wir drücken die Komplexität des Mallat-Algorithmus durch n aus.

c^0 hat die Länge n . Es ist dann $c_\ell^1 = 0$, falls die Mengen $\{-2\ell, \dots, -2\ell + n - 1\}$, $\{0, \dots, p - 1\}$ einen leeren Durchschnitt haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-2\ell + n - 1 < 0 \text{ oder } p - 1 < -2\ell$$

ist, d. h. $(1 - p)/2 < \ell < (n - 1)/2$. c^1 hat also die Länge $n/2 + p/2$. Entsprechend hat c^m die Länge

$$2^{-m}n + \left(2^{-m} + 2^{-m+1} + \dots + \frac{1}{2}\right)p \leq 2^{-m}n + p.$$

Die Berechnung von $c^m = Hc^{m-1}$ verlangt also $p(2^{-m}n + p)$ Operationen. Insgesamt verlangt die Mallat-Analyse also

$$2 \sum_{m=0}^{M-1} p(2^{-m}n + p) \leq p(4pn + 2Mp^2)$$

Operationen. Entsprechendes gilt für die Mallat-Synthese.

7 Wavelets mit kompakten Träger.

Für das praktische Rechnen mit einer MSA ist es wichtig, daß h endliche Länge (vergl. den Algorithmus von Mallat) und φ kompakten Träger hat.

Satz 7.1 *h hat genau dann endliche Länge wenn φ kompakten Träger hat.*

Beweis: Hat φ kompakten Träger, so gilt für hinreichend großes $|k|$

$$h_k = \sqrt{2} \int \varphi(x)\varphi(2x - k)dx = 0.$$

Habe umgekehrt h endliche Länge, etwa $h_k \neq 0$ nur für $k \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$, $n \geq 1$. Wir setzen

$$(S\varphi)(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2n-1} h_k \varphi(2x - k)$$

und definieren eine Funktionenfolge φ_τ , $\tau = 0, 1, \dots$ durch

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\varphi_{\tau+1} = S\varphi_\tau.$$

Wir zeigen, daß $\text{supp}(\varphi_\tau) \subseteq [0, 2n - 1]$. Für $\tau = 0$ ist dies offenbar richtig. Sei es richtig für ein $\tau \geq 0$. Es ist dann $\varphi_{\tau+1}(x) \neq 0$ nur, wenn

$$[0, 2n - 1] \cap [2x - 2n + 1, 2x] \neq \emptyset$$

d. h. $2x - 2n + 1 \leq 2n - 1$ und $0 \leq 2x$, d. h. $0 \leq x \leq 2n - 1$ ist. Also hat auch $\varphi_{\tau+1}$ seinen Träger in $[0, 2n - 1]$. Aus Lemma 5.1 wissen wir, daß

$$(S\varphi)(\xi) = m_0(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2).$$

Also ist

$$\hat{\varphi}_{\tau+1}(\xi) = \prod_{j=1}^{\tau} m_0(2^{-j}\xi)\hat{\varphi}_0(2^{-j}\xi).$$

Es ist $m_0(0) = 1$ und

$$|m_0(2^{-j}\xi) - 1| \leq c2^{-j}|\xi|,$$

das Produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$$

also konvergent. Damit konvergiert auch die Folge der φ_τ , und zwar gegen eine Lösung der Skalierungsgleichung. Also gilt mit $\tau \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{\varphi}(0)}{\hat{\varphi}_0(0)}\varphi_\tau \rightarrow \varphi.$$

Da alle φ_τ ihren Träger in $[0, 2n - 1]$ haben, muß das auch für φ gelten.

Der Beweis gestattet auch eine Berechnung von φ aus h (bis auf einen Faktor): Man iteriert einfach gemäß

$$\varphi_{\tau+1} = S\varphi_\tau, \quad \tau = 0, 1, \dots$$

Offenbar ist φ_τ konstant in Intervallen der Länge $2^{-\tau}$.

Wir wollen nun Skalierungsfunktionen mit kompakten Träger konstruieren. m_0 ist also ein Polynom in $e^{i\xi}$, und nach Lemma 5.2 gilt

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2, \quad m_0(0) = 1. \quad (7.1)$$

Man kann zeigen, daß diese Bedingungen - von pathologischen Ausnahmen abgesehen - auch hinreichend dafür sind, daß φ die Skalenfunktion einer MSA ist.

Wir setzen $M(\xi) = m_0(\xi)m_0(-\xi) = |m_0(\xi)|^2$. Man kann zeigen, daß (1) erfüllt ist für

$$M(\xi) = \left(\cos^2 \frac{\xi}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right),$$

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

Um ein solches M in der Form $|m_0|^2$ darzustellen, benutzen wir das

Lemma 7.1 (Riesz) Sei

$$A(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k (\cos \xi)^k, a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

Sei $A \geq 0$ und $A(0) = 1$. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom

$$B(\xi) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-ik\xi}, b_k \in \mathbb{R}, B(0) = 1$$

so daß

$$A(\xi) = B(\xi)B(-\xi).$$

Beweis: Wir geben nur einfache Beispiele:

$$\begin{aligned} N = 1 : \frac{1}{2}(1 + \cos \xi) &= \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \frac{1 + e^{-i\xi}}{2}, \\ N = 2 : \cos^2 \xi &= \left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

□

Wegen $\sin^2 \frac{\xi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \xi)$ ist $A(\xi) = P\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right)$ ein Polynom in $\cos \xi$ vom Grade $N - 1$, und es ist $A \geq 0, A(0) = 1$. Also ist $A(\xi) = B(\xi)B(-\xi)$ mit einem trigonometrischen Polynom B von Grade $N - 1$. Damit ist

$$M(\xi) = \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^N \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N B(\xi)B(-\xi),$$

so daß

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N B(\xi)$$

möglich ist. Wir behandeln die Fälle $N = 1$ und $N = 2$.

$N = 1$: Hier ist B konstant, also $B = 1$. Damit ist

$$m_0(\xi) = \frac{1 + e^{-i\xi}}{2},$$

also $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$. Dies führt zur bekannten Skalierungsfunktion und den Haar-Wavelets.

$N = 2$: Hier ist $P(y) = 1 + 2y$, also $A(\xi) = P\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right) = 2 - \cos \xi$. Nach dem Lemma gibt es $B(\xi) = b_0 + b_1 e^{-i\xi}$ mit

$$(b_0 + b_1 e^{-i\xi})(b_0 + b_1 e^{i\xi}) = 2 - \frac{1}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\xi}),$$

d. h.

$$b_0^2 + b_1^2 = 2, b_0 b_1 = -\frac{1}{2}.$$

Eine mögliche Lösung ist

$$b_0 = (1 + \sqrt{3})/2, b_1 = (1 - \sqrt{3})/2.$$

Sie führt zu

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\xi}\right) \\ &= \frac{1}{8} (1 + 2^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) (1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})e^{-i\xi}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (h_0 + h_1 e^{-i\xi} + h_2 e^{-2i\xi} + h_3 e^{-3i\xi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \\ h_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad h_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Die auf diese Weise konstruierten Skalenfunktionen werden nach Daubechies benannt und mit N^φ bezeichnet. Die zugehörigen Wavelets nennt man Daubechies-Wavelets der Ordnung N und bezeichnet sie mit N^ψ .

Zum Schluß noch eine interessante Beziehung zu den Cuntz-Algebren. Die Matrix ($m_1 = m_f$)

$$U(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi), & m_0(\xi + \pi) \\ m_1(\xi), & m_1(\xi + \pi) \end{pmatrix}$$

erfüllt $UU^* = I$. Also ist auch $U^*U = I$, d. h.

$$\begin{aligned}\overline{m_0}(\omega)m_0(\omega) + \overline{m_1}(\omega)m_1(\omega) &= 1, \\ \overline{m_0}(\omega)m_0(\omega + \pi) + \overline{m_1}(\omega)m_1(\omega + \pi) &= 0.\end{aligned}$$

Im Hilbertraum $L_2(0, 2\pi)$ der 2π -periodischen quadratintegrierbaren Funktionen führen wir nun die Operatoren

$$(S_j p)(\omega) = m_j(\omega)p(2\omega), j = 0, 1$$

ein. Wir berechnen S_j^* . Es ist

$$\begin{aligned}
(S_j p, q) &= \int_0^\pi m_j(\omega) p(2\omega) \bar{q}(\omega) d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} p(\omega) \left(m_j\left(\frac{\omega}{2}\right) \bar{q}\left(\frac{\omega}{2}\right) + m_j\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \bar{q}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right) d\omega,
\end{aligned}$$

also

$$(S_j^* q)(\omega) = \bar{m}_j\left(\frac{\omega}{2}\right) q\left(\frac{\omega}{2}\right) + \bar{m}_j\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) q\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right).$$

Es folgt

$$(S_j S_j^* q)(\omega) = m_j(\omega) (\bar{m}_j(\omega) q(\omega) + \bar{m}_j(\omega + \pi) q(\omega + \pi))$$

und damit

$$S_0 S_0^* + S_1 S_1^* = I. \quad (7.2)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
(S_j^* S_j p)(\omega) &= \bar{m}_j\left(\frac{\omega}{2}\right) m_j\left(\frac{\omega}{2}\right) p(\omega) \\
&\quad + \bar{m}_j\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) m_j\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) p(\omega + 2\pi) \\
&= p(\omega), \\
(S_0^* S_1 p)(\omega) &= \bar{m}_0\left(\frac{\omega}{2}\right) m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) p(\omega) \\
&\quad + \bar{m}_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) m_1\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) p(\omega + 2\pi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und ebenso $(S_1^* S_0 p) = 0$. Also ist

$$S_j^* S_j = I, \quad S_j^* S_i = 0, \quad i \neq j. \quad (7.3)$$

Die Beziehungen (1), (2) nennt man die Cuntz-Relationen (Cuntz 1977). Die von den S_j erzeugte C^* -Algebra ist die Cuntz-Algebra O_2 .

Literatur

- [1] Blatter, Ch.: Wavelets. A Primer. A. K. Peters, Natick, Massachusetts 1998.
- [2] Brémaud, P.: Mathematical Principles of Signal Processing. Springer 2002.
- [3] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia 1992.
- [4] Frazier, M. W.: An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra. Springer 1999.
- [5] Jackson, L. B.: Digital Filters and Signal Processing. Second Edition, Kuwer 1989.
- [6] Louis, A. K. - Maaß, P. - Rieder, A.: Wavelets. Teubner 1994.
- [7] Mertins, A.: Signal Analysis. Wiley 1999.
- [8] Oppenheim, A. V.- Schafer, R. W.: Digital Signal Processing. Prentice-Hall 1975.
- [9] Pratt, W. K.: Digital Image Processing. Third edition, Wiley Interscience 2001.
- [10] Strang, G. - Nguyen, T.: Wavelets and Filter Banks. Wellesley-Cambridge Press 1996.
- [11] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer 1968.