Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe der Lösungen am Mi, 26.10. bis 19:00 Uhr, Übungskasten 65.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ heißt *homogen vom Grade* α, wenn

$$u(tx) \quad = \quad t^\alpha u(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

gilt.
Zeigen Sie: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ ist genau dann homogen vom Grade α, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad = \quad \alpha u.$$

b) Lösen Sie die Aufgabe

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad = \quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 \backslash \{0\},$$

$u = f(x)$ auf dem Kreis um 0 vom Radius 1. Setzen Sie hinreichende Regularität von u und f voraus.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

a) Zeigen Sie: u ist genau dann eine radiale Funktion (d.h. $u(x)$ hängt nur von $x_1^2 + x_2^2$ ab), wenn

$$x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} \quad = \quad 0.$$

b) Leiten Sie eine entsprechende Differentialgleichung für Funktionen u her, welche entlang der Ellipsen

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{a^2} \; + \; \frac{(x_2 - m_2)^2}{b^2} \quad = \quad 1,$$

konstant sind. Dabei seien $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, $a = kb$, $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fest vorgegeben.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig.
Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die Beziehung

$$x_2 \quad = \quad \frac{1}{3} u^3 + f(u - x_1),$$

so ist u Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1.$$

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Mi, 02.11. bis 14:00 Uhr, Übungskästen: 65 (Fr-Übung), F60 (Mo-Übung).

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = f(x), \qquad & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und Funktionen $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R})$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $u = f(x, y, c)$ eine Flächenschar im $\mathbb{R}^3$ mit Parameter c. Sei g eine Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x, y, g(x, y)) = 0 \ .$$

Dann heisst $u = f(x, y, g(x, y))$ Einhüllende der Flchenschar.

(a) Zeigen Sie: Ist jede Fläche der Schar Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \ ,$$

so auch die Einhüllende.

(b) Zeigen Sie, dass die Flächen

$$u = \sqrt{1 - (x-c)^2 - y^2} \ , \quad (x-c)^2 + y^2 < 1$$

für jedes c Lösungen der Differentialgleichung

$$u^2 \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = 1$$

sind und bestimmen Sie eine weitere Lösung durch Bildung der Einhüllenden.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechnen Sie (per Hand oder mit Maple) die Charakteristiken der folgenden drei Differentialgleichungen und lassen Sie sich die von ihnen definierten Flächen von Maple für die jeweils angegebenen Definitionsbereiche graphisch anzeigen.

$$(a): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in]0,1]);$$

$$(b): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in]0,1]);$$

$$(c): \quad xu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x,0) = x, \quad (x \in [-2,2]).$$

(Hinweis: Verwenden Sie jeweils $s = x$ für die Parametrisierung der Anfangskurve.)

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 08.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; u^2$$

Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe

$$u = x \quad \text{entlang} \quad \Gamma : x + y = 0$$

eine in einer Umgebung von Γ eindeutig bestimmte Lösung hat, welche bei Annäherung an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ betragsmässig unendlich wird.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Seien a, $b \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y} \;=\; 0.$$

Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ entlang jeder Lösung von

$$\frac{dx}{dt} \;=\; a(x,y)\;\;, \qquad \frac{dy}{dt} \;=\; b(x,y)$$

konstant, so ist u eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie nach der Methode aus (a) eine Lösung von

$$u_x + 3x^2 u_y \;=\; 0.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$3(u-y)^2\,\frac{\partial u}{\partial x} \;-\; \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; 0.$$

Die Gleichungen der Raumkurve K, durch welche die gesuchte Lösungsfläche hindurchgehen soll, seien

$$x \;=\; 0, \qquad y \;=\; s, \qquad u \;=\; s.$$

(a) Ist die Kurve K eine Charakteristik der Differentialgleichung?

(b) Geben Sie eine Lösungsfläche an, die durch die Kurve K hindurchgeht.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = u.$$

Bestimmen Sie diejenige Lösungsfläche der Differentialgleichung, welche die parametrisierte Mannigfaltigkeit

$$x_1 = s_1 + s_2, \qquad x_2 = s_1 - s_2, \qquad x_3 = 1, \qquad u = s_1 s_2.$$

enthält.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 15.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Man betrachte das Cauchy-Problem für die Differentialgleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

mit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = y^2,\ y > 0\}$ und $u_\Gamma = 0$.
Finden Sie die Lösung $u(x,y)$ mit Hilfe der Charakteristikenmethode und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an. Illustrieren Sie die erhaltenen Resultate in der (x,y)-Ebene anhand einer Skizze.

2. Aufgabe (14 Punkte (4+5+5))

Lösen Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode die folgenden Anfangswertprobleme.

a)
$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \qquad u(x,0) = \ln(x), \quad x > 0.$$

b)
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u, \qquad u(x,0) = x^2 + 1.$$

c)
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u.$$

Dabei soll die Raumkurve

$$x_0(s) = \cos(s), \qquad y_0(s) = \sin(s), \qquad u_0(s) = 1$$

in der Lösungsfläche enthalten sein.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster WS 2005/06
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 22.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (7 Punkte (3+4))

Lösen Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode die folgenden Anfangswertprobleme.

a)
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0, \qquad u(x,0) = x.$$

b)
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = x^2 - y, \qquad u(x,0) = x.$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Man betrachte das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad u(x,0) = f(x),$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie: Für $f'(x) > 0$ ist das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar.

b) Lösen Sie es für $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

c) Zeigen Sie: Für Cauchy-Daten $u(0,y) = g(y)$ mit $g \in C^1(\mathbb{R})$ und der y-Achse als Anfangsmannigfaltigkeit ist das entsprechende Anfangswertproblem immer lokal eindeutig lösbar.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei für $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geq 0$ die Funktion n gegeben durch

$$n(\mathbf{x}) = \frac{n_0}{1 + x_2/m},$$

mit den Konstanten $n_0, m > 0$.
Zeigen Sie: Ist $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ ein charakteristischer Streifen von $|\nabla u| = n$, so durchläuft $\mathbf{x}$ einen Kreis.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 29.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (8 Punkte (2+2+4))

(a) Zeigen Sie: Das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\ a(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= f(x,y) \end{aligned}$$

ist in (x, y) hyperbolisch, parabolisch, elliptisch, je nachdem $a(x, y)\ > 0,\ = 0,$ bzw. < 0 ist.

(b) Stellen Sie im hyperbolischen Fall die Normalform her.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Maple die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $a = 1$ und $f(x, y) = xy$. Lösen Sie dann die Anfangswertaufgabe mit $u(x, 0) = 0$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Das System

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} = Bu + c \tag{1}$$

sei in Ω hyperbolisch. Sei

$$\varphi : (x, y) \longrightarrow (\xi(x, y), \eta(x, y))$$

eine stetig differenzierbare und umkehrbar eindeutige Abbildung von Ω auf Ω'. Sei u eine Lösung in Ω und sei $v = u \circ \varphi^{-1}$.
Zeigen Sie: v ist Lösung eines hyperbolischen Systems 1. Ordnung, dessen Charakteristiken von der Form φC sind mit Charakteristiken C von (1).

3. Aufgabe (6 Punkte (3+3))

Wir betrachten das lineare System in $u(x, t)$, $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - x^2\frac{\partial u}{\partial x} + v + tx &= 0\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + (1 - tx)u + t &= 0\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß das System in $\mathbb{R}^2$ hyperbolisch ist und berechnen Sie die Charakteristiken.

b) Zeigen Sie, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(x,0) = x \ , \quad v(x,0) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

existiert und geben Sie ihren Definitionsbereich an.

Hinweis: Dafür müssen Sie nicht unbedingt die Lösung ausrechnen. Benutzen Sie die Sätze aus der Vorlesung.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 6.12. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{1}$$

und das lineare System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} a\frac{\partial p}{\partial x} + b\frac{\partial p}{\partial y} + c\frac{\partial q}{\partial y} &= f\ , \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} &= 0\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei seien a, b, $c \neq 0$, f stetige Funktionen von x, y in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie:

(a) Besitzt (1) eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$, so ist

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

eine Lösung von (2).

(b) Sind p, $q \in C^1(\Omega)$ Lösung von (2) und ist Ω einfach zusammenhängend, so gibt es eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von (1) mit (3).

(c) (1) ist genau dann elliptisch (parabolisch, hyperbolisch), wenn (2) elliptisch (parabolisch, hyperbolisch) ist.

2. Aufgabe (6 Punkte)

In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ sind die Differentialgleichungen

a.) $u_{xx} + yu_{yy} + 3u_y = 0,$

b.) $u_{yy} - yu_{xx} = 0, \quad (Tricomi - Gleichung)$

c.) $u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} + \beta u_x = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (Telegraphengleichung)$

hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch? Benutzen Sie MAPLE, um eine explizite allgemeine Lösung anzugeben und erklären Sie die auftretenden Funktionen.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei

$$v(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S^{n-1}} u(x+ry)\, d\sigma(y).$$

Zeigen Sie: v genügt der Gleichung

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r - \Delta v = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$v(x,0) = u(x), \qquad v_r(x,0) = 0.$$

ω_n bezeichnet dabei wieder die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo WS 2005/06

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 13.12. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $u \in C(\Omega)$. u habe in Ω die Mittelwerteigenschaft, d.h. für jedes $x \in \Omega$ ist $u(x)$ der Mittelwert von u über die Oberfläche jeder ganz in Ω liegenden Kugel mit Mittelpunkt x.
Zeigen Sie: Dann ist u in Ω harmonisch.
Hinweis: Die Lösung eines lokalen Dirichlet-Problems zur Laplacegleichung ist harmonisch. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt das Maximumprinzip.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Poissonsche Integral in $\mathbb{R}^2$ für den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt die Form

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \int\limits_{|y|=r} \frac{g(y)}{|x-y|^2}\, dy$$

hat.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Sei Ω die Kugel vom Radius r um x_0 in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, und sei $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω.

Zeigen Sie: Ist $u \geq 0$, so gilt $\forall\, x \in \Omega$

$$\left(\frac{r}{r+|x-x_0|}\right)^{n-2} \frac{r-|x-x_0|}{r+|x-x_0|}\, u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{r}{r-|x-x_0|}\right)^{n-2} \frac{r+|x-x_0|}{r-|x-x_0|} u(x_0).$$

b) Zeigen Sie: Eine in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, harmonische Funktion, die nur ein Vorzeichen hat, ist konstant.

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch und $x \in \Omega$. Sei r so klein, da auch die Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r noch in Ω liegt. Dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int\limits_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n} \int\limits_{B_1(0)} u(x+ry)\, dy.$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) den Satz von Liouville: Jede beschränkte auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist konstant.

Hinweis zu b): Schätzen Sie $|u(x) - u(0)|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von a) nach oben ab.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo WS 2005/06

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 20.12. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, das mindestens einen endlichen Punkt nicht enthält, und sei $y \in \Omega$. Sei f_y die analytische Funktion, welche Ω eineindeutig auf den Einheitskreis abbildet, und zwar so, dass $f_y(y) = 0$, $f_y'(y) = 1$ gilt (Riemannscher Abbildungssatz).
Zeigen Sie: Die Greensche Funktion von Ω ist

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \log |f_y(x)| \ .$$

(Dabei wird der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit der komplexen Zahl $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ identifiziert.)
Hinweis. Benutzen Sie dabei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für f_y.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei f eine Funktion in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, die entlang $x_n = 0$ stetig und beschränkt ist. Für $x_n > 0$ sei

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{y_n=0} \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, dy_1 \dots dy_{n-1} \ .$$

Zeigen Sie: u löst die Dirichletaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad , \quad x_n > 0 \ , \\ u &= f \quad , \quad x_n = 0 \ . \end{aligned}$$

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, und f verschwinde außerhalb einer beschränkten Menge. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2(1+f)u &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\ u(x) &= e^{ikx\cdot\vartheta} + v(x) \ , \end{aligned}$$

wo $\vartheta \in S^2$, $k > 0$ und v die *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* erfüllt.
Zeigen Sie: Für $|x| \to \infty$ gilt

$$u(x) = e^{ikx\cdot\vartheta} + \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \, A(\frac{x}{|x|}) + O(\frac{1}{|x|^2}) \ ,$$

wobei für $|\omega| = 1$

$$A(\omega) = k^2 \int_{\mathbb{R}^3} u(y) f(y) e^{-iky\cdot\omega} dy \ .$$

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 10.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei A eine reelle invertierbare (n,n)-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei $g(x) = f(Ax+b)$ mit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.
Zeigen Sie:

a) $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$;

b) $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\det(A)|} e^{ib\cdot A^{-T}\xi} \hat{f}(A^{-T}\xi)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n = 2$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div} \frac{x}{|x|^2} = 2\pi\delta$;

(b) $\operatorname{div} \frac{x^\perp}{|x|^2} = 0,\ x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, sei $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta.$$

Bemerkung: $\delta(z) = \delta(x,y)$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f(x) = p(x)e^{-x^2/2}$ mit einem Polynom p vom Grade n. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ die gleiche Gestalt hat.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

11. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 17.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei Ω ein Normalgebiet in $\mathbb{R}^n$, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega \times (0,\infty)})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta_x u \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\ , \\ u &= 0 \qquad \text{in} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist

$$\int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right)^2 \right\} dx$$

unabhängig von t.

(b) u ist eindeutig bestimmt durch die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei u Lösung der Aufgabe

$$u_x - u_y - q(x)u = 0 \qquad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^1\ .$$

mit stetigen Funktionen q, φ. Zeigen Sie: Ist $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^1$, so ist q durch die Funktionen φ und $u(0,\ \cdot\ )$ eindeutig bestimmt.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} = u_{xx}\ , \quad u(x,0) = 0\ , \quad u_t(x,0) = g(x)$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Stellen Sie $u(x,x)$ für $t \ge \varepsilon$ als Funktion von x graphisch dar.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 24.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ und

$$f(x) = \int\limits_{S^{n-1}} F(x \cdot \vartheta, \vartheta) d\sigma(\vartheta) \, .$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} (F(x \cdot \vartheta + t, \vartheta) + F(x \cdot \vartheta - t, \vartheta)) d\sigma(\vartheta)$$

Lösung der Wellengleichung mit den Anfangswerten $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Verifizieren Sie die Kirchhoffsche Formel für $n = 1$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \, (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} g(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} h(y,\tau) dy d\tau \, . \end{aligned}$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

Leiten Sie die Kirchhoffsche Wellenformel für $n = 2$ ausführlich her.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y|<t} \frac{g(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} \, dy \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y|<t} \int\limits_0^{t-|y|} \frac{h(x+y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |y|^2}} \, d\tau dy \end{aligned}$$

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 31.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $f(x) = e^{-|x|^2}$.

a) Berechnen Sie die Radon-Transformation Rf von f.
Hinweis. Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\vartheta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$ ist

$$Rf(\vartheta, s) \;:=\; \int\limits_{x\cdot\vartheta = s} f(x)\,dx$$

b) Lösen Sie die Wellengleichung mit den Anfangsdaten $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ für $n = 3$.
Hinweis.
- vgl. Aufgabe 1 auf dem 12. Übungsblatt.
- Radonsche Inversionsformel für $n = 3$:

$$f(x) \;=\; -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(Rf)(\vartheta, x\cdot\vartheta)\,d\sigma(\vartheta).$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie: In $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^1)$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} \;=\; \frac{1}{x} - i\pi\delta,$$

wobei $1/x$ für den *Cauchy'schen Hauptwert* steht.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $h \in C^2(\mathbb{R}^1)$

$$u(x,t) \;=\; h(t - |x|)/|x|$$

eine Lösung der Wellengleichung in $\left(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\right) \times \mathbb{R}^1$ ist.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

14. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 07.02.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und u die Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u, \qquad && x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx, \qquad \forall\, t > 0.$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Seien $f, g \in C([0,\infty))$, und sei u für $x \in \mathbb{R}^3$ die Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \qquad u(x,0) = f(|x|), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(|x|).$$

Zeigen Sie: u hängt nur von $|x|$ und t ab, und die Funktion $w(r,t) = ru(x,t)$, $|x| = r$ löst

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \qquad w(r,0) = rf(r), \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(r,0) = rg(r).$$

Geben Sie eine explizite Darstellung von u an.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $u \in C^2(G \times (0,T)) \cap C(\overline{G} \times [0,T])$ Lösung der Differentialgleichung

$$u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u - cu$$

mit stetigen b, c und $c \geq 0$. Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem parabolischen Rand von $G \times (0,T)$ an.