Vorlesungsskript
Partielle Differentialgleichungen

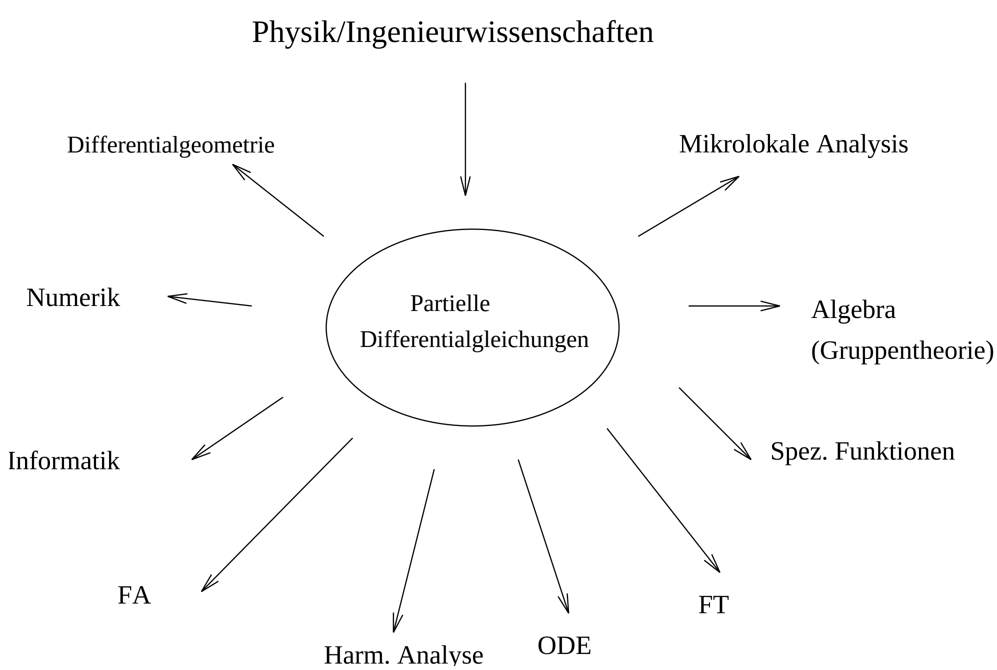
F. Natterer

Institut für Numerische
und instrumentelle Mathematik

Stand: Wintersemester 2000/01

Inhaltsverzeichnis

1. Hörerkreis	:	Hauptstudium Mathematik, Angewandte Mathematik, Studenten, die eine Diplomarbeit im Bereich der Angewandten Mathematik suchen. Interessierte Physiker.
2. Vorkenntnisse	:	Analysis I, II, III, Gewöhnliche DGLn.
3. Stoff	:	Elementare Theorie Partieller DGLn, Stand $\sim$ 1950.



Kapitel 1

Einleitung

Unter einer partiellen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen einer Funktion u mehrerer Variablen $x_1, \ldots, x_n \quad (n > 1)$ und einigen ihrer partiellen Ableitungen. Sie hat demnach die Form

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots \quad \right) = 0 \; .$$

Die höchste Ordnung der auftretenden Ableitungen heißt Ordnung der Differentialgleichung. Unter einer Lösung der Differentialgleichung in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ versteht man eine Funktion u, welche samt der in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen in D wohldefiniert ist und dort die Differentialgleichung identisch erfüllt. Meist ist klar, welches Gebiet D gemeint ist, z.B. $\mathbb{R}^n$ oder ein natürlicher Definitionsbereich von F. Dann spricht man von einer Lösung schlechthin.

BEISPIELE

1) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ ist eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung. Ihre Lösungen sind genau die Funktionen u, welche nur von $x_2, \ldots, x_n$ abhängen.

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Ihre Lösungen für $n = 2$ sind genau die Funktionen der Form

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + w(x_2)$$

mit beliebigen differenzierbaren Funktionen v, w.

3) Sei f stetig in $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2)$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir können sie leicht lösen. Zunächst integrieren wir nach x_2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \int\limits_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(x_1, \eta_2)}{\partial x_1 \partial x_2} d\eta_2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0) \\ &= \int\limits_0^{x_2} f(x_1, \eta_2) d\eta_2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0)\end{aligned}$$

und danach nach x_1:

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2) &= \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(\eta_1, x_2)}{\partial x_1} d\eta_1 + u(0, x_2) \\ &= \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{x_2} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + u(x_1, 0) + u(0, x_2) - u(0, 0)\end{aligned}$$

Dies ist eine Lösung für jede Vorgabe von $u(x_1, 0)$, $u(0, x_2)$.

4) Seien α_1, α_2 reelle Zahlen. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0\ .$$

Sie besitzt die Lösung

$$u(x_1, x_2) = w(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2)$$

für jede differenzierbare Funktion w einer Variablen.

5) Sei $g(x_1, x_2)$ eine differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \ .$$

Jede Funktion der Form

$$u(x_1, x_2) = w(g(x_1, x_2))$$

mit einer differenzierbaren Funktion w einer Variablen ist Lösung.

6) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

hat die Lösungen

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2) + g(x_1 + x_2)$$

mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen f, g einer Variablen. Sie geht durch die Transformation

$$y_1 = x_1 + x_2 \ , \qquad y_2 = x_1 - x_2$$

in die oben behandelte Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial y_1 \partial y_2 = 0$ über.

7) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

hat die Lösungen

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 - ix_2) + g(x_1 + ix_2)$$

mit beliebigen analytischen Funktionen f, g (z.B. Polynome).

8) Einige Beispiele aus der Physik:

$$\begin{aligned}
\text{Eikonal-Gleichung} &: \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 1 \\
\text{Laplace-Gleichung} &: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \\
\text{Poisson-Gleichung} &: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f \\
\text{Helmholtz-Gleichung} &: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c^2 u = 0 \\
\text{Wärmeleitungs- oder} & \\
\text{Diffusionsgleichung} &: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\
\text{Wellengleichung} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\
\text{Minimalflächengleichung} &: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \ , \quad p = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2}} \\
\text{Cauchy-Riemannsche Dgl.} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

Wir sehen aus diesen Beispielen, daß partielle Differentialgleichungen sehr viele Lösungen haben können. Typisch enthält die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung p-ter Ordnung in n Variablen p willkürliche Funktionen von $n-1$ Variablen.

Zur eindeutigen Festlegung der Lösung einer Differentialgleichung muß man also Zusatzbedingungen stellen. Eine Möglichkeit für solche Zusatzbedingungen ist eine sogenannte Anfangsbedingung: Man schreibt für eine Differentialgleichung der Ordnung p in n Variablen die Werte von u und seiner Ableitungen der Ordnung $< p$ entlang einer Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ vor. Dabei darf man natürlich Funktionswerte und Ableitungen nicht unabhängig voneinander vorgeben: “Innere” Ableitungen der Mannigfaltigkeit sind ja schon durch die Funktionswerte entlang der Mannigfaltigkeit bestimmt. Man schreibt daher zweckmäßig u und seine Ableitungen bis zur Ordnung $p-1$ in einer aus der Mannigfaltigkeit herausführenden Richtung, z.B. der Normalen, vor. Dies ist die Cauchy'sche Anfangswertaufgabe.

Wir wollen uns dies an Hand des Beispiels $n=2$ klarmachen. Die $(n-1)$-dimensionale Anfangsmannigfaltigkeit ist dann eine Kurve

$$\Gamma : x = \varphi(s) \ ,$$

wobei der Parameter s die Bogenlänge bedeute, d.h.

$$\|\varphi'(s)\| = \sqrt{(\varphi_1'(s))^2 + (\varphi_2'(s))^2} = 1 \ .$$

Tangential- und Normaleinheitsvektor sind dann

$$\begin{aligned} \tau &= \varphi' \ , \\ \nu &= (-\varphi_2', \varphi_1') \ . \end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung 1. Ordnung besteht einfach in der Vorgabe von u entlang Γ, also

$$u(\varphi(s)) = f(s)$$

Bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung schreibt man darüber hinaus die Ableitungen 1. Ordnung von u entlang Γ vor. Die Ableitung in Richtung τ ist aber durch f bereits bestimmt, denn es gilt ja

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\varphi(s)) &= \frac{d}{dt} u(\varphi(s) + t\tau)|_{t=0} \\ &= \tau \cdot \ \text{grad} \ u(\varphi(s)) \\ &= f'(s) \ . \end{aligned}$$

Also genügt bereits die Vorgabe von

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\varphi(s)) = g(s) \ ,$$

um sämtliche Ableitungen 1. Ordnung entlang Γ festzulegen. Die Cauchy'sche Anfangswertaufgabe für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen besteht also in der Vorgabe von u, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ entlang einer Kurve Γ.

BEISPIELE

1) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$. Nehmen wir als Anfangsmannigfaltigkeit $x_1 = 0$ und schreiben wir dort vor:

$$u(0, x_2) = f(x_2) \ .$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist offenbar

$$u(x_1, x_2) = f(x_2) \ ,$$

und diese Lösung ist eindeutig bestimmt.

Wir versuchen als Anfangsmannigfaltigkeit $x_2 = 0$ und schreiben dort

$$u(x_1, 0) = f(x_1)$$

vor. Diese Anfangswertaufgabe ist offenbar nur lösbar, wenn f konstant ist, und in diesem Fall ist jede Funktion u der Form

$$u(x_1, x_2) = w(x_2)$$

mit $w(0) = f(0)$ Lösung.

2) Für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

besteht das Anfangswertproblem in der Vorgabe von u und $\partial u / \partial \nu$ entlang einer Kurve Γ. Nehmen wir als Γ die x_1-Achse, so geben wir also

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) &= f(x_1) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) &= g(x_1) \end{aligned}$$

vor. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist (vgl. oben)

$$u(x_1, x_2) = v(x_1 + x_2) + w(x_1 - x_2)$$

mit beliebigen Funktionen v, w. Die Anfangsbedingungen führen zu

$$\begin{array}{rcrcl} v(x_1) & + & w(x_1) & = & f(x_1) \\ v'(x_1) & - & w'(x_1) & = & g(x_1)\ , \end{array}$$

also

$$v(x_1) - w(x_1) = \int\limits_0^{x_1} g(\eta) d\eta + c$$

mit einer beliebigen Konstanten c. Es folgt

$$\begin{aligned} v(x_1) &= \frac{1}{2}\left\{ f(x_1) + \int\limits_0^{x_1} g(\eta) d\eta + c \right\} \\ w(x_1) &= \frac{1}{2}\left\{ f(x_1) - \int\limits_0^{x_1} g(\eta) d\eta - c \right\} \end{aligned}$$

und damit

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\{f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2)\} + \frac{1}{2} \int\limits_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} g(\eta) d\eta\ .$$

Dies ist die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe.

Wählen wir nun als Anfangskurve Γ die erste Winkelhalbierende $x_1 = x_2$, geben wir also

$$\begin{aligned} u(x_1, x_1) &= f(x_1) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_1) &= g(x_1) \end{aligned}$$

vor, so müssen v, w die Bedingungen

$$\begin{aligned} v(2x_1) + w(0) &= f(x_1) \\ v'(2x_1) + w'(0) - v'(2x_1) + w'(0) &= g(x_1) \end{aligned}$$

erfüllen. Ist das Problem also überhaupt lösbar, so muß g konstant sein, und es ist dann jedes u der Form

$$u(x_1, x_2) = f((x_1 + x_2)/2) - w(0) + w(x_1 - x_2)$$

Lösung, wenn nur $w'(0) = g(0)/2$ gilt.

3) Lösen wir die Anfangswertaufgabe für die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0 \\ u(x_1, 0) &= f(x_1) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0 \end{aligned}$$

mit der analytischen Funktion f. Der Ansatz

$$u(x_1, x_2) = v(x_1 + ix_2) + w(x_1 - ix_2)$$

führt zu

$$v(x_1) + w(x_1) = f(x_1) \ , \quad v'(x_1) - w'(x_1) = 0 \ .$$

Ähnlich wie im letzten Beispiel führt dies zu der Lösung

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(f(x_1 + ix_2) + f(x_1 - ix_2) \right) \ .$$

Die Aufgabe ist also lösbar, jedenfalls für analytisches f. Nehmen wir z.B.

$$f_m(s) = e^{ims} \ ,$$

so wird die Lösung

$$u_m(x_1, x_2) = e^{imx_1} \cosh(mx_2) \ .$$

Wir haben also für $m \to \infty$ und $x_2 \neq 0$

$$|f_m| = 1 \ , \qquad |u_m| = \cosh(mx_2) \geq \frac{1}{2} e^{m|x_2|} \to \infty \ .$$

Dies bedeutet, daß die Abbildung $f \to u$, welche den Anfangswerten die Lösung zuordnet, nicht stetig ist. Das gleiche gilt für sämtliche Geraden als Anfangsmannigfaltigkeit. Dies folgt daraus, daß die Differentialgleichung gegenüber Rotationen und Translationen invariant ist.

Damit erweist sich die Anfangswertaufgabe für die Laplace'sche Differentialgleichung als nicht sinnvoll.

Wir werden sehen, daß hingegen die Randwertaufgabe sinnvoll ist. Diese besteht darin, den Wert von u entlang einer geschlossenen Kurve Γ vorzuschreiben, welche ein Gebiet Ω umschließt. Die (Dirichlet'sche) Randwertaufgabe lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0 \qquad in \qquad \Omega \, , \\ u &= f \qquad auf \quad \partial\Omega \, . \end{aligned}$$

Eine Lösung u wird man jetzt etwa in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ suchen. Ist Γ der Kreis $|x| = r$, so werden wir sehen, daß die Lösung durch die Poisson'sche Formel

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y|=r} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^2} f(y) dy \quad , \qquad |x| < r$$

gegeben ist.

Nach Hadamard heißt eine Aufgabe gut gestellt, wenn

1) sie lösbar ist.

2) die Lösung eindeutig bestimmt ist.

3) die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Andernfalls heißt eine Aufgabe schlecht gestellt. Schlecht gestellte Aufgaben gelten als nicht sinnvoll. Aufgabe der Theorie partieller Differentialgleichungen ist es, unter anderem, gut gestellte Probleme zu formulieren.

Kapitel 2

Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die quasilineare Differentialgleichung in zwei unabhängigen Variablen

Wir beschäftigen uns zunächst mit Differentialgleichungen 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen, die wir mit x, y bezeichnen. Eine solche Differentialgleichung heißt quasilinear, wenn sie von der Form

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{1.1}$$

ist. Im übrigen seien a, b, c stetig differenzierbare Funktionen in $\Omega \times \mathbb{R}^1$ mit einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei u eine Lösung von (1.1), d.h. $u \in C^1(\Omega)$ erfüllt (1.1) in Ω identisch. Dann stellt $z = u(x,y)$ die über Ω liegende Lösungsfläche dar. Wir suchen Kurven

$$x = x(t)\ , \qquad y = y(t)\ , \qquad z = z(t)\ ,$$

welche auf dieser Lösungsfläche liegen. Für deren Projektion in die $x-y$-Ebene wählen wir Lösungen von

$$\frac{dx}{dt} \;=\; a(x,y,u(x,y))$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x,y,u(x,y))$$

und setzen

$$z = u(x,y) \; .$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} \\ &= a(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ &= c(x,y,u(x,y)) \; . \end{aligned}$$

Also erfüllen die Funktionen x, y, z das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x,y,z) \; , \\ \frac{dy}{dt} &= b(x,y,z) \; , \\ \frac{dz}{dt} &= c(x,y,z) \; . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dieses nennt man “charakteristisches System”, seine Lösungen “Charakteristiken” von (1.1).

Im folgenden werden wir häufig Anfangswertprobleme für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen lösen müssen. Wir stellen dazu folgenden Satz bereit.

Satz 1.0: *Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^{n+1})$, $t_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein t_0 enthaltendes Intervall (a,b) und eine Umgebung Ω von x_0, so daß das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t,x) \; , \qquad x(t_0) = \xi$$

für jedes $\xi \in \Omega$ in (a,b) eine Lösung $x = \varphi(t,\xi)$ besitzt. Ist sogar $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, so ist φ eindeutig bestimmt, und es gilt $\varphi \in C^1((a,b) \times \Omega)$.

Beweis: Dies folgt durch Kombination der Sätze 1.2, 7.1, 7.2 aus Chapt. 1 von Coddington–Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations.

Satz 1.1: *Sei P ein Punkt einer Lösungsfläche von (1.1). Dann liegt jede Charakteristik durch P ganz auf der Lösungsfläche.*

Beweis: Sei $P = (x_0, y_0, z_0)$ und sei x, y, z eine Charakteristik durch P, d.h. eine Lösung von (1.2) mit

$$x(0) = x_0 \ , \qquad y(0) = y_0 \ , \qquad z(0) = z_0 \ .$$

Sei $z = u(x, y)$ eine Lösung von (1.1). Wir müssen zeigen, daß

$$z(t) = u(x(t), y(t)) \tag{1.3}$$

für alle t. Für $t = 0$ ist dies richtig, denn P liegt ja auf der Lösungsfläche. Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z - u(x, y)) &= \frac{dz}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt} - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt} \\ &= c(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)a(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)b(x, y, z) \ . \end{aligned}$$

Hier und im folgenden ist $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ zu setzen. Mit $w(t) = z(t) - u(x(t), y(t))$ lautet dies

$$\frac{dw}{dt} = c(x, y, u(x, y)+w) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)a(x, y, u(x, y)+w) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)b(x, y, u(x, y)+w) \ .$$

Da u die Differentialgleichung (1.1) erfüllt, hat diese Differentialgleichung die Lösung $w = 0$. Dies ist die einzige Lösung mit $w(0) = 0$. Also ist $w = 0$.

□

Unser Ziel ist die Lösung der Anfangswertaufgabe: Gesucht ist eine Lösung von (1.1), welche entlang einer in Ω verlaufenden Kurve

$$\Gamma : x = \varphi(s) \quad , \quad y = \psi(s)$$

vorgegebene Werte annimmt. Anders ausgedrückt: Die Lösungsfläche soll eine vorgegebene in $\Omega \times \mathbb{R}^1$ verlaufende Raumkurve

$$K : x = \varphi(s) \ , \qquad y = \psi(s) \ , \qquad z = \chi(s)$$

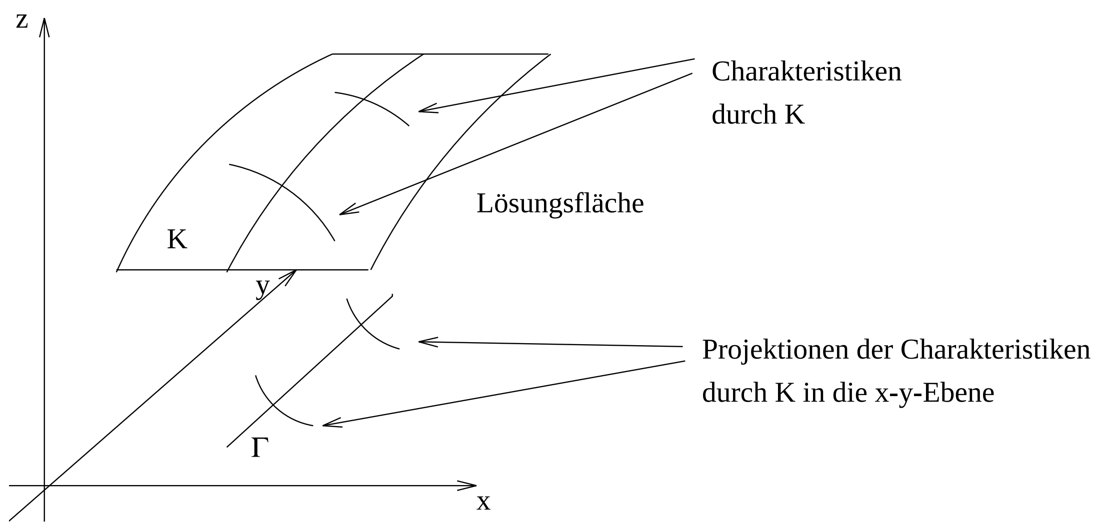


Abbildung 2.1: Charakteristiken und Projektionen.

enthalten. Wir setzen die Funktionen φ, ψ, χ als stetig differenzierbar voraus.

Nach Satz 1.1 bietet sich folgende Konstruktion der Lösungsfläche an:
Man berechne für jeden Punkt der Kurve K eine Charakteristik durch diesen Punkt. Fügen sich diese Charakteristiken zu einer Fläche zusammen, so wird dies eine Lösungsfläche sein.

Analytisch sieht das so aus: Für jedes s lösen wir (1.2) mit den Anfangswerten $(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))$, d.h. wir berechnen Funktionen $x(t,s)$, $y(t,s)$, $z(t,s)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a(x,y,z)\ , \quad x(0,s) = \varphi(s) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= b(x,y,z)\ , \quad y(0,s) = \psi(s) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= c(x,y,z)\ , \quad z(0,s) = \chi(s)\ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

s spielt hier die Rolle eines Parameters. Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann - in parametrischer Form - durch

$$x = x(t,s)\ , \qquad y = y(t,s)\ , \qquad z = z(t,s) \tag{1.5}$$

gegeben.

Die Charakteristiken durch K werden sich dann zu einer Fläche zusammenfügen, wenn ihre Projektionen in die x-y-Ebene transversal zu Γ sind, also nicht die Richtung der Tangente von Γ haben. Nach (1.4) haben diese Projektionen die Richtung $(a,b)^T$, wobei a, b in dem über dem Punkt $(x,y) \in \Gamma$ liegenden Punkt $(x,y,z) \in K$ zu nehmen sind. Demnach müssen wir fordern, daß $(a,b)^T$ nicht in dieselbe Richtung zeigt wie $(\varphi', \psi')^T$, wobei φ', ψ' für den zu (x,y) gehörigen Parameterwert s zu nehmen sind. Also muß

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} a(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)) & , & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)) & , & \psi'(s) \end{pmatrix} = 2 \tag{1.6}$$

gelten entlang K. Kurven K mit dieser Eigenschaft heißen "nicht charakteristisch". Dies ist verständlich, denn für Charakteristiken ist (1.6) gerade nicht erfüllt. Dementsprechend heißen Kurven, entlang denen (1.6) nicht erfüllt ist, "charakteristisch". Aus der Herleitung der charakteristischen Gleichung folgt, daß eine charakteristische Kurve, welche auf einer Lösungsfläche liegt, eine Charakteristik ist.

Satz 1.2: *Sei K nicht charakteristisch. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe eine Lösung, welche in einer Umgebung von Γ definiert ist.*

Beweis: Nach Satz 1.0 ist (1.4) für jedes s in $|t| < t_0(s)$ lösbar, wo $t_0(s) > 0$, und die Lösungen hängen stetig differenzierbar von t, s ab. Für $t = 0$ ist

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} a(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)) & , & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)) & , & \psi'(s) \end{pmatrix} = 2 \; .$$

Also ist die Abbildung

$$x = x(t,s) \; , \qquad y = y(t,s)$$

in einer Umgebung von $t = 0$ umkehrbar. Die Umkehrabbildung

$$t = t(x,y) \; , \qquad s = s(x,y)$$

existiert in einer Umgebung $D \subseteq \mathbb{R}^2$ von Γ und ist dort stetig differenzierbar. (1.5) definiert also eine schlicht über D liegende Fläche

$$z = z(t(x,y), s(x,y)) = u(x,y) \; .$$

Wir zeigen, daß u Lösungsfläche ist. Dazu beachten wir, daß

$$u(x(t,s),y(t,s)) = z(t,s)\ .$$

Differentiation nach t ergibt einerseits

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)a(x,y,z) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)b(x,y,z)\ ,\end{aligned}$$

wobei man x, y, z an den Stellen (t,s) zu nehmen hat, also

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)a(x,y,u(x,y)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)b(x,y,u(x,y))\ .$$

Andererseits ist - mit gleicher Notation -

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,y) = \frac{\partial z}{\partial t} = c(x,y,z) = c(x,y,u(x,y))\ .$$

Dies gilt für alle $(x,y) \in D$. Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\partial u/\partial t$ zeigt, daß u in der Tat Lösung in D ist.

$\square$

Bemerkung: Eine Lösung kann in der Form (1.5) erhalten werden.

Satz 1.3: *Sei K nicht charakteristisch. Dann gibt es in einer Umgebung von Γ nur eine differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems, und zwar die durch (1.5) gegebene.*

Beweis: Sei u eine Lösung der Anfangswertaufgabe in einer Umgebung von Γ, und sei (1.5) die - eindeutig bestimmte - Charakteristik durch $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\chi(s)$. Nach Satz 1.1 liegt diese Charakteristik auf der Lösungsfläche; (1.5) bestimmt also u eindeutig.

$\square$

BEISPIELE

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Das charakteristische System lautet

$$\frac{dx}{dt} = 1 \ , \quad \frac{dy}{dt} = 0 \ , \quad \frac{dz}{dt} = 0 \ .$$

Charakteristiken sind also die Geraden parallel zur x-Achse. Charakteristisch sind genau die Kurven, welche in einer Ebene parallel zur x-z-Ebene verlaufen. Eine Kurve, die in der y-z-Ebene und nie senkrecht verläuft, ist also nicht charakteristisch und das Anfangswertproblem damit eindeutig lösbar. Die Lösung erhalten wir, indem wir durch die Anfangskurve Geraden in Richtung der x-Achse ziehen.

2) $u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $u = \frac{1}{2}x$ entlang der 1. Winkelhalbierenden.
Die charakteristischen Gleichungen sind

$$\frac{dx}{dt} = z \ , \quad \frac{dy}{dt} = 1 \ , \quad \frac{dz}{dt} = 1$$

und die Anfangskurve ist durch

$$\varphi(s) = s \ , \quad \psi(s) = s \ , \quad \chi(s) = \frac{1}{2}s$$

gegeben. Es ist

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} \chi(s) & \varphi'(s) \\ 1 & \psi'(s) \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} s/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{für} \quad s \neq 2 \ ,$$

d.h. die Anfangskurve ist außerhalb $(2,2)$ nicht charakteristisch. Die Charakteristiken durch diese Anfangspunkte sind

$$\begin{aligned} x(t,s) &= \frac{1}{2}st + \frac{1}{2}t^2 + s \ , \\ y(t,s) &= s + t \ , \\ z(t,s) &= \frac{1}{2}s + t \ . \end{aligned}$$

Auflösen der ersten beiden Gleichungen nach t, s ergibt

$$t = \frac{y - x}{1 - y/2} \quad , \quad s = \frac{x - y^2/2}{1 - y/2} \; .$$

Dies ist außerhalb des Punktes $(2,2)$ der Anfangskurve sinnvoll. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, so erhält man als Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(x,y) = \frac{x - y^2/2}{2 - y} + \frac{y - x}{1 - y/2}$$

für $y \neq 2$.

Satz 1.4: *Sei K charakteristisch. Das Anfangswertproblem besitze eine differenzierbare Lösung. Dann ist K eine Charakteristik, und es gibt unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems.*

Beweis: Sei die Kurve K durch

$$x = \varphi(s) \; , \quad y = \psi(s) \; , \quad z = \chi(s)$$

gegeben. Da K charakteristisch ist, sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \varphi'(s) \\ \psi'(s) \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} a(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \\ b(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \end{pmatrix}$$

linear abhängig. Also können wir einen Parameter - wir bezeichnen ihn wieder mit s - einführen, so daß

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= a(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \; , \\ \psi'(s) &= b(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \; . \end{aligned}$$

K soll auf der Lösungsfläche $z = u(x,y)$ liegen, d.h. es muß

$$\chi(s) = u(\varphi(s), \psi(s))$$

sein. Differentiation ergibt

$$\chi'(s) = \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s), \psi(s))\varphi' + \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s),\psi(s))a(\varphi(s),\psi(s),u(\varphi(s),\psi(s))) \\
&\quad +\frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(s),\psi(s))b(\varphi(s),\psi(s),u(\varphi(s),\psi(s))) \\
&= c(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)) \ .
\end{aligned}
$$

K ist also in der Tat eine Charakteristik.

Sei nun $x_0 = \varphi(s_0)$, $y_0 = \psi(s_0)$, $z_0 = \chi(s_0)$ ein Punkt von K, und sei C eine nicht charakteristische Kurve durch diesen Punkt (Solche gibt es unendliche viele). Für C können wir das Anfangswertproblem lösen. Wegen Satz 1.1 liegt K auf der Lösungsfläche. Für jede Kurve C bekommen wir also eine Lösung der Anfangswertaufgabe für K.

□

BEISPIELE:

1) Wir versuchen, für das obige Beispiel

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

die Anfangswertaufgabe für die Charakteristik

$$K : \varphi(s) = \frac{1}{2}s^2 \ , \qquad \psi(s) = s \ , \qquad \chi(s) = s$$

zu lösen. Lösen wir das charakteristische System mit diesen Anfangswerten, so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
x(t,s) &= \frac{1}{2}(s+t)^2 \ , \\
y(t,s) &= s+t \ , \\
z(t,s) &= s+t \ .
\end{aligned}
$$

Hierdurch ist aber keine Fläche dargestellt, sondern eine Kurve (nämlich die Charakteristik K). Wie zu erwarten, versagt also unsere Methode zur Lösung der Anfangswertaufgabe, wenn die Anfangskurve eine Charakteristik ist.

Um die Anfangswertaufgabe zu lösen, kann man einmal wie beim Beweis zu Satz 1.4 vorgehen. Speziell in diesem Fall kann man aber auch ausnutzen, daß man für jedes $w \in C^1$ durch Auflösen von

$$x = \frac{1}{2}u^2 + w(u - y)$$

nach u eine Lösung der Differentialgleichung erhält (Dies ist eine Aufgabe 3 entsprechende Übungsaufgabe). Wählt man $w(0) = 0$, so enthält jede so berechnete Lösung die Kurve K und ist also Lösung der Anfangswertaufgabe.

2) Die Kurve

$$K : \varphi(s) = s^2 \ , \quad \psi(s) = 2s \ , \quad \chi(s) = s$$

ist charakteristisch, aber keine Charakteristik. Wir versuchen, die Anfangswertaufgabe für diese Kurve zu lösen. Die Lösung des charakteristischen Systems mit diesen Anfangswerten ist

$$\begin{aligned} x(t,s) &= \frac{1}{2}t^2 + ts + s^2 \\ y(t,s) &= t + 2s \\ z(t,s) &= t + s \ . \end{aligned}$$

Das Gebiet $x > y^2/4$ der $x - y$–Ebene entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise der rechten Halbebene der t, s–Ebene, und es ist

$$\begin{aligned} t &= 2\sqrt{x - y^2/4} \ , \\ s &= \frac{1}{2}(y - 2\sqrt{x - y^2/4}) \ . \end{aligned}$$

Setzt man dies in $z(t,s)$ ein, so bekommt man eine Funktion

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(y + 2\sqrt{x - y^2/4}) \ ,$$

welche man leicht als Lösung der Differentialgleichung erkennt, und diese enthält die Kurve K.

Trotzdem liegt kein Widerspruch zu Satz 1.4 vor, denn u ist entlang K nicht differenzierbar.

Satz 1.5: *Seien $u^{(i)}$, $i = 1, 2$, differenzierbare Lösungen der Differentialgleichung, deren Lösungsflächen sich in einer Kurve K schneiden. Die $u^{(i)}$ seien verschieden in dem Sinne, daß entlang K $\nabla u^{(1)} \neq \nabla u^{(2)}$ gilt. Dann ist K eine Charakteristik.*

Beweis: K besitze die Darstellung

$$x = \varphi(s) \ , \qquad y = \psi(s) \ , \qquad z = \chi(s) \ .$$

Die Differentialgleichung für $u^{(i)}$ entlang K lautet

$$a(\varphi, \psi, \chi) \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}(\varphi, \psi) + b(\varphi, \psi, \chi) \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y}(\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi, \chi) \ .$$

Entlang K sind die $u^{(i)}$ durch χ gegeben, also

$$u^{(i)}(\varphi, \psi) = \chi \ .$$

Differentiation ergibt

$$\varphi' \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}(\varphi, \psi) + \psi' \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y}(\varphi, \psi) = \chi' \ .$$

Das Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a(\varphi, \psi, \chi) & , & b(\varphi, \psi, \chi) & , & -c(\varphi, \psi, \chi) \\ \varphi' & , & \psi' & , & -\chi' \end{pmatrix}$$

hat also die beiden Lösungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}(\varphi, \psi) \\ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y}(\varphi, \psi) \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2 \ ,$$

welche nach Voraussetzung linear unabhängig sind. Also kann A höchstens den Rang $3-2=1$ haben. Die beiden Zeilen von A sind also linear abhängig, und wir können einen neuen Parameter - wir nennen ihn wieder s - einführen, so daß der Proportionalitätsfaktor 1 wird. Dann sind aber φ, ψ, χ Lösung der charakteristischen Gleichungen.

$\square$

2.2 Die allgemeine Differentialgleichung in zwei unabhängigen Variablen

Nun betrachten wir die Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \qquad p = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1}$$

mit einer in $\Omega \times \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbaren Funktion F, wo Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ ist. Wir setzen immer voraus, daß

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 > 0$$

ist. Lösung (in Ω) nennen wir jede Funktion $u \in C^2(\Omega)$, welche die Differentialgleichung in Ω identisch erfüllt.

Wie in §1 beginnen wir damit, Kurven zu suchen, welche auf einer Lösungsfläche $z = u(x, y)$ liegen. Wie in §1 suchen wir solche Kurven $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ als Lösung von

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, z, p(x, y), q(x, y))\,, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, z, p(x, y), q(x, y))\,, \\
z &= u(x, y)\,.
\end{aligned}$$

Differentiation der letzten Beziehung ergibt

$$\frac{dz}{dt} = p(x, y)\frac{dx}{dt} + q(x, y)\frac{dy}{dt}$$

$$= p(x, y)\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, z, p(x, y), q(x, y)) + q(x, y)\frac{\partial F}{\partial q}(x, y, z, p(x, y), q(x, y))\,.$$

Dies sind drei gewöhnliche Differentialgleichungen für die fünf Funktionen x, y, z, p, q. Zwei weitere Differentialgleichungen erhalten wir auf folgende Weise: Wir differenzieren (2.1) partiell nach x und y, also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}p + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}q + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

und beachten (es ist $u \in C^2$!)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u}p \ , \\ \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial u}q \ . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p(x,y) &= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u}p \ , \\ \frac{d}{dt}q(x,y) &= -\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial u}q \ . \end{aligned}$$

Wir haben also fünf gewöhnliche Differentialgleichungen für die fünf Funktionen $x, y, z, p = p(x,y),\ q = q(x,y)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,z,p,q) \ , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}(x,y,z,p,q) \ ,$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,z,p,q) + q\frac{\partial F}{\partial q}(x,y,z,p,q) \ , \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,p,q) - \frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,p,q)p \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z.p,q) - \frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,p,q)q \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dieses System heißt wieder "charakteristisches System", seine Lösungen x, y, z, p, q "Charakteristik". Charakteristiken sind jetzt also kompliziertere Gebilde, nämlich "Streifen".

Ist $z = u(x,y)$ irgendeine Fläche, welche eine Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ enthält, so gilt entlang dieser Kurve die "Streifenbedingung"

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} \ , \tag{2.3}$$

wobei die Funktion p, q durch

$$p(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \ , \quad q(t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t))$$

gegeben sind. Ein Quintupel von Funktionen x, y, z, p, q mit (2.3) heißt "Streifen", ein Quintupel reeller Zahlen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 "Streifenelement".

Satz 2.1: *Sei $S_0 = (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ein Streifenelement mit*

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

und sei x, y, z, p, q eine Charakteristik, welche S_0 enthält. Dann ist

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \ .$$

Beweis: Sei $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$. Wir setzen $\phi(t) = F(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$. Dann ist $\phi(0) = 0$, und nach (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{dq}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} \\ &= \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial u} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial q} \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Damit ist $\phi(t) = 0$.

□

Wir kommen nun zur Formulierung der Anfangswertaufgabe. Sei $\Gamma : x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ eine Kurve, entlang der wir Werte $z = \chi(s)$ vorschreiben. Sei also

$$K : x = \varphi(s) \ , \quad y = \psi(s) \ , \quad z = \chi(s)$$

eine Anfangskurve. Gibt es durch diese eine Fläche $z = u(x, y)$, welche (2.1) auch nur entlang K erfüllt, so muß

$$\frac{d\chi}{ds} = p\frac{d\varphi}{ds} + q\frac{d\psi}{ds}$$

$$F(\varphi, \psi, \chi, p, q) = 0$$

gelten. Dabei sind $p = u_x(\varphi, \psi)$, $q = u_y(\varphi, \psi)$ Funktionen des Kurvenparameters s. K läßt sich dann also notwendig zu einem Streifen φ, ψ, χ, p, q ergänzen. Demnach lautet jetzt die Anfangswertaufgabe sinnvollerweise:
Sei

$$S : x = \varphi(s)\ , \quad y = \psi(s)\ , \quad z = \chi(s)\ , \quad p = p(s)\ , \quad q = q(s)$$

ein Streifen mit $F(\varphi, \psi, \chi, p, q) = 0$. Gesucht ist eine Lösung u der Differentialgleichungen, für welche entlang Γ

$$\begin{aligned} u(\varphi, \psi) &= \chi \\ u_x(\varphi, \psi) &= p \\ u_y(\varphi, \psi) &= q \end{aligned}$$

gilt.

Wie in §1 sagen wir, ein Streifen sei nicht charakteristisch, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p}(\varphi, \psi, \chi, p, q) & , & \varphi' \\ \frac{\partial F}{\partial q}(\varphi, \psi, \chi, p, q) & , & \psi' \end{pmatrix} = 2 \tag{2.4}$$

ist. Ist dieser Rang entlang des Streifens < 2, so heißt der Streifen charakteristisch.

Zur Lösung des Anfangswertproblems geben wir wie in §1 vor:
Wir lösen das Anfangswertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, z, p, q) &, \quad & x(0, s) = \varphi(s)\ , \\ \frac{\partial y(t,s)}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, z, p, q) &, \quad & y(0, s) = \psi(s)\ , \\ \frac{\partial z(t,s)}{\partial t} &= p\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, z, p, q) + q\frac{\partial F}{\partial q}(x, y, z, p, q), & & z(0, s) = \chi(s)\ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p(t,s)}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,p,q) - \frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,p,q)p, \quad p(0,s) = p(s)\ , \\
\frac{\partial q(t,s)}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,p,q) - \frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,p,q)q, \quad q(0,s) = q(s)\ ,
\end{aligned}
$$

drücken t,s durch x,y aus - was wegen (2.4) nahe S möglich ist - und setzen

$$
u(x,y) = z(t(x,y)), s(x,y)) \tag{2.5}
$$

Satz 2.2: *Der Anfangsstreifen S sei nicht charakteristisch. Dann gibt es eine Umgebung von Γ, in der das Anfangswertproblem lösbar ist.*

Beweis: Daß die Funktionen (2.5) wohldefiniert sind, wird wie beim Beweis von Satz 1.2 gezeigt. Wir setzen

$$
\tilde{p}(x,y) = p(t(x,y), s(x,y))\ , \quad \tilde{q}(x,y) = q(t(x,y), s(x,y))
$$

und zeigen

$$
F(x,y,u(x,y),\tilde{p}(x,y),\tilde{q}(x,y)) = 0
$$

in einer Umgebung von Γ. Dazu betrachten wir die Funktion

$$
\begin{aligned}
\phi(t,s) &= F(x,y,u(x,y),\tilde{p}(x,y),\tilde{q}(x,y))\Big|_{x=x(t,s),y=y(t,s)} \\
&= F(x(t,s),y(t,s),z(t,s),p(t,s),q(t,s))\ .
\end{aligned}
$$

Für jedes s ist $x(\cdot,s),\ldots,q(\cdot,s)$ ein Streifen, und das Streifenelement $x(0,s),\ldots,q(0,s)$ erfüllt die Differentialgleichung. Nach Satz 2.1 erfüllt also der ganze Streifen die Differentialgleichung, d.h. $\phi = 0$.

Wir müssen noch zeigen, daß

$$
\tilde{p} = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad \tilde{q} = \frac{\partial u}{\partial y}
$$

ist. Dazu setzen wir

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\partial z}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t}\ , \\
U &= \frac{\partial z}{\partial s} - p\frac{\partial x}{\partial s} - q\frac{\partial y}{\partial s}
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

und zeigen $U = V = 0$. Für V ist dies einfach die dritte charakteristische Gleichung. Für U bilden wir

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s}\,\frac{\partial y}{\partial t}\ ,$$

denn die Ableitungen zweiter Ordnung heben sich wegen $x, y, z \in C^2$ (vgl. Satz 1.0) alle weg. Drücken wir die Ableitungen nach t durch die charakteristischen Gleichungen aus und beachten wir, daß wegen $V = 0$ auch $\partial V/\partial s = 0$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s}\,\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial s}\,\frac{\partial F}{\partial q} \\ &= \frac{\partial F}{\partial s} + \left(p\frac{\partial x}{\partial s} + q\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial F}{\partial u}\ ; \end{aligned}$$

als Argument von F sind dabei immer $x(t,s), \ldots, q(t,s)$ zu nehmen. Der Faktor von $\partial F/\partial u$ ist nun gerade $-U$, und wegen $F = 0$ ist auch $\partial F/\partial s = 0$. Also erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -U\frac{\partial F}{\partial u}\ . \tag{2.7}$$

Die Streifenbedingung für den Anfangsstreifen bedeutet nun aber gerade $U(0,s) = 0$. Zusammen mit (2.7) folgt $U = 0$.

Differenzieren wir $z(t,s) - u(x(t,s), y(t,s)) = 0$ nach t, s, so entsteht

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} &= 0\ , \\ \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} &= 0\ . \end{aligned}$$

Dies ist das lineare Gleichungssystem für $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, das wir in (2.6) für p, q erhalten haben. Die Matrix dieses Systems ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix}$$

und hat in einer Umgebung von Γ den Rang 2. Also ist $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$, oder, ausführlicher

$$\tilde{p}(x,y) = p(t(x,y)\ , s(x,y)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

und entsprechend für $\tilde{q}$.

$\square$

Satz 2.3: *Der Anfangsstreifen S sei nicht charakteristisch. Dann gibt es in einer Umgebung von Γ nur eine Lösung des Anfangswertproblems.*

Beweis: Wegen $F \in C^2$ sind die Funktionen des charakteristischen Systems alle C^1 und das Anfangswertproblem des charakteristischen Systems damit eindeutig lösbar. Nun kann man wie beim Beweis zu Satz 1.3 argumentieren.

$\square$

Satz 2.4: *Sei der Anfangsstreifen S charakteristisch. In einer Umgebung von Γ gebe es eine Lösung des Anfangswertproblems. Dann ist S eine Charakteristik.*

Beweis: Wie beim Beweis zu Satz 1.4 sehen wir, daß - evtl. nach Einführung eines neuen Parameters -

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\partial F}{\partial p}(\varphi,\psi,\chi,p,q) \\ \psi' &= \frac{\partial F}{\partial q}(\varphi,\psi,\chi,p,q) \end{aligned}$$

gelten muß. Daneben muß für die Lösung u

$$\begin{aligned} \chi &= u(\varphi,\psi) \\ p &= \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi,\psi) \\ q &= \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi,\psi) \end{aligned}$$

gelten. Differentiation dieser Beziehung führt, wie oben, zu den charakteristischen Gleichungen.

□

Bemerkung: Wie in Satz 1.4 kann man zeigen, daß es für Charakteristiken als Anfangskurven, jedenfalls in der Regel, unendlich viele Lösungen gibt. Die Konstruktion dieser Lösungen ist die gleiche wie bei Satz 1.4, nur muß man jetzt mit Streifen arbeiten. Zwei verschiedene Lösungen können sich entlang der Charakteristik sogar berühren. Entlang Charakteristiken kann man also von einer Lösung zu einer anderen übergehen, ohne die stetige Differenzierbarkeit zu verletzen. Entlang Charakteristiken sind also Verzweigungen der Lösungen möglich.

BEISPIEL:

Das charakteristische System der Eikonalgleichung

$$p^2 + q^2 = 1$$

ist

$$\begin{array}{rcll} \frac{dx}{dt} & = & 2p & , \quad \frac{dy}{dt} = 2q \ , \\ \frac{dz}{dt} & = & 2(p^2+q^2) & , \\ \frac{dp}{dt} & = & 0 & , \quad \frac{dq}{dt} = 0 \ . \end{array}$$

Die allgemeine Lösung mit den Zahlen $x(0) = x_0$ usw. ist

$$x = 2tp_0 + x_0 \ , \quad y = 2tq_0 + y_0 \ , \quad z = 2(p_0^2 + q_0^2)t + z_0 \ ,$$

$$p = p_0 \ , \quad q = q_0 \ .$$

Für Charakteristiken, welche auf Lösungen liegen, ist $p_0^2 + q_0^2 = 1$. Sie werden getragen von Geraden, welche mit der $x - y$–Ebene einen Winkel von 45° bilden. Aus solchen Streifen kann man die Ebenen $z = u_s(x, y)$ mit

$$u_s(x, y) = x \cos s + y \sin s$$

aufbauen. In der Tat bestätigt man sofort, daß dieses u_s für jedes s eine Lösung ist. Aus den Charakteristiken kann man aber auch den Kegel $z = v(x, y)$ mit

$$v(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

aufbauen, und auch v erkennt man sofort als Lösung. v ergibt sich übrigens als Einhüllende (vgl. Aufgabe 8) der Schar $(u_s)_{0 \leq s < 2\pi}$. Die Lösungen v und u_s berühren sich. Die Berührung erfolgt längs einer Charakteristik.

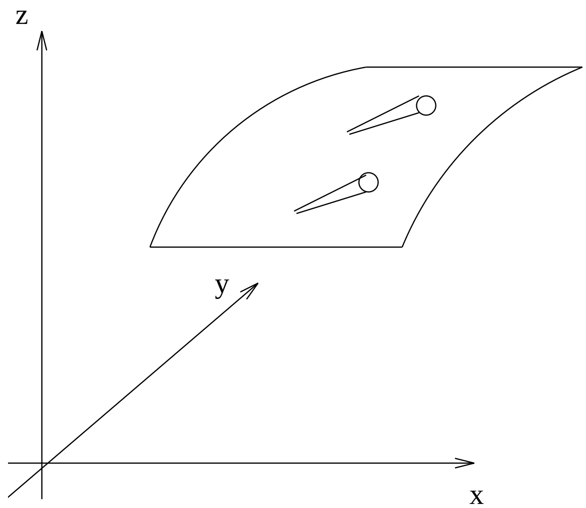


Abbildung 2.2: Monge'scher Kegel.

2.3 Geometrische Interpretation einer Differentialgleichung 1. Ordnung

Geometrisch bedeutet die Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \ , \tag{3.1}$$

daß wir eine Fläche $z = u(x, y)$ suchen, so daß in jedem Punkt $(x, y, u(x, y))$ der Fläche die Steigungen $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$ die Beziehung (3.1) erfüllen. Anders ausgedrückt: Die Fläche soll in jedem Punkt x, y, z eine Ebene der Schar

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y) \ , \quad F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{3.2}$$

berühren. Diese Ebenenschar hat in der Regel eine kegelartige Fläche mit Spitze in (x, y, z) als Einhüllende. Diese nennt man den "Monge'schen Kegel". Eine Fläche ist also dann Lösungsfläche, wenn sie in jedem ihrer Punkte den dortigen Monge'schen Kegel berührt.

Man kann übrigens zeigen, daß die Richtung der Berührungskurve von Lösungsfläche und Monge'schem Kegel die einer Charakteristik ist.

BEISPIELE:

1) Die Eikonalgleichung $p^2 + q^2 = 1$. Mit $p = \cos s$, $q = \sin s$ nimmt (3.2) die Gestalt

$$z' - z = \cos s(x' - x) + \sin s(y' - y)$$

an. Die Einhüllende ist

$$z' - z = \pm\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Der Monge'sche Kegel ist hier also wirklich ein Kegel.

2) Für die quasilineare Gleichung

$$ap + bq = c\ , \qquad a = a(x, y, u) \quad \text{usw.}$$

sind (3.2) genau die Ebenen, für die der Normalenvektor $(p, q, -1)$ senkrecht ist zu (a, b, c). Der Monge'sche Kegel entartet hier zu den Geraden mit Richtung (a, b, c) durch (x, y, z).

3) Die Differentialgleichung

$$p^2 - q^2 = 1\ .$$

Mit $p = \cosh s$, $q = \sinh s$ nimmt (3.2) die Gestalt

$$z' - z = \cosh s(x' - x) + \sinh s(y' - y)$$

an. Die Einhüllende ist

$$z' - z = \pm\sqrt{|(x' - x)^2 - (y' - y)^2|}\ .$$

Dieses Gebilde wird man nicht mehr als Kegel bezeichnen.

2.4 Das vollständige Integral

Eine Funktion $\phi \in C^2$ heißt vollständiges Integral der Differentialgleichung $F = 0$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, wenn

1) $u(x, y) = \phi(x, y, a, b)$ für jede Wahl von a, b Lösung der Differentialgleichung in Ω ist,

2) in Ω

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial a} & \frac{\partial^2\phi}{\partial a\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial a\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial b} & \frac{\partial^2\phi}{\partial b\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial b\partial y} \end{pmatrix} = 2 \tag{4.1}$$

ist.

Die zweite Bedingung bedeutet, daß ϕ auch wirklich von zwei Parametern abhängt und sich nicht durch nur einen ausdrücken läßt. Wäre nämlich mit einer geeigneten Funktion ψ

$$\phi(x, y, a, b) = \psi(x, y, c(a, b)) \ ,$$

ließe sich also ϕ durch einen einzigen Parameter c darstellen, so wäre

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial a} & \frac{\partial^2\phi}{\partial a\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial a\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial b} & \frac{\partial^2\phi}{\partial b\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial b\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial a} \\ \frac{\partial c}{\partial b} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial\psi}{\partial c}, \frac{\partial^2\psi}{\partial c\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial c\partial y} \right) \ ,$$

und diese Matrix könnte höchstens den Rang 1 haben. Die Bedingung (4.1) schließt dies also aus.

BEISPIELE:

1) Die Eikonalgleichung hat das vollständige Integral

$$\phi(x, y, a, b) = x \cos a + y \sin a + b \ .$$

2) Die Clairautsche Differentialgleichung $u = px + qy + f(p, q)$ hat das vollständige Integral

$$\phi(x, y, a, b) = ax + by + f(a, b) \ .$$

3) Die Differentialgleichung

$$u^2(p^2+q^2+1)=1$$

hat das vollständige Integral

$$\phi(x,y,a,b)=\sqrt{1-(x-a)^2-(y-b)^2}\ .$$

4) Die quasilineare Differentialgleichung

$$px+qy=\alpha u$$

hat für $\alpha \neq 0$ das vollständige Integral

$$\phi(x,y,a,b)=ax^\alpha+by^\alpha\ .$$

Aus einem vollständigen Integral kann man durch Bildung von Einhüllenden weitere Lösungen gewinnen, z.B. die singuläre Lösung nach Aufgabe 8. Wir wollen nun mit Hilfe eines vollständigen Integrals das Anfangswertproblem lösen. Sei

$$S: x=\varphi(s)\ ,\quad y=\psi(s)\ ,\quad z=\chi(s)\ ,\quad p=p(s)\ ,\quad q=q(s)$$

der Anfangsstreifen, also $F(\varphi,\psi,\chi,p,q)=0$. Wir bestimmen die Parameter $a(s)$, $b(s)$ eines vollständigen Integrals ϕ so, daß die Anfangsbedingung im Punkt $(\varphi(s),\psi(s))$ der Anfangskurve erfüllt sind. Dies bedeutet

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= \phi(\varphi(s),\psi(s),a(s),b(s))\ ,\\
p(s) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}(\varphi(s),\psi(s),a(s),b(s))\ ,\\
q(s) &= \frac{\partial\phi}{\partial y}(\varphi(s),\psi(s),a(s),b(s))\ .
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Wir wollen zeigen, daß $a(s)$, $b(s)$ in der Regel durch (4.2) eindeutig bestimmt sind. Ist etwa die aus den ersten beiden Spalten gebildete Teilmatrix in (4.1) nicht singulär, so können wir die ersten beiden Gleichungen von (4.2) eindeutig nach $a(s)$, $b(s)$ auflösen. Weil S die Differentialgleichung erfüllt und ϕ Lösung ist, haben wir

$$\begin{aligned}
F(\varphi(s),\psi(s),\chi(s),p(s),q(s)) &= 0\ ,\\
F(\varphi(s),\psi(s),\phi(\varphi(s),\psi(s),a(s),b(s)),\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(...)\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(...)) &= 0\ ,
\end{aligned}$$

wo für die Ableitungen von ϕ die gleichen Argumente wie für ϕ verwendet werden. Die ersten vier der Argumente von F in diesen beiden Gleichungen stimmen überein. In der Regel wird dann auch das letzte Argument übereinstimmen, und dies liefert uns die dritte der Beziehungen (4.2). Diese ist also automatisch erfüllt, wenn die ersten beiden erfüllt sind. Genauso argumentiert man, wenn eine andere 2×2–Untermatrix von (4.1) nicht singulär ist.

Für jedes s ist nun

$$z = \phi(x, y, a(s), b(s)) \tag{4.3}$$

eine Lösungsfläche, welche im Punkte $(\varphi(s), \psi(s))$ der Anfangskurve die Anfangsbedingungen erfüllt, d.h. den Anfangsstreifen berührt. Dies ist dann auch für die Einhüllende der Schar (4.3) der Fall, und zwar in jedem Punkt der Anfangskurve. Damit ist diese Lösung des Anfangswertproblems.

2.5 Der Fall von n unabhängigen Variablen

Wir betrachten nun den Fall von $n \geq 2$ unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$, die wir in dem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zusammenfassen. Die Unterschiede zwischen dem Fall $n = 2$ und dem allgemeinen Fall sind im Wesentlichen eine Sache der Notation. Wir werden uns also sehr kurz fassen. Die quasilineare Differentialgleichung lautet nun

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x,u) \tag{5.1}$$

und die charakteristischen Gleichungen sind

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x,z) \,, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.2}$$

$$\frac{dz}{dt} = c(x,z) \,. \tag{5.3}$$

Dies ist ein System von $n+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Lösungen von (5.2) nennen wir wieder Charakteristiken von (5.1); sie sind jetzt Kurven im $(n+1)$-dimensionalen Raum. Satz 1.1 gilt unverändert.

Das Anfangswertproblem lautet nun: Sei

$$K: \qquad x = \varphi(s) \,, \qquad z = \chi(s) \,, \qquad s = (s_1, \ldots, s_{n-1})$$

eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Matrix $(\partial \varphi_i / \partial s_j)$ habe den Rang $n-1$. Gesucht ist eine Lösung u von (5.1), welche K enthält, also

$$u(\varphi(s)) = \chi(s) \,.$$

Wie im Falle $n = 2$ lösen wir die Anfangswertaufgabe

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a(x,z) \quad , \quad x(0,s) = \varphi(s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c(x,z) \quad , \quad z(0,s) = \chi(s)$$

und lösen $x(t,s) = x$ nach t, s auf. Dies ist in einer Umgebung der Anfangsmannigfaltigkeit $\Gamma : x = \varphi(s)$ möglich, wenn

$$\text{Rang}\left(a(\varphi,\chi), \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-1}} \right) = n \tag{5.4}$$

ist. K heißt dann nicht charakteristisch. Die Lösung u ergibt sich wieder durch Einsetzen von $t = t(x)$, $s = s(x)$ in $z(t,s)$. Ist (5.4) verletzt, so ist das Anfangswertproblem wieder nur in Ausnahmefällen und dann mehrdeutig lösbar.

Die allgemeine Differentialgleichung lautet für n unabhängige Variable

$$F(x,u,p) = 0\ , \qquad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{5.5}$$

und die charakterischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(x,z,p)\ , && i = 1,\ldots,n \\
\frac{dz}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} p_i\ \frac{\partial F}{\partial p_i}(x,z,p)\ , && \\
\frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,z,p) - p_i \frac{\partial F}{\partial u}(x,z,p)\ , && i = 1,\ldots,n\ .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Lösungen dieses Systems von $2n+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen nennen wir wieder Charakteristiken. Wieder gilt Satz 2.1.

Zum Anfangswertproblem für eine Anfangsmannigfaltigkeit K ergänzen wir K zu einer "Streifenmannigfaltigkeit"

$$S: \quad x = \varphi(s)\ , \qquad z = \chi(s)\ , \qquad p = p(s)$$

mit

$$\frac{\partial \chi}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_j}\ , \qquad j = 1,\ldots,n-1$$

und $F(\varphi,\chi,p) = 0$. Es ist dann eine Lösung u von (5.5) gesucht, welche S enthält, d.h.

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= u(\varphi(s)) \\
p_i(s) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(s))\ , \qquad i = 1,\ldots,n\ .
\end{aligned}$$

Wie in Satz 2.2 sieht man, daß dies möglich ist, wenn S nicht charakteristisch ist, d.h. wenn

$$\operatorname{Rang}\left(\nabla_p F(\varphi,\chi,p), \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-1}}\right) = n \tag{5.7}$$

ist. Zur Berechnung der Lösung löst man das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(x,z,p), & x_i(0,s) = \varphi_i(s)\ , \quad i = 1,\dots,n \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{n} p_i\,\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,z,p)\ , & z(0,s) = \chi(s)\ , \\
\frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,z,p) - p_i\frac{\partial F}{\partial u}(x,z,p), & p_i(0,s) = p_i(s)
\end{aligned}$$

und löst $x(t,s) = x$ nach t, s auf. Dies ist in einer Umgebung von $\Gamma : x = \varphi(s)$ möglich. Die Lösung ergibt sich dann wieder durch Einsetzen von $t = t(x)$; $s = s(x)$ in $z(t,s)$.

Ein vollständiges Integral ist im Falle von n unabhängigen Variablen natürlich eine Lösung $\phi(x, a_1, \dots, a_n)$, welche von den n Parametern $a_1, \dots, a_n$ auch wirklich abhängt, d.h.

$$\text{Rang}\left(\nabla_a\phi, \nabla_a\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots \nabla_a\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right) = n\ .$$

2.6 Hamilton - Jacobi - Theorie

Wir haben gesehen, daß die Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Wir zeigen nun, daß auch umgekehrt ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen aus einem vollständigen Integral einer geeigneten partiellen Differentialgleichung berechnet werden kann.

Sei $H = H(t,x,p)$ eine - hinreichend oft differenzierbare - Funktion von $t \in \mathbb{R}^1$, $x, p \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das System

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t,x,p)\ , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(t,x,p) \tag{6.1}$$

von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Man nennt ein solches System "kanonisch" und H seine Hamilton - Funktion. Diesem System ordnen wir die Hamilton - Jacobische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t, x, p) = 0 \ , \quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{6.2}$$

für die Funktion $u(t, x)$ zu. Dies ist eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in $n+1$ unabhängigen Variablen $t, x_1, \ldots, x_n$, in der u nicht explizit vorkommt und die nach einer der Ableitungen von u, nämlich der nach t, aufgelöst ist.

Wir nehmen nun an, es sei eine Lösung $\phi(t, x, a_1, \ldots, a_n)$ bekannt mit

$$\text{Rang}\left(\nabla_a \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \nabla_a \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right) = n \ . \tag{6.3}$$

Es ist dann $\phi + a_0$ ein vollständiges Integral von (6.2). Wir wollen die allgemeine Lösung von (6.1) durch ϕ ausdrücken. Dazu lösen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(t, x, a) = b_i \ , \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

nach x auf und erhalten Funktionen

$$x_i = x_i(t, a, b) \ .$$

Dies ist wegen (6.3) möglich, zumindest lokal. Danach setzen wir

$$p_i(t, a, b) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(t, x(t, a, b), a) \ . \tag{6.4}$$

Wir zeigen, daß die so definierten Funktionen x_i, p_i für jede Wahl von a, b Lösungen von (6.1) sind. Zunächst differenzieren wir

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(t, x(t, a, b), a) - b_i = 0$$

nach t und

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, a) + H(t, x, \nabla_x \phi(t, x, a)) = 0 \tag{6.5}$$

nach a_i. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial a_i} \frac{dx_j}{dt} &= 0 \,, \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j}(t, x, \nabla_x \phi) &= 0 \,,
\end{aligned}$$

wobei ϕ und seine Ableitungen immer an der Stelle $(t, x(t, a, b), a)$ zu nehmen sind. Die Matrix dieser beiden Gleichungssysteme ist wegen (6.3) nicht singulär. Also müssen ihre Lösungen identisch sein, d.h.

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}(t, x, p) \,. \tag{6.6}$$

Danach differenzieren wir (6.4) nach t und (6.5) nach x_i. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_j}{dt} - \frac{dp_i}{dt} &= 0 \,, \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x, \nabla_x \phi) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}(t, x, \nabla_x \phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} &= 0
\end{aligned}$$

mit den gleichen Argumenten von ϕ wie oben. Wegen (6.6) folgt $dp_i/dt = \partial H/\partial x_i$ und damit die Behauptung.

Kapitel 3

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.1 Lineare Systeme in zwei unabhängigen Variablen

Wir betrachten lineare Systeme der Form

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} = B(x,y)u + b(x,y) \tag{1.1}$$

mit (n,n)-Matrizen A, B, einem n-Vektor b und den Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x \\ \vdots \\ \partial u_n/\partial x \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

A, B, b seien in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig.

Wir wollen (1.1) in eine einfache Form bringen und setzen dazu $u = Wv$ mit einer noch zu bestimmenden (n,n)-Matrix W. Die neue abhängige Variable v erfüllt

$$\frac{\partial W}{\partial y}v + W\frac{\partial v}{\partial y} + A\left(\frac{\partial W}{\partial x}v + W\frac{\partial v}{\partial x}\right) = BWv + b$$

oder

$$\frac{\partial v}{\partial y} + W^{-1}AW\frac{\partial v}{\partial x} = Cv + c \,,$$

$$C = W^{-1}\left(BW - \frac{\partial W}{\partial y} - A\frac{\partial W}{\partial x}\right) \,, \quad c = W^{-1}b \,.$$

Wir nennen (1.1) im Punkt (x, y)

hyperbolisch, wenn $A(x, y)$ n verschiedene reelle

parabolisch , wenn $A(x, y)$ $1 \leq k < n$ verschiedene reelle

elliptisch , wenn $A(x, y)$ keine reellen

Eigenwerte besitzt. Ist (1.1) hyperbolisch (parabolisch, elliptisch) in jedem Punkt eines Gebietes, so nennen wir (1.1) dort entsprechend.

Sei nun (1.1) hyperbolisch in Ω. Dann hat $A(x, y)$ für $(x, y) \in \Omega$ n reelle Eigenwerte $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_n(x, y)$ mit linear unabhängigen Eigenvektoren $w_1(x, y), \ldots, w_n(x, y)$. Es ist dann mit $W = (w_1, \ldots, w_n)$.

$$W^{-1}AW = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda \,.$$

Die transformierte Differentialgleichung nimmt dann die Form

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \Lambda\frac{\partial v}{\partial x} = Cv + c \tag{1.2}$$

an. Komponentenweise lautet dies

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} + \lambda_i\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}v_j + c_i \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,. \tag{1.3}$$

mit den Elementen c_{ij}, c_i von C bzw. c. Dies nennt man die Normalform eines hyperbolischen Systems.

Man könnte nun auf die Idee kommen, die n Gleichungen (1.3) genau so zu lösen wie wir das in Teil II für eine einzelne Differentialgleichung gemacht haben. Der j-ten Gleichung würde man dann die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(x_j, y_j) \,, \ \frac{dy_j}{dt} = 1 \tag{1.4}$$

zuordnen. Man würde nun eine Lösung $v_1, \ldots, v_n$ von (1.3) entlang einer Lösung von (1.4) betrachten, also die Funktionen

$$z_{ij}(t) = v_i(x_j(t), y_j(t))$$

einführen. Es wäre dann

$$\frac{dz_{ij}}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x}(x_j, y_j)\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial y}(x_j, y_j)\frac{dy_j}{dt}$$

Für $i = j$ erhielte man wie in Teil II

$$\frac{dz_{ii}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} z_{ki} + c_i \, , \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \, . \tag{1.5}$$

Für $i \neq j$ bekommen wir aber keine Differentialgleichungen für z_{ij}, so daß (1.4), (1.5) für $n > 1$ kein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen bilden. Damit ist der in Teil II erfolgreiche Ansatz gescheitert.

Trotzdem nennen wir die Lösungen von (1.4) Charakteristiken von (1.1). Sie spielen beim Aufbau der Lösungen von (1.1) eine große Rolle.

Einen anderen Zugang zu den Charakteristiken bekommt man über das Anfangswertproblem. Das Anfangswertproblem für (1.1) besteht darin, entlang einer Kurve

$$\Gamma : \; x = \varphi(s) \; , \quad y = \psi(s)$$

Werte für den Vektor u vorzuschreiben, also

$$u(\varphi(s), \psi(s)) = \chi(s) \; .$$

φ, ψ und χ seien stetig differenzierbar, und es sei $(\varphi')^2 + (\psi')^2 > 0$. Wir fragen uns, ob durch die Vorgabe von u entlang Γ auch die Ableitungen 1. Ordnung von u entlang Γ bestimmt sind. Wir haben entlang Γ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} &= Bu + b \\ \psi'\frac{\partial u}{\partial y} + \varphi'\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{ds} \; . \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieses linearen Systems von $2n$ Gleichungen für die $2n$ Unbekannten $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ ist bekannt. $\partial u/\partial y$ sind also bestimmt, falls

$$\det \begin{pmatrix} I & A \\ \psi' I & \varphi' I \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1.6}$$

entlang Γ. Verschwindet die Determinante in (1.6) entlang Γ, so sind die Ableitungen von u nicht durch die Werte von u entlang Γ bestimmt. Es hat dann das lineare System

$$\begin{aligned} v + Aw &= 0 \\ \psi' v + \varphi' w &= 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale Lösung. Wegen $(\varphi')^2 + (\psi')^2 > 0$ kann nicht $\psi' = 0$ sein. Wir können daher auf Γ einen Parameter s so einführen, daß $\psi' = 1$ ist. Dann folgt durch Elimination von v

$$Aw = \varphi' w \ ,$$

d.h. φ' ist Eigenwert von A. Die Kurven Γ, entlang denen die Ableitungen von u nicht durch u bestimmt sind, sind also gerade die Charakteristiken.

BEISPIEL

1) Das System

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

lautet mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ .$$

Es ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = -1 \ .$$

Das System ist also hyperbolisch, und Charakteristiken sind alle Geraden, die einen Winkel von $\pm 45°$ mit der x-Achse machen.

2) Das System

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

(Cauchy-Riemann) lautet

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u = 0 \ , \qquad \lambda_1 = i \ , \quad \lambda_2 = -i \ .$$

Das System ist also elliptisch.

3.2 Das Anfangswertproblem für hyperbolische Systeme

Wir wollen nun Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Anfangswertproblem hyperbolischer Systeme beweisen. Entlang einer Kurve

$$\Gamma : \quad x = \varphi(s)\ , \quad y = \psi(s)$$

mit φ, $\psi \in C^1$, $(\varphi')^2 + (\psi')^2 > 0$ soll also u gegeben sein. Gesucht ist eine Lösung des Systems in einer Umgebung von Γ, welche auf Γ die vorgegebenen Werte annimmt.

Dazu kehren wir zur Normalform (1.3) eines hyperbolischen Systems zurück. Sei C_i eine der Charakteristiken, und sei D_i die Ableitung

$$D_i v(x_i(t), y_i(t)) = \frac{d}{dt} v(x_i(t), y_i(t))$$

D_i ist also (bis auf den Faktor $((dx_i/dt)^2 + (dy_i/dt)^2)^{1/2}$) die Richtungsableitung entlang C_i. Wegen

$$D_i v_i = \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}$$

läßt sich (1.3) in der Form

$$D_i v_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j + c_i\ , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

schreiben.

Wir wollen nun die Anfangswertaufgabe lösen. Sei $(\xi, \eta) \in \Omega$, und die Charakteristiken $C_1, \ldots, C_n$ durch (ξ, η) treffen Γ in den Punkten $P_1(\xi, \eta), \ldots, P_n(\xi, \eta)$:

$$(x_i(0), y_i(0)) = P_i(\xi, \eta)\ , \quad (x_i(t_i), y_i(t_i)) = (\xi, \eta)\ .$$

Natürlich sind die t_i Funktionen von ξ, η.
Wir integrieren (2.1) entlang C_i von $P_i(\xi, \eta)$ bis (ξ, η):

$$\begin{aligned} v_i(\xi, \eta) &= v_i(P_i(\xi, \eta)) + \int_0^{t_i} D_i v_i(x_i(t), y_i(t))dt \\ &= v_i(P_i(\xi, \eta)) + \int_0^{t_i} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j + c_i \right) (x_i(t), y_i(t))dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

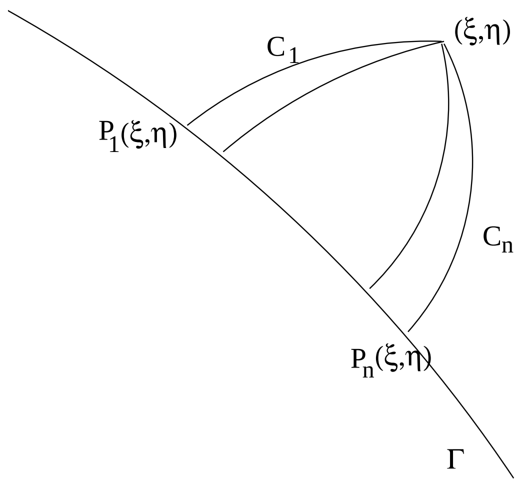


Abbildung 3.1: Charakteristiken durch einen Punkt (ξ, η).

Wir haben ein System von Integralgleichungen für die Funktionen v_i erhalten. Dieses werden wir, genau so wie man das bei gewöhnlichen Differentialgleichungen macht, durch Iteration lösen und damit Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Anfangswertproblem bekommen. Diese Rückführung auf ein System von Integralgleichungen ist möglich, wenn Γ in keinem Punkte die Richtung einer der Charakteristiken durch diesen Punkt hat, d.h. wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \varphi' & \lambda_i \\ \psi' & 1 \end{pmatrix} = 2 \,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

entlang Γ. Wir nennen Γ dann nicht charakteristisch. Z.B. ist die x-Achse nicht charakteristisch (Das liegt daran, daß wir den Koeffizienten von $\partial u/\partial y$ nichtsingulär, nämlich als Einheitsmatrix gewählt haben.).

Die Charakteristiken durch (ξ, η), welche zum größten bzw. kleinsten Eigenwert gehören, heißen Außencharakteristiken.

Satz 2.0: (Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz): *Sei D eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes X. Sei $T : D \to D$ kontrahierend, d.h. es gibt $q < 1$ mit*

$$\|Tx - Ty\| \le q\|x - y\| \,, \qquad \forall\, x, y \in D \,.$$

Dann hat die Gleichung $x = Tx$ genau eine Lösung $\overline{x}$ in D. Die Folge $x_{k+1} = Tx_k$ konvergiert für jedes $x_0 \in D$ gegen $\overline{x}$, und es gilt

$$\|x_k - \overline{x}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \, \|x_1 - x_0\| \, .$$

Beweis: Siehe etwa W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 45.

Sei nun A in Ω stetig differenzierbar. Dann sind die Charakteristiken durch einen Punkt (ξ, η) eindeutig bestimmt. Wir betrachten ein Gebiet G, das von den Außencharakteristiken C_1, C_n durch (ξ, η) und die Anfangskurve Γ begrenzt wird.

Satz 2.1: *Sei $v = \chi$ auf Γ stetig vorgegeben und sei Γ nicht charakteristisch. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe mit v_i, $D_i v_i \in C(\overline{G})$, $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis: Sei X der Raum der n-dimensionalen Vektoren mit Komponenten aus $C(\overline{G})$. X ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\| = \underset{i}{\mathrm{Max}} \; \underset{(x,y) \in \overline{G}}{\mathrm{Max}} \; |u_i(x,y)| \, .$$

Die Konvergenz in X ist die gleichmäßige Konvergenz in $\overline{G}$ sämtlicher Komponenten. Der Operator $T : X \to X$ ist erklärt durch

$$(Tv)_i(x,y) = \chi_i(P_i(x,y)) + \int\limits_0^{t_i(x,y)} \left(\sum_j c_{ij} v_j + c_i \right) (x_i(t), y_i(t)) dt \, . \qquad (2.3)$$

T bildet X in sich ab. Sind $u, v \in X$, so gilt

$$((Tv)_i - (Tu)_i)(x,y) = \int\limits_0^{t_i(x,y)} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(v_j - u_j)(x_i(t), y_i(t)) dt \, .$$

Sei S der Streifen $\{(x,y) \in \overline{G} : 0 \leq t_i(x,y) \leq s, i = 1, \ldots, n\}$, und sei Y der Banachraum der stetigen Vektoren in S. Dann gilt für $u, v \in Y$

$$\|Tv - Tu\| \leq sMn\|v - u\| \, , \qquad M = \underset{i,j}{\mathrm{Max}} \ \underset{\overline{G}}{\mathrm{Max}} \ |c_{i,j}(x,y)| \, .$$

Wir wählen nun s so klein, daß $sMn < 1$. Dann ist T in Y kontrahierend. Nach Satz 2.0 gibt es also genau ein $v \in Y$ mit $v = Tv$, und dieses v ist Lösung der Anfangswertaufgabe in S. Jede weitere Lösung müßte ebenfalls diese Gleichung erfüllen und also nach Satz 2.0 mit v identisch sein.

Damit ist der Satz jedenfalls für einen Streifen mit Rand Γ gezeigt. Durch Wiederholung des Arguments für weitere Streifen folgt die Behauptung.

$\square$

Satz 2.2: *Seien A, B, b in Ω stetig differenzierbar, und sei u entlang Γ stetig differenzierbar vorgegeben. Sei Γ nicht charakteristisch. Dann ist die Lösung aus Satz 2.1 in G stetig differenzierbar.*

Beweis: Nach Beweis von Satz 2.1 und Satz 2.0 konvergiert die Folge

$$v_i^{(k+1)}(x,y) = \chi_i(P_i(x,y)) + \int\limits_0^{t_i(x,y)} \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} v_j^{(k)} + c_i \right) (x_i(t), y_i(t)) dt$$

gleichmäßig gegen v_i. Wählen wir $v_i^{(0)} = 0$, so sind alle $v_i^{(k)}$ stetig differenzierbar. Man muß nun zeigen, daß auch die Ableitungen der $v_i^{(k)}$ gleichmäßig in G konvergieren. Dies geschieht ähnlich, aber komplizierter als beim Beweis zu Satz 2.1. Man muß dabei beachten, daß ja $x_i = x_i(t,x,y)$, $y_i = y_i(t,x,y)$ ist.

$\square$

Bemerkungen:

1) Der Wert von v in (x,y) hängt natürlich nur von den Werten von v auf Γ zwischen den Außencharakteristiken durch (x,y) ab. Der zwischen diesen Außencharakteristiken liegende Teil $\Gamma(x,y)$ von Γ heißt Abhängigkeitsgebiet

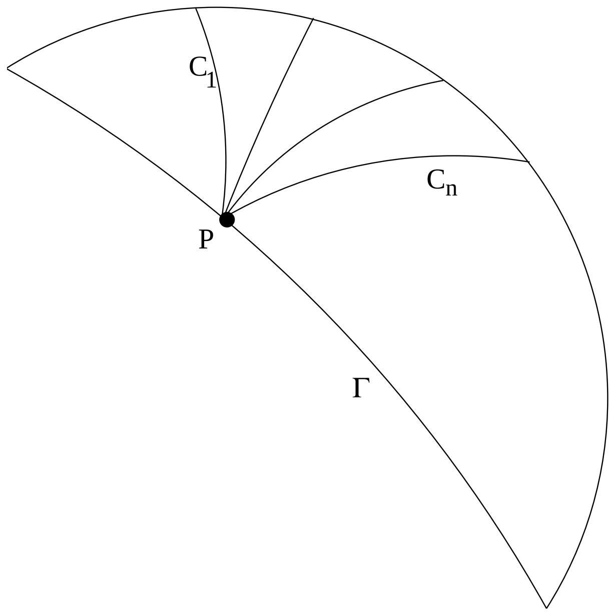


Abbildung 3.2: Unstetigkeiten pflanzen sich entlang Charakteristiken fort.

von (x, y). Umgekehrt heißt das von diesen Außencharakteristiken begrenzte Gebiet Einflußgebiet von $\Gamma(x, y)$.

2) Sei P ein Punkt von Γ, in dem die Anfangsfunktion einen "Knick" hat, d.h. v ist auf $\Gamma \setminus P$ stetig differenzierbar, und die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von dv/ds existieren. Wir wollen diese Situation zunächst für den Fall

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

mit einer konstanten Matrix A studieren. Die Integralgleichung (2.2) lautet dann

$$v_i(x, y) = v_i(P_i(x, y)) \qquad i = 1, \ldots, n\ .$$

Die rechte Seite ist stetig differenzierbar für alle $(x, y) \in G$, durch die keine P treffende Charakteristik geht, also überall in G mit Ausnahme der von P ausgehenden Charakteristiken.

Die Lösung v ist also stetig differenzierbar in G mit Ausnahme der von P

ausgehende Charakteristiken, und dort existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der 1. Ableitungen von v.

Wir sehen also, daß unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 v (und damit u) i. allg. nicht differenzierbar in G ist, sondern daß sich Unstetigkeiten in der Ableitung der Anfangswerte entlang der Charakteristiken in G hinein fortpflanzen.

3) Haben die vorgegebenen Funktionswerte in einem Punkt P einen Sprung, so setzt sich auch dieser ins Innere von G entlang Charakteristiken fort.

3.3 Anfangs-Randwertprobleme hyperbolischer Systeme

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir die Variable y ausgezeichnet: Die Koeffizientenmatrix von $\partial u/\partial y$ war die Einheitsmatrix (oder irgend eine invertierbare Matrix). Die Charakteristiken $x(t)$, $y(t)$ verlaufen dann nie waagerecht, d.h. die x-Achse ist stets nicht charakteristisch. Wir können die x-Achse also stets als Anfangskurve Γ wählen. Dies nennen wir die reine Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} &= Bu + c\,,\\ u(x,0) &= \chi(x)\,,\quad -\infty < x < \infty\,.\end{aligned}$$

Physikalisch bedeutet y hier die Zeit und $u(x,y)$ den Zustand eines durch die Koordinate x beschriebenen Systems zur Zeit y.

BEISPIEL:

Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,\quad c = c(x) > 0$$

geht durch die Einführung von

$$u_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\,,\quad u_2 = \frac{\partial w}{\partial x}$$

über in das System

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c' & 0 \end{pmatrix} u\,,\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\,.$$

Die charakteristischen Gleichungen sind, wenn wir t als Parameter einführen,

$$\frac{dx_1}{dt} = c(x_1)\,,\qquad \frac{dx_2}{dt} = -c(x_2)\,.$$

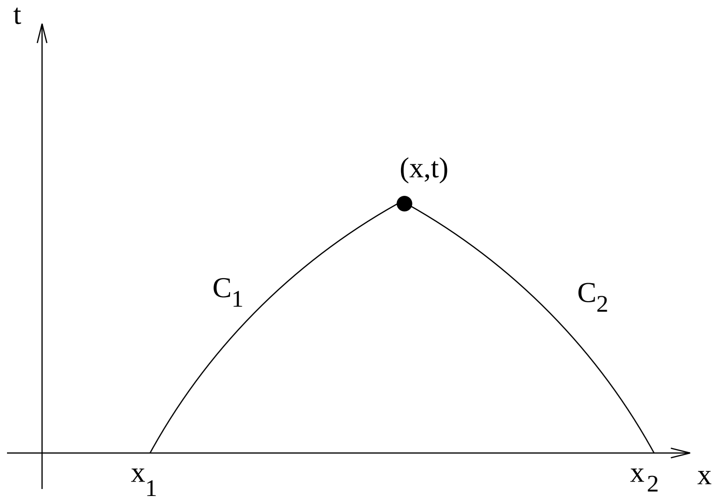


Abbildung 3.3: Charakteristiken einer eindimensionalen Wellengleichung .

Die Charakteristiken C_1, C_2 durch (x,t) schneiden die Anfangskurve $t = 0$ also in Punkten x_1, x_2 mit

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{c(x)} = t \;, \qquad -\int_{x_2}^{x} \frac{dx}{c(x)} = t \;.$$

Ist c konstant, so ist

$$x_1 = x - ct \;, \qquad x_2 = x + ct \;.$$

Wir sehen also, daß c die Geschwindigkeit ist, mit der sich Signale in dem System ausbreiten. Im nicht konstanten Fall bedeutet $c(x)$ dementsprechend die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei x.

Soweit die reine Anfangswertaufgabe. Häufig erstreckt sich das System nicht von $-\infty$ bis $+\infty$, sondern nur über eine Halbgerade, etwa von 0 bis ∞. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) Sämtliche Eigenwerte $\lambda_i(x)$ von A sind in $(0,\infty)$ negativ. In diesem Fall ist der Abhängigkeitsbereich eines Punktes (x,y) mit $x > 0$ immer noch Teil der positiven x-Achse, und es genügt, dort Anfangswerte vorzuschreiben.

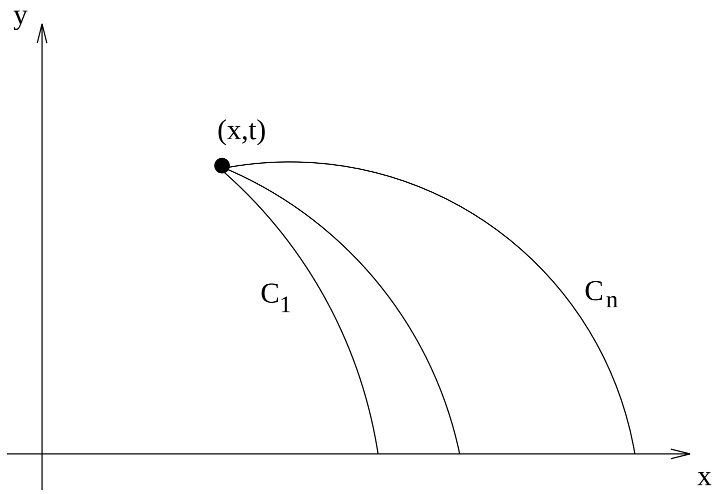


Abbildung 3.4: Charakteristiken zu A mit negativen Eigenwerten.

u ist dadurch für alle x,$y > 0$ eindeutig bestimmt.

(b) Es gibt ein $k > 0$, so daß für $x > 0$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \ldots > \lambda_n \ . \tag{3.1}$$

Sei C_i die Charakteristik durch $(0,0)$, welche zu λ_i gehört.
Für alle Punkte unterhalb C_1 liegt dann der Abhängigkeitsbereich immer noch auf der positiven x-Achse. Unterhalb von C_1 ist also u immer noch durch die Anfangswerte auf der positiven x-Achse bestimmt. Oberhalb C_1 ist dies aber nicht mehr der Fall. Die zu λ_i gehörige Charakteristik durch einen Punkt oberhalb C_k endet jetzt auf der y-Achse, $i = 1, \ldots, k$. Wir müssen v_i für diese i also entlang der y-Achse vorschreiben:

$$v_i(0,y) = g_i(y) \ , \qquad i = 1, \ldots, k \ \ .$$

Allgemeiner betrachtet man die Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} &= Bu + c \ , \\ u(x,0) &= \chi(x) \ , \quad x \geq 0 \\ v_i(0,y) - \sum_{j=k+1}^{n} m_{ij} v_j(0,y) &= g_i(y) \ , \quad y \geq 0 \ , \quad i = 1, \ldots, k \ . \end{aligned}$$

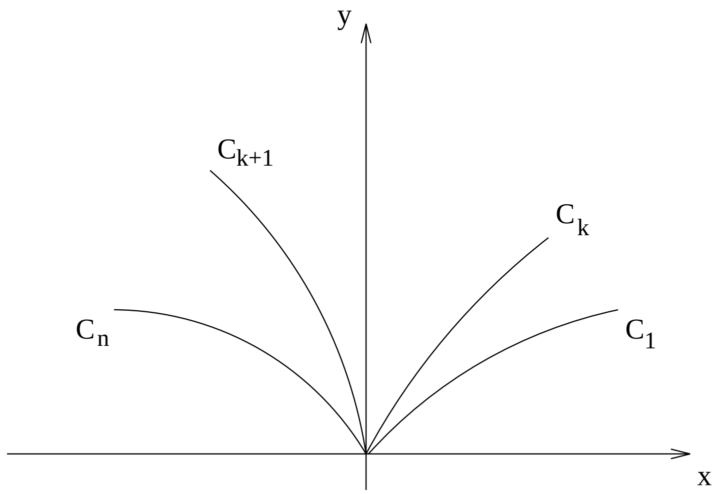


Abbildung 3.5: A mit positiven und negativen Eigenwert.

mit gewissen Konstanten m_{ij}. I. allg. werden die beiden letzten Gleichungen bei $(0,0)$ nicht kompatibel sein. Dies entspricht einer Unstetigkeit der Anfangswerte. Wir werden daher entlang der von $(0,0)$ ausgehenden Charakteristiken Unstetigkeiten von u haben.

Entsprechend behandelt man den Fall eines endlichen Intervalls $[a,b]$. Unter der Voraussetzung (3.1) betrachten wir die Anfangs-Randwertaufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} = Bu + c \; ,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \chi(x), a \le x \le b \; , \\ v_i(a,y) - \sum_{j=k+1}^{n} m_{ij} v_j(a,y) &= g_i(y) \; , \qquad i = 1,\ldots,k \; , \\ v_i(b,y) + \sum_{j=1}^{k} m_{ij} v_j(b,y) &= g_i(y) \; , \qquad i = k+1,\ldots,n \; . \end{aligned}$$

3.4 Der nichtlineare Fall

Das System

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,y,u)$$

heißt halblinear. Es wird genauso wie im linearen Fall auf Normalform gebracht. Diese lautet nun

$$D_i v = c_i(x,y,v) \ , \qquad i = 1,\ldots,n \ .$$

Satz 2.1 - 2.2 bleiben für $b \in C^1$ in einer lokalen Version richtig, d.h. man muß die Aussage auf eine hinreichend kleine Umgebung von Γ beschränken.

Das System

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,y,u) \tag{4.1}$$

heißt quasilinear.

BEISPIEL

Bewegung eines Gases in einer Röhre mit Strömungsgeschwindigkeit u, Dichte ρ und Druck $p = p(\rho)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Hat $A(x,y,u)$ für ein u n reelle verschieden Eigenwerte $\lambda_i(x,y,u)$, so nennen wir das System für dieses x, y, u hyperbolisch. Die charakteristischen Gleichungen lauten nun

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i(x_i, y_i, u(x_i,y_i)) \ , \quad \frac{dy_i}{dt} = 1 \ , \quad i = 1,\ldots,n \ .$$

Sie hängen also von u ab, und das gleiche gilt dann für ihre Lösungen, die wir wieder Charakteristiken nennen.

Die Normalform (1.2) ist nun nicht mehr sehr nützlich. In der Matrix C dieser Normalform treten nämlich die Ableitungen von W auf, und diese enthalten jetzt die Ableitungen von u und damit von v. Um einen Ersatz für (1.2) zu erhalten, multipliziere man (4.1) von links mit W^{-1}. Wegen $W^{-1}A = \Lambda W^{-1}$ ergibt sich

$$W^{-1}\frac{\partial u}{\partial y} + \Lambda W^{-1}\frac{\partial u}{\partial x} = W^{-1}b \ .$$

Bezeichnet p_i^T die i-te Zeile von W^{-1}, so lautet dies

$$p_i^T\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda_i\frac{\partial u}{\partial x}\right) = p_i^T b \ , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Hier tritt wieder die Richtungsableitung $D_i = \partial/\partial y + \lambda_i \partial/\partial x$ in Richtung der i-ten Charakteristik auf. Diese Ableitung wirkt jetzt aber auf alle Komponenten von u, nicht nur auf die i-te wie in (1.2). Eine Trennung ist nun nicht mehr möglich.

Trotzdem kommt man wieder zu Existenzsätzen für die Anfangswertaufgabe. Sei $u = \chi$ entlang Γ vorgeschrieben. Γ sei nicht charakteristisch in dem Sinne, daß Γ nirgends die Richtung einer Charakteristik $\lambda_i(x, y, \chi)$ hat. Ist also

$$\Gamma : \ x = \varphi(s) \ , \quad y = \psi(s) \ ,$$

so muß

$$\text{Rang}\ (\psi'(s)I + \varphi'(s)A(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) = n$$

sein. Dann gelten wieder lokale Analoga der Sätze 2.1 - 2.

Kapitel 4

Differentialgleichungen höherer Ordnung

4.1 Typeneinteilung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten die quasilineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\ . \tag{1.1}$$

Hier sind a, b, c, f stetige Funktionen der Variablen x, y, u, $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$. Wir stellen wieder die Anfangswertaufgabe:

Seien entlang einer Kurve Γ in der x, y–Ebene u, p, q gegeben. Gesucht ist eine Lösung von (1.1), welche entlang Γ gerade diese Werte und Ableitungen annimmt.

Wie in III.1 fragen wir uns, ob die Anfangsbedingungen wenigstens die zweiten Ableitungen von u entlang Γ eindeutig bestimmen. Sei

$$\Gamma :\ \ \varphi(x, y) = 0\ , \qquad (\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 > 0 \quad \text{entlang}\ \ \Gamma$$

und sei ψ irgend eine weitere Funktion, so daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \xi &= \psi(x, y) \\ \eta &= \varphi(x, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

in einer Umgebung von Γ umkehrbar eindeutig ist. Das Bild von Γ liegt dann auf der ξ–Achse $\eta = 0$. Durch diese Transformation geht (1.1) über in eine Differentialgleichung für die Funktion $U(\xi, \eta) = u(x, y)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}$$

wo die Punkte Ausdrücke bedeuten, welche höchstens Ableitungen 1. Ordnung von U enthalten. Entsprechend erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \ldots \quad, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \ldots\,.
\end{aligned}$$

Damit geht (1.1) über in

$$A\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2B\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + C\,\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = F \tag{1.3}$$

mit

$$\begin{aligned}
A &= a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \\
B &= a\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
C &= a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

und einem Ausdruck F, der nur noch erste Ableitungen von U enthält.

Entlang $\eta = 0$ sind U, $\partial U/\partial\xi$, $\partial U/\partial\eta$ bekannt, ebenso $\partial^2 U/\partial\xi^2$ und $\partial^2 U/\partial\xi\partial\eta$. $\partial^2 U/\partial\eta^2$ läßt sich aus (1.3) bestimmen, wenn $C \neq 0$ ist. Ist $C = 0$ entlang Γ, so lassen sich dagegen nicht alle zweiten Ableitungen bestimmen. Solche Kurven nennen wir charakteristisch. Die Kurve $\varphi = 0$ ist also charakteristisch, wenn

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= 0 \quad \text{entlang } \varphi = 0\,, \\ Q(\xi,\eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2\,. \end{aligned}$$

Q heißt die "charakteristische quadratische Form" von (1.1).

Wir nennen (1.1) (in x, y, u, p, q)

elliptisch	,	falls	Q	definit	,	d.h.	$ac - b^2 > 0$,
parabolisch	,	falls	Q	semidefinit	,	d.h.	$ac - b^2 = 0$,
hyperbolisch	,	falls	Q	indefinit	,	d.h.	$ac - b^2 < 0$.

Die Definitheitsbedingungen bekommt man, wenn man die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, also die Nullstellen von

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

mit Hilfe der Vietaschen Sätze untersucht.

BEISPIELE:

1) Die Laplacesche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist elliptisch. Sie hat keine charakteristischen Kurven.

2) Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ist parabolisch. Charakteristische Kurven sind die Parallelen zur x–Achse.

3) Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ist hyperbolisch. Charakteristische Kurven sind die Geraden mit Steigung ± 1.

Soweit der Fall zweier unabhängiger Variablen. Die quasilineare Differentialgleichung in $n \geq 2$ unabhängigen Variablen lautet

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \ , \quad A = (a_{ij}) \quad \text{symmetrisch} \ , \tag{1.4}$$

mit stetigen Funktionen a_{ij}, f von x, u, $p_i = \partial u / \partial x_i$. Das Anfangswertproblem besteht darin, u und p_i entlang einer $(n-1)$–dimensionalen Mannigfaltigkeit Γ vorzuschreiben. Wir beschreiben Γ in der Form $\varphi = 0$ mit einer Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, deren Gradient entlang Γ nicht verschwindet. Γ heißt charakteristisch, wenn

$$Q(\nabla\varphi) = 0 \quad \text{entlang} \quad \varphi = 0 \ ,$$

$$Q(\xi) = \xi^T A \xi \ .$$

Wir nennen (1.4) (in x, u, p)

elliptisch	,	wenn alle Eigenwerte von A das gleiche Vorzeichen haben,
parabolisch	,	wenn genau ein Eigenwert von A verschwindet und alle anderen ein und dasselbe Vorzeichen haben,
hyperbolisch	,	wenn genau $n-1$ Eigenwerte ein und dasselbe Vorzeichen haben und der verbleibende das Entgegengesetzte.

4.2 Die Poissonsche Differentialgleichung

Als Poissonsche Differentialgleichung bezeichnet man die elliptische Gleichung

$$-\Delta u = f \ , \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \ . \tag{2.1}$$

Für $f = 0$ spricht man von Laplace- oder Potential-Gleichung. Lösungen der Laplaceschen Gleichung nennt man harmonische Funktionen.

Für $n = 2, 3, \ldots$ definieren wir die "Grundlösung" von (2.1) als

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & , \quad n > 2 \ , \\ \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} & , \quad n = 2 \ . \end{cases} \tag{2.2}$$

Hierbei bedeutet $|x|$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ und ω_n die Oberfläche der n–dimensionalen Einheitskugel, also

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \ , \qquad \omega_2 = 2\pi \ , \quad \omega_3 = 4\pi \ .$$

Man kann nachrechnen, daß γ_n eine in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonische Funktion ist.

Im folgenden nennen wir Ω ein Normalgebiet, wenn es beschränkt ist und die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes zuläßt. Mit $C^p(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Funktionen aus $C^p(\Omega)$, welche samt ihrer Ableitungen bis zur Ordnung p eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ besitzen. Es gibt dann auf $\partial\Omega$ ein stetiges Vektorfeld ν mit $|\nu| = 1$, so daß für $f \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\partial\Omega} f \nu_i d\sigma \ . \tag{2.3}$$

Hier ist σ das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$ und ν_i die i-te Komponente von ν. Ist $\partial\Omega$ in einer Umgebung von $x \in \partial\Omega$ hinreichend glatt, so ist $\nu(x)$ die äußere Normale an $\partial\Omega$ im Punkte x. Ist $f = uv$ mit $u,v \in C^1(\overline{\Omega})$, so wird aus (2.3) eine Regel zur partiellen Integration

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \ dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \ d\sigma - \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \ dx \ . \tag{2.4}$$

Ist sogar $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so haben wir

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i v \, d\sigma - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \; ,$$

und nach Summation über i entsteht die 1. Greensche Formel

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma - \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \tag{2.5}$$

mit der Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

in Richtung ν. Vertauschen von u, v und Subtraktion ergibt für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ die 2. Greensche Formel

$$\int\limits_{\Omega} ((\Delta u) v - (\Delta v) u) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u \right) d\sigma \; . \tag{2.6}$$

Satz 2.1: *Sei Ω ein Normalgebiet, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt für $x \in \Omega$*

$$\begin{aligned} u(x) \;&=\; \int\limits_{\partial\Omega} \left(\gamma_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \gamma_n(x-y) \right) d\sigma(y) \\ &\quad - \int\limits_{\Omega} \gamma_n(x-y) \Delta u(y) dy \; . \end{aligned}$$

Beweis: Wir schneiden aus Ω eine Kugel um x vom Radius ρ heraus. Das entstehende Gebiet nennen wir Ω_ρ. Die 2. Greensche Formel für Ω_ρ ergibt

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_\rho} (\gamma_n(x-y)\Delta u(y) - u(y)\Delta\gamma_n(x-y)) dy \\ = \; &\int\limits_{\partial\Omega} \left(\gamma_n(x-y) \, \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \, \frac{\partial}{\partial \nu} \gamma_n(x-y) \right) d\sigma(y) \\ &\quad - \int\limits_{|y-x|=\rho} \left(\gamma_n(x-y) \, \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \, \frac{\partial}{\partial \nu} \, \gamma_n(x-y) \right) d\sigma(y) \; . \end{aligned}$$

Im letzten Integral ist ν die äußere Normale auf $|y-x|=\rho$. Wir führen den Beweis nur für $n \geq 3$. Die Modifikationen für $n=2$ sind geringfügig. Für $|y-x|=\rho$ gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_n(x-y)| &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n}\,\rho^{2-n} \\ |\frac{\partial}{\partial\nu}\gamma_n(x-y)| &\leq \frac{1}{\omega_n}\,\rho^{1-n}\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left| \int\limits_{|y-x|=\rho} \gamma_n(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)d\sigma(y)\right| \leq \frac{\rho}{n-2}\,M$$

und

$$\left| \int\limits_{|y-x|=\rho} (u(x)-u(y))\,\frac{\partial}{\partial\nu}\,\gamma_n(x-y)d\sigma(y)\right| \leq \rho M\ ,$$

$$M = n\,\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{y\in\Omega}{\mathrm{Sup}}\ \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|\ .$$

Läßt man also $\rho \to 0$ streben, so entsteht

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \gamma_n(x-y)\Delta u(y)dy \\ = &\int\limits_{\partial\Omega} \left(\gamma_n(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\,\gamma_n(x-y)\right) d\sigma(y) \\ &\quad + u(x)\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{|y-x|=\rho}\frac{\partial}{\partial\nu}\,\gamma_n(x-y)d\sigma(y)\ . \end{aligned}$$

Für das letzte Integral erhält man den Wert -1.

$\square$

Satz 2.2: *Sei Ω ein Normalgebiet, $f \in C(\overline{\Omega})$, und*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \gamma_n(x-y) f(y) dy \; .$$

Dann ist $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_n(x-y) f(y) dy \; . \tag{2.7}$$

Ist sogar $f \in C^1(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^2(\Omega)$, und es gilt

$$-\Delta u = f$$

in Ω.

Beweis 1 *(F. John, Plane waves and spherical means, Seite 10)*:
Hier setzen wir voraus, daß f in ganz $\mathbb{R}^n$ definiert und C^0 bzw. C^1 ist und außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Es ist für $x \neq 0$ (sowohl für $n > 2$ als auch für $n = 2$)

$$\frac{\partial \gamma_n(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\omega_n} |x|^{-n} x_i \; .$$

Durch Differenzieren unter dem Integralzeichen erhalten wir also

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(y) dy \; .$$

Für stetiges f mit kompaktem Träger existiert dieses uneigentliche Integral. Damit ist die erste Formel bewiesen. Zum Beweis der zweiten setzen wir $x - y = z$ und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{\omega_n} \int z_i |z|^{-n} f(x-z) dz \; .$$

Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, so existiert auch das uneigentliche Integral

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \quad = \quad -\frac{1}{\omega_n} \frac{\partial}{\partial x_i} \int z_i |z|^{-n} f(x-z) dz$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega} z_i |z|^{-n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z)dz \\
&= +\frac{1}{\omega_n} \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{|z|>\rho} z_i |z|^{-n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(x-z)dz \ .
\end{aligned}
$$

Der Gaußsche Integralsatz, angewendet auf ein hinreichend großes Gebiet, ergibt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{|z|>\rho} z_i|z|^{-n}\frac{\partial f}{\partial z_i}(x-z)dz &= \int\limits_{|z|=\rho} z_i|z|^{-n} f(x-z)\frac{(-z_i)}{|z|}d\sigma(z) \\
&- \int\limits_{|z|>\rho} \frac{\partial}{\partial z_i}(z_i|z|^{-n}) f(x-z)dz \ .
\end{aligned}
$$

Wir haben bereits nachgerechnet, daß

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(z_i|z|^{-n}) = 0 \ .$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|z|>\rho} z_i|z|^{-n}\frac{\partial f}{\partial z_i}(x-z)dz = -\rho^{1-n}\int\limits_{|z|=\rho} f(x-z)d\sigma(z) \ .$$

Für $\rho \to 0$ konvergiert dies gegen $-\omega_n f(x)$, womit die zweite Formel bewiesen ist.

Beweis 2 (Courant-Hilbert):

Wir führen den Beweis nur für $n \geq 3$. Die Modifikationen für $n = 2$ sind geringfügig.

Wir führen eine "geglättete Fundamentallösung" $\gamma_{n,\rho}$ ein, welche C^1 ist und für $|x-y| \geq \rho$ mit γ_n übereinstimmt. Eine Möglichkeit hierzu ist

$$\gamma_{n,\rho}(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \begin{cases} |x|^{2-n} & , \quad |x| > \rho \ , \\ \rho^{2-n}\left(1 + \frac{n-2}{2}\left(1 - (\frac{|x|}{\rho})^2\right)\right) & , \quad |x| \leq \rho \ . \end{cases}$$

Zum späteren Gebrauch notieren wir, daß für $|x| \leq \rho$

$$|\gamma_{n,\rho}(x)| \leq \frac{n}{2(n-2)\omega_n}\rho^{2-n} \ , \quad \left|\frac{\partial \gamma_{n,\rho}}{\partial x_i}(x)\right| \leq \frac{1}{\omega_n}\rho^{1-n} \ . \qquad (2.8)$$

Wir setzen nun

$$u_\rho(x) = \int\limits_\Omega \gamma_{n,\rho}(x-y)f(y)dy \ .$$

Sicher ist $u_\rho \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Mit Hilfe von (2.8) finden wir

$$\begin{aligned}
|u_\rho(x) - u(x)| &= \left|\int\limits_\Omega \left(\gamma_{n,\rho}(x-y) - \gamma_n(x-y)\right) f(y)dy\right| \\
&\leq M \int\limits_{|y|\leq\rho} \left(|\gamma_{n,\rho}(y)| + |\gamma_n(y)|\right) dy \ , \quad M = \operatorname*{Max}_{y\in\Omega} |f(y)| \\
&\leq \frac{M}{((n-2)\omega_n} \int\limits_{|y|\leq\rho} (n\rho^{2-n} + |y|^{2-n})dy \ ,
\end{aligned}$$

und dies strebt mit $\rho \to 0$ gegen 0. Also strebt u_ρ für $\rho \to 0$ gleichmäßig gegen u, so daß $u \in C(\mathbb{R}^n)$ ist. Weiter ist sicher

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x_i} = \int\limits_\Omega \frac{\partial \gamma_{n,\rho}}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy \ .$$

Wir setzen

$$u_i(x) = \int\limits_\Omega \frac{\partial \gamma_n}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy \ .$$

Wieder mit Hilfe von (2.8) finden wir

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial x_i} - u_i\right)(x)\right| &= \left|\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial \gamma_{n,\rho}}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_n}{\partial x_i}\right)(x-y)f(y)dy\right| \\
&\leq M \int\limits_{|y|\leq\rho} \left(\left|\frac{\partial \gamma_{n,\rho}}{\partial x_i}(y)\right| + \left|\frac{\partial \gamma_n}{\partial x_i}(y)\right|\right) dy \\
&\leq \frac{M}{\omega_n} \int\limits_{|y|\leq\rho} \left(\rho^{1-n} + |y|^{1-n}\right) dy
\end{aligned}$$

und dies konvergiert ebenfalls gegen 0 mit $\rho \to 0$. Also konvergiert $\frac{\partial u_\rho}{\partial x_i}$ gleichmäßig gegen u_i. Damit muß $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ sein, und $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i$. (2.7) ist gezeigt.

Wir wollen vom Gaußschen Integralsatz in der Form (2.4) Gebrauch machen. Für $x \in \Omega$ wenden wir (2.4) an auf die Funktionen

$$u(y) = \gamma_n(x-y)\ , \qquad v(y) = f(y)\ .$$

Dies ist wegen der Singularität von u bei x nicht möglich. Benutzen wir (2.4) trotzdem, so entsteht wegen (2.7)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int\limits_\Omega \gamma_n(x-y)\frac{\partial f}{\partial y_i}(y)dy - \int\limits_{\partial\Omega} \gamma_n(x-y)f(y)\nu_i(y)d\sigma(y)\ .$$

Dies rechtfertigt man wie im Beweis zu Satz 2.1 durch Wegschneiden einer Kugel vom Radius $\rho > 0$ um x und anschließendem Grenzübergang $\rho \to 0$.

Das erste Integral ist wie oben eine differenzierbare Funktion von x, und man darf unter dem Integralzeichen differenzieren. Das zweite Integral enthält für $x \in \Omega$ gar keine Singularität. Also ist $u \in C^2(\Omega)$, und es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\ \gamma_n(x-y)\frac{\partial f}{\partial y_i}(y)dy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i}\ \gamma_n(x-y)f(y)\nu_i(y)d\sigma(y)\ .$$

Für das erste Integral können wir

$$-\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial y_i}\ \gamma_n(x-y)\frac{\partial}{\partial y_i}(f(y)-f(x))dy$$

schreiben und dies wieder mit (2.4) zu

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i}\gamma_n(x-y)(f(y)-f(x))\nu_i(y)d\sigma(y)$$

umformen. Wegen $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die Singularität im ersten Integral integrierbar. Die Rechtfertigung ist dann wie beim Beweis zu Satz 2.1 möglich. Es folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \int\limits_\Omega \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\ \gamma_n(x-y)(f(y)-f(x))dy + f(x)\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i}\ \gamma_n(x-y)\nu_i\ d\sigma(y)\ .$$

Summation über i ergibt

$$\Delta u(x) = \int\limits_{\Omega} \Delta_y \gamma_n(x-y)(f(y)-f(x))dy + f(x) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu}\gamma_n(x-y)d\sigma(y) \ , \quad (2.9)$$

wo $\partial/\partial\nu$ die Normalableitung bezüglich y bedeutet.

Das erste Integral in (2.9) verschwindet, weil $\Delta_y\gamma_n(x-y) = 0$ für $y \neq x$. Wir beenden den Beweis, indem wir

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} \gamma_n(x-y)d\sigma(y) = -1 \quad (2.10)$$

zeigen. Dazu wenden wir Satz 2.1 an mit $u = 1$.

□

Satz 2.3 (Eigenschaften harmonischer Funktionen): *Sei Ω ein Normalgebiet, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Dann gilt*

(i)

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} d\sigma = 0 \qquad \textit{(Gaußscher Integralsatz)}\ .$$

(ii) Sei $x \in \Omega$ und r so klein, daß auch die Kugel vom Radius r um x in Ω liegt. Dann ist

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{|x-y|=r} u(y)d\sigma(y) \qquad \textit{(Mittelwerteigenschaft)}\ .$$

(iii) Nimmt u sein Maximum oder sein Minimum in $\overline{\Omega}$ in Ω an, so ist u in $\overline{\Omega}$ konstant (Maximumprinzip).

(iv) Erfüllen u_1, u_2 die Voraussetzungen über u und ist $u_1 = u_2$ auf $\partial\Omega$, so ist $u_1 = u_2$ in $\overline{\Omega}$.

Beweis:

(i) Dies ist die 1. Greensche Formel mit $v = 1$.

(ii) Sei $0 < \rho < r$. Wir wenden die 2. Greensche Formel an auf das Normalgebiet $G = \{y : \rho < |y-x| < r\}$ mit $v(y) = \gamma_n(y-x)$. Es ergibt sich

$$0 = \int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \gamma_n(y-x) d\sigma(y) - \int\limits_{\partial G} u\, \frac{\partial \gamma_n(y-x)}{\partial \nu}\, d\sigma(y)\ .$$

$\gamma_n(y-x)$ ist auf $|y-x| = \rho$ und auf $|y-x| = r$ konstant. Also verschwindet das erste Integral wegen (i). Für das zweite Integral berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \gamma_n(x-y) = \begin{cases} -\frac{1}{\omega_n}\, r^{1-n} & \text{auf} \quad |y-x| = r\ , \\ \frac{1}{\omega_n}\, \rho^{1-n} & \text{auf} \quad |y-x| = \rho\ . \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=\rho} u d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=r} u\, d\sigma(y)\ .$$

Das linke Integral strebt für $\rho \to 0$ gegen $u(x)$.

(iii) Wir zeigen den Satz für das Maximum. Sei

$$M = \operatorname*{Max}_{x \in \overline{\Omega}}\ u(x)\ , \qquad F = \{y \in \Omega : u(y) = M\}\ .$$

Wir zeigen, daß F sowohl offen als auch abgeschlossen in Ω ist. Dann ist entweder $F = \Omega$ und damit u in Ω (also auch in $\overline{\Omega}$) konstant, oder es ist $F = \emptyset$, d.h. u nimmt sein Maximum nicht in Ω an.

Die Abgeschlossenheit von F folgt sofort aus der Stetigkeit von u. Um zu zeigen, daß F offen ist, nehmen wir ein $x \in F$ und zeigen, daß auch die Kugel um x vom Radius r in F liegt, wenn nur r so klein gewählt wird, daß diese Kugel in Ω liegt. Nach (ii) ist dann

$$M = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=\rho} u\, d\sigma(y)\ , \qquad 0 < \rho < r\ .$$

Dies kann nur richtig sein, wenn $u(y) = M$ auf ganz $|x-y| = \rho$ gilt. Damit ist $u(y) = M$ für $|y-x| \le r$. Also ist F offen.

(iv) Mit u_1, u_2 ist auch $u = u_1 - u_2$ harmonisch. Maximum und Minimum von u in Ω sind nach (iii) wegen $u = 0$ auf $\partial\Omega$ beide Null.

$\square$

Bemerkung: Beim Beweis des Maximumprinzips wurde nur die Mittelwerteigenschaft verwendet.

Wir wollen nun das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einer Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ lösen. Dazu führen wir die Greensche Funktion $G_n(x,y)$ ein. Für jedes $y \in \Omega$ ist

$$G_n(x,y) = \gamma_n(x-y) + w(x,y)$$

mit einer Lösung $w(\,\cdot\,,y)$ von

$$\begin{aligned} \Delta w(x,y) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ w(x,y) &= -\gamma_n(x-y) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

und $w(\,\cdot\,,y) \in C^2(\overline{\Omega})$.

BEISPIEL: Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. Dann ist

$$G_n(x,y) = \gamma_n(x-y) - \gamma_n\left(\frac{|y|}{r}x - \frac{r}{|y|}y\right)$$

Greensche Funktion. Denn

$$w(x,y) = -\gamma_n\left(\frac{|y|}{r}x - \frac{r}{|y|}y\right)$$

ist natürlich eine harmonische Funktion von x, solange das Argument von γ_n nicht verschwindet. Dies ist aber nur für $|x||y| = r^2$ der Fall und kann daher für x, $y \in \Omega$ nicht eintreten. Für $|x| = r$ ist

$$\left|\frac{|y|}{r}x - \frac{r}{|y|}y\right|^2 = |y|^2 + r^2 - 2x \cdot y = |x-y|^2$$

und damit $G_n(x,y) = 0$.

Satz 2.4: *Sei Ω ein Normalgebiet. Dann gilt:*

(i) Es gibt höchstens eine Greensche Funktion. Sie ist positiv für x, $y \in \Omega$, $x \neq y$.

(ii) Die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G_n(x,y) = G_n(y,x)\ , \qquad \forall\ x,y \in \Omega\ .$$

(iii) Ist $f \in C^1(\overline{\Omega})$, so ist

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_n(x,y)f(y)dy$$

Lösung des Dirichlet-Problems.

Beweis:

(i) $w(\,\cdot\,,y)$ ist eine harmonische Funktion, welche am Rande die Werte γ_n annimmt. Nach Satz 2.3 (iv) ist w eindeutig bestimmt. Sei $y \in \Omega$ und $\rho > 0$ so klein, daß $|x-y| \leq \rho$ noch in Ω liegt und $G(x,y)$ dort ≥ 0 ist. Das Gebiet $\Omega_\rho = \{x \in \Omega : |x-y| > \rho\}$ ist dann ein Normalgebiet, auf dessen Rand die harmonische Funktion $G(\,\cdot\,,y) \geq 0$ ist. Nach dem Maximumprinzip muß $G(\,\cdot\,,y) > 0$ gelten.

(ii) Seien y_1, $y_2 \in \Omega$. Sei ρ so klein, daß auch die Kugeln vom Radius ρ um y_1, y_2 noch in Ω liegen und sich nicht schneiden. Sei Ω_ρ das Gebiet, das aus Ω durch Wegschneiden dieser Kugeln entsteht. Wir wenden die 2. Greensche Formel in Ω_ρ an mit

$$u = G_n(\,\cdot\,,y_1)\ , \quad v = G_n(\,\cdot\,,y_2)\ .$$

Da diese Funktionen auf $\partial\Omega$ verschwinden, ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{|x-y_i|=\rho} \left(G_n(x,y_1)\,\frac{\partial G_n(x,y_2)}{\partial\nu} - G_n(x,y_2)\frac{\partial G_n(x,y_1)}{\partial\nu}\right) d\sigma(x) = 0\ .$$

Wir betrachten das Integral um y_1. $G_n(x,y_1)$ verhält sich dort wie ρ^{2-n}, während $\partial G_n(x,y_2)/\partial\nu$ dort regulär ist. Also gilt für den ersten Teil

$$\lim_{\rho\to 0} \int\limits_{|x-y_1|=\rho} G_n(x,y_1)\,\frac{\partial G_n(x,y_2)}{\partial\nu}\,d\sigma(x) = 0\ .$$

Für den zweiten Teil schreiben wir

$$\begin{aligned} & G_n(y_1,y_2) \int\limits_{|x-y_1|=\rho} \frac{\partial G_n(x,y_1)}{\partial\nu} d\sigma(x) \\ + & \int\limits_{|x-y_1|=\rho} (G_n(x,y_2) - G_n(y_1,y_2))\,\frac{\partial G_n(x,y_1)}{\partial\nu} d\sigma(x)\ . \end{aligned}$$

Der Integrand im zweiten Integral verhält sich wie $\rho\cdot\rho^{1-n} = \rho^{2-n}$, liefert also nach dem Grenzübergang $\rho\to 0$ keinen Beitrag. Für das erste Integral erhält man wie beim Beweis zu Satz 1.2 den Wert -1. Das Integral um y_1 liefert also insgesamt beim Grenzübergang $\rho\to 0$ den Beitrag $-G_n(y_1,y_2)$. Entsprechend liefert das Integral um y_2 den Beitrag $+G_n(y_2,y_1)$. Damit folgt

$$-G_n(y_1,y_2) + G_n(y_2,y_1) = 0\ ,$$

d.h. G_n ist symmetrisch.

(iii) Da $w(\,\cdot\,,y)$ harmonisch ist, folgt aus Satz 2.2 sofort $u\in C^2(\Omega)$ und

$$-\Delta u = f$$

in Ω. Wir müssen noch zeigen, daß u auf $\partial\Omega$ verschwindet. Dazu brauchen wir eine Abschätzung für G_n. Sei r so groß, daß $\overline{\Omega}$ in jeder Kugel vom Radius r um einen beliebigen Punkt von Ω enthalten ist. Sei $y\in\Omega$ beliebig und $K_n(x,y)$ die Greensche Funktion der Kugel vom Radius r um y, also

$$K_n(x,y) = \gamma_n(x-y) - \gamma_n(r)\ .$$

Es ist dann $v = K_n(\,\cdot\,,y) - G_n(\,\cdot\,,y)$ harmonisch in Ω, und $v\geq 0$ auf $\partial\Omega$ wegen (i). Nach dem Maximumprinzip ist also $v\geq 0$ in Ω. Es folgt

$$0\leq G_n(x,y)\leq \gamma_n(x-y) - \gamma_n(r)\ .$$

Sei nun $x_0 \in \partial\Omega$ und $\Omega_\rho = \{x \in \Omega : |x - x_0| < \rho\}$. Dann ist

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_\rho} G_n(x,y) f(y) dy + \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\rho} G_n(x,y) f(y) dy \; .$$

Für $x \to x_0$ bleibt $G_n(x,y)$ im zweiten Integral beschränkt, so daß das zweite Integral wegen $G_n(x_0, y) = 0$ gegen 0 strebt. Das erste Integral läßt sich abschätzen durch

$$M \int\limits_{|y-x_0|<\rho} |\gamma_n(x-y) - \gamma_n(r)| dy \; , \quad M = \operatorname*{Max}_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| \; .$$

und dies strebt gleichmäßig in x gegen 0 mit $\rho \to 0$. Es folgt $u(x) \to 0$ für $x \to x_0$.

□

Die Greensche Funktion $G_n(x,y)$ kann interpretiert werden als das elektrische Potential in einem Punkt $x \in \Omega$, das von einer Punktladung am Punkt $y \in \Omega$ erzeugt wird. Dabei ist $\partial\Omega$ ein Leiter, auf dem das Potential als 0 festgesetzt wird. Das Potential in x, das von einer Ladungsverteilung f in Ω erzeugt wird, entsteht dann durch Überlagerung der Potentiale der Punktladungen, und dies ergibt die Formel von Satz 2.4 (iii). Die Symmetrie von G_n bedeutet dann einfach, daß das Potential in x einer Punktladung in y gleich dem Potential in y einer Punktladung in x ist (Reziprozitätsprinzip).

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, eine harmonische Funktion mit vorgegebenen Randwerten zu finden. Sei also Ω ein Normalgebiet. Gesucht ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \; , \\ u &= f \qquad \text{auf } \partial\Omega \; . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Satz 2.5 (Poissonsches Integral): *Die Dirichletsche Randwertaufgabe (2.11) besitze eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann ist*

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial \nu} f(y) d\sigma(y) \; .$$

Beweis: Man zeigt, daß Satz 2.1 auch für G_n anstelle von γ_n gilt.

BEISPIELE:

1) Sei Ω die Kugel vom Radius r in $\mathbb{R}^n$ um den Nullpunkt. Dann ist (nach Vertauschung der Argumente x, y) für $n \geq 3$

$$G_n(x,y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(|y-x|^{2-n} - (\frac{|x|}{r})^{2-n} |y - (\frac{r}{|x|})^2 x|^{2-n} \right) .$$

Aufgrund der Formel

$$\frac{\partial}{\partial y_i} |y-z|^{2-n} = (2-n) \frac{y_i - z_i}{|y-z|^n}$$

erhält man

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_n(x,y) = -\frac{1}{\omega_n} \left(\frac{y_i - x_i}{|y-x|^n} - (\frac{|x|}{r})^{2-n} \frac{y_i - (\frac{r}{|x|})^2 x_i}{|y - (\frac{r}{|x|})^2 x|^n} \right) .$$

Für $y \in \partial\Omega$, also $|y| = r$ ist (vgl. oben)

$$|y-x| = \frac{|x|}{r} |y - (\frac{r}{|x|})^2 x| .$$

Damit vereinfacht sich die Formel zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} G_n(x,y) &= -\frac{1}{\omega_n |x-y|^n} \left(y_i - x_i - (\frac{|x|}{r})^2 (y_i - (\frac{r}{|x|})^2 \, x_i) \right) \\ &= -\frac{1 - (\frac{|x|}{r})^2}{\omega_n |x-y|^n} \, y_i . \end{aligned}$$

Wegen $\partial/\partial\nu = \frac{y}{|y|} \cdot \nabla$ folgt nun

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G_n(x,y) = -\frac{1 - (\frac{|x|}{r})^2}{\omega_n |x-y|^n} \, \frac{|y|^2}{|y|} = \frac{|x|^2 - r^2}{r\omega_n |x-y|^n} .$$

Das Poissonsche Integral lautet also

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int\limits_{|y|=r} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y) \ .$$

Dies gilt auch für $n = 2$ (vgl. Übungsaufgabe).

2) Für $f = 1$ ist $u = 1$ Lösung von (2.11) mit $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Also ist

$$1 = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial \nu}\, d\sigma(y) \ . \tag{2.12}$$

Daß durch das Poissonsche Integral umgekehrt für jedes $f \in C(\partial\Omega)$ eine Lösung von (2.11) gegeben ist, ist nicht so einfach zu beweisen. Daß u in Ω harmonisch ist, ist klar, daß u aber die Randwerte f hat, ist schwierig. Wir beschränken uns auf den Fall, daß Ω eine Kugel ist.

Satz 2.6: *Sei Ω eine Kugel, und sei $f \in C(\partial\Omega)$. Dann liefert das Poissonsche Integral eine Lösung von (2.11).*

Beweis: Daß u in Ω harmonisch ist, ist klar. Wir zeigen, daß u die Randwerte f annimmt.

Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Wegen (2.12) ist

$$u(x) - f(x_0) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial \nu}(f(y) - f(x_0))d\sigma(y) \ .$$

Wir machen um x_0 eine (kleine) Kugel vom Radius ρ. Γ_1 sei der in dieser Kugel gelegene Teil von $\partial\Omega$ und Γ_2 der Rest, also $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Wir schätzen zunächst das Integral über Γ_1 ab. Für $x \in \Omega$ ist

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial \nu}(f(y) - f(x_0))d\sigma(y) \right| \leq \underset{|y-x_0| \leq \rho}{\text{Max}} |f(y) - f(x_0)| \int\limits_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial \nu} \right| d\sigma$$

$$\leq \max_{|y-x_0|\leq\rho} |f(y)-f(x_0)| \left(-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial\nu}\, d\sigma(y)\right)$$

$$= \max_{|y-x_0|\leq\rho} |f(y)-f(x_0)| \; .$$

Dabei haben wir benutzt, daß $\partial G_n(x,y)/\partial\nu \leq 0$ für $y \in \partial\Omega$ (wegen $G_n(x,y) > 0$ für $y \in \Omega$, $G_n(x,y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$) ist.

Soweit gilt der Beweis für beliebige Normalgebiete. Bei der Abschätzung des Integrals über Γ_2 machen wir Gebrauch von der speziellen Gestalt von G_n für die Kugel. Danach ist für $|x - x_0| < \rho/2$

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial\nu}(f(y)-f(x_0))d\sigma(y)\right| \leq \frac{|x|^2-r^2}{r\omega_n(\rho/2)^n} 2 \max_{y\in\partial\Omega} |f(y)| \int_{\partial\Omega} d\sigma \; .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir können wegen der Stetigkeit von f ρ so klein wählen, daß das Γ_1-Integral $< \varepsilon/2$ ist. Danach wählen wir eine Umgebung U von x_0, so daß das Γ_2-Integral $< \varepsilon/2$ für alle $x \in U$. Für diese x gilt dann $|u(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Also haben wir

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = f(x_0) \; .$$

$\square$

4.3 Die Helmholtzsche Differentialgleichung

Wir betrachten die (inhomogene) Helmholtzsche Differentialgleichung

$$-\Delta u - k^2 u = f \tag{3.1}$$

mit einer reellen Zahl $k \neq 0$. Sie ist natürlich elliptisch. Für $n = 3$ besitzt sie die Fundamentallösung

$$K(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \, .$$

Wir beschränken uns auf den Fall $n = 3$. Das Dirichlet-Problem ist i. a. nicht eindeutig lösbar. Ist Ω die Kugel in $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung mit Radius $\pi m/k$ mit ganzem $m > 0$, so ist

$$u(x) = Im K(x) = \frac{\sin k|x|}{4\pi|x|}$$

eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \, , \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \, .$$

Die beiden folgenden Sätze beweist man ganz analog zu Satz 2.1 - 2.

Satz 3.1: *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Normalgebiet. Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dann gilt für $x \in \Omega$*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int\limits_{\partial\Omega} \left(K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} K(x-y) \right) d\sigma(y) \\ &\quad - \int\limits_{\Omega} K(x-y)(\Delta u + k^2 u)(y) dy \, . \end{aligned}$$

Satz 3.2: *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Normalgebiet, und sei $f \in C(\overline{\Omega})$. Dann ist*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} K(x-y) f(y) dy$$

in $C^1(\Omega)$, und es darf unter dem Integralzeichen differenziert werden. Ist sogar $f \in C^1(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^2(\Omega)$ Lösung von (3.1) in Ω.

Wir interessieren uns für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^3$. Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, verlangen wir die "Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung".

$$r \max_{|x|=r} |u(x)| \leq M \ , \qquad r^2 \max_{|x|=r} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) - ik\, u(x) \right| \leq M \qquad (3.2)$$

mit einer Konstanten $M < \infty$. In der Literatur schreibt man r für $|x|$ und

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \ .$$

Satz 3.3: *Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $f = 0$ außerhalb einer beschränkten Menge. Dann besitzt (3.1), (3.2) genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$.*

Beweis: Sei Ω die Kugel um 0 mit Radius R. Wir machen R so groß, daß $f = 0$ außerhalb Ω. Dann können wir in Satz 3.2 Ω durch $\mathbb{R}^3$ ersetzen und haben dann eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ von (3.1). Weiter ist

$$\nabla_x K(x-y) = K(x-y) \left\{ ik \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x-y}{|x-y|^2} \right\} = -\nabla_y K(x-y)$$

und damit für $|x| > R$

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) - iku(x) = \int_\Omega \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x K(x-y) - ikK(x-y) \right) f(y)dy$$

$$= \int_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \left\{ ik \left(\frac{x \cdot (x-y)}{|x||x-y|} - 1 \right) - \frac{x \cdot (x-y)}{|x||x-y|^2} \right\} f(y)dy \ .$$

Für $|x| \to \infty$ läßt sich der Integrand auf Ω durch $M|x|^{-2}$ mit einer Konstanten M abschätzen. Damit erfüllt u die zweite der Bedingungen (3.2), und die erste folgt direkt aus Satz 3.2. Die Existenz von u ist also gezeigt. Für die

Eindeutigkeit zeigen wir, daß $u = 0$ falls $f = 0$. Satz 3.1 lautet für $f = 0$ und $|x| < R$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int\limits_{|y|=R} \left(K(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}K(x-y) \right) d\sigma(y) \\
&= \int\limits_{|y|=R} K(x-y) \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) + ik\frac{y\cdot(x-y)}{|y||x-y|}u(y) - \frac{y\cdot(x-y)}{|y||x-y|^2}u(y) \right\} d\sigma(y) \\
&= \int\limits_{|y|=R} K(x-y) \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - iku(y) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(ik\left(1 + \frac{y\cdot(x-y)}{|y||x-y|}\right) - \frac{y\cdot(x-y)}{|y||x-y|^2} \right) u(y) \right\} d\sigma(y)\ .
\end{aligned}$$

Für festes x und $R \to \infty$ strebt dies wegen (3.2) gegen 0. Also $u(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^3$.

$\square$

4.4 Hilbertraum-Methoden für elliptische Differentialgleichungen

Existenzfragen für Randwertprobleme lassen sich in großer Allgemeinheit durch Hilbertraum-Methoden beantworten. Diese Methoden bilden auch die Basis für numerische Methoden, insbesondere die Methode der Finiten Elemente. Wir werden die Theorie in ihren Grundsätzen darstellen.

Sei V ein reeller Hilbertraum mit innerem Produkt $(\ ,\ )$ und Norm $\|f\| = (f,f)^{1/2}$.

BEISPIELE:

1) Ω sei eine meßbare Menge in $\mathbb{R}^n$ mit positivem Maß. Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$ besteht aus den in Ω quadrat-integrierbaren Funktionen, und es ist

$$(f,g) = \int_\Omega fg dx \ .$$

2) Sei Ω offen in $\mathbb{R}^n$. Wir versehen $C^1(\overline{\Omega})$ mit dem inneren Produkt

$$(f,g)_1 = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx \ .$$

Leider ist $C^1(\overline{\Omega})$, versehen mit diesem inneren Produkt, nicht vollständig und daher kein Hilbertraum. Wir bezeichnen mit $H^1(\Omega)$ die Vervollständigung von $C^1(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm $\|f\|_1 = (f,f)_1^{1/2}$. $H^1(\Omega)$ heißt Sobolev-Raum der Ordnung 1. Er besteht aus all den Funktionen $f \in L_2(\Omega)$, für welche es eine Folge (f_k) in $C^1(\overline{\Omega})$ gibt, so daß $f_k \to f$ in $L_2(\Omega)$, und $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$ in $L_2(\Omega)$ konvergieren.

Die Funktionen in $H^1(\Omega)$ sind i. a. nicht im üblichen Sinn differenzierbar. Sie besitzen aber verallgemeinerte (oder schwache) Ableitungen. Man sagt, $f \in L_2(\Omega)$ besitze die verallgemeinerte Ableitung $\partial f / \partial x_i \in L_2(\Omega)$, wenn

$$\forall \quad v \in C_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega f \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} v dx$$

gilt. Da $C_0^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ dicht liegt, ist $\partial f/\partial x_i$ eindeutig bestimmt. Existiert $\partial f/\partial x_i$ im üblichen Sinn und ist $\partial f/\partial x_i \in L_2(\Omega)$, so ist $\partial f/\partial x_i$ natürlich identisch mit der verallgemeinerten Ableitung. Für $n = 1$ hat z.B. die Funktion $|x|$ die verallgemeinerte Ableitung $sgn\ x$.

Sei nun $f \in H^1(\Omega)$. Dann gibt es eine Folge (f_k) in $C^1(\overline{\Omega})$, so daß

$$\begin{aligned} f_k \to f \quad &\text{in} \quad L_2(\Omega) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} f_k \to g_i \quad &\text{in} \quad L_2(\Omega) \end{aligned}$$

mit gewissen Funktionen $g_i \in L_2(\Omega)$. Es gilt dann für $v \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega f \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \lim_{k \to \infty} \left(- \int_\Omega \frac{\partial f_k}{\partial x_i} v dx \right) = - \int_\Omega g_i v dx \; .$$

Also besitzt f die verallgemeinerte Ableitung $\partial f/\partial x_i = g_i$.

Man kann die Funktionen in $H^1(\Omega)$ als Funktionen in $L_2(\Gamma)$ interpretieren, wo Γ eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von Ω ist. Dazu nehmen wir an, daß Γ die Eigenschaft hat, daß für ein $w \in \mathbb{R}^n$, $|w| = 1$ der "Streifen" $S = \{\Gamma + tw : 0 < t \leq r\}$ zu Ω gehört. Wir zeigen: Es gibt eine Konstante C, so daß

$$\int_\Gamma v^2 d\sigma \leq C \|v\|_1^2 \, , \qquad \forall \quad v \in C^1(\overline{\Omega}) \; . \tag{4.1}$$

Zum Beweis nehmen wir $n = 2$, $w = e_1$, $\Gamma = \{(0, x_2) : 0 \leq x_2 \leq 1\}$ an. Integration über den Streifen ergibt

$$r \int_\Gamma v^2 d\sigma \leq 2 \int_S v^2 dx + 2r^2 \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 dx \; ,$$

und hieraus folgt (4.1).

Sei nun $v \in H^1(\Omega)$ und (v_k) eine Folge in $C^1(\overline{\Omega})$ mit $v_k \to v$ in $H^1(\Omega)$. Nach (4.1) ist dann (v_k) in $L_2(\Gamma)$ konvergent. Es gibt also eine Funktion $\overline{v} \in L_2(\Gamma)$ mit $v_k \to \overline{v}$ in $L_2(\Gamma)$. $\overline{v}$ ist durch v eindeutig bestimmt. Man nennt $\overline{v}$ die "Spur" von v auf Γ. Die "Spurabbildung" $v \to \overline{v}$ von $H^1(\Omega)$ in $L_2(\Gamma)$ ist stetig. Mit der "Funktion v auf Γ" meint man $\overline{v}$.

3) Wir bezeichnen den Abschluß von $C_0^1(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ mit $H_0^1(\Omega)$. Wir betrachten $H_0^1(\Omega)$ als die Funktionen aus $H^1(\Omega)$, welche auf $\partial\Omega$ verschwinden. Das ist jedenfalls gerechtfertigt für Gebiete Ω mit der "Segmenteigenschaft". Bei solchen Gebieten kann man den Rand $\partial\Omega$ durch endlich viele Teile $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ überdecken, so daß es zu jedem Γ_k einen ganz in Ω gelegenen Streifen gibt. Dann ist für $v \in H^1(\Omega)$ v auf $\partial\Omega$ als Funktion in $L_2(\partial\Omega)$ wohldefiniert. Wegen der Stetigkeit der Spurabbildung ist $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Ist Ω beschränkt, so hat man in $H_0^1(\Omega)$ neben der Norm $\|\cdot\|_1$ die dazu äquivalente Norm

$$|f|_1 = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} .$$

Die Poincar*é*sche Ungleichung sagt, daß es eine Konstante $C(\Omega) < \infty$ gibt, so daß für $f \in H_0^1(\Omega)$

$$\|f\|_1 \leq C(\Omega)|f|_1 .$$

Es genügt, die Ungleichung für $f \in C_0^1(\Omega)$ zu beweisen. Wir führen den Beweis für $n = 2$ und $\Omega \subseteq [0,1]^2$. Dann ist

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) + \int\limits_0^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2')dx_2' .$$

Wegen $f(x_1, 0) = 0$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$f^2(x_1, x_2) \leq \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 (x_1, x_2')dx_2' .$$

Integration über $[0,1]^2$ ergibt

$$\int\limits_\Omega f^2 dx \leq \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 dx$$

und daraus folgt die Poincar*é*sche Ungleichung.

4) Die Sobolev-Räume $H^s(\Omega)$, $H_0^s(\Omega)$ für $s = 1, 2, \ldots$ sind entsprechend definiert. Für eine allgemeine Theorie der Sobolev-Räume vergleiche man

Agmon, S. : *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* Van Nostrand 1965.

Adams, R.A. : *Sobolev Spaces.* Academic Press 1975.

Smirnov, W.I.: *Lehrgang der höheren Mathematik.* Teil V, Kap. IV. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (6. Aufl.).

Der wichtigste Satz über Hilberträume ist der Rieszsche Darstellungssatz. Er beschreibt die linearen stetigen Funktionale in Hilberträumen. Sei ϕ ein solches auf dem Hilbertraum V, d.h. $\phi : V \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

Linearität: $\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g), \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in V.$

Stetigkeit: $\exists\ C < \infty : |\phi(f)| \leq C\|f\|, \quad \forall\ f \in V$. Also ist

$$\|\phi\| = \operatorname*{Max}_{\|f\| = 1} |\phi(f)| < \infty\ .$$

Dann gibt es genau ein $\varphi \in V$ mit

$$\phi(f) = (f, \varphi)\ , \quad \forall\ f \in V\ .$$

Überdies ist

$$\|\phi\| = \|\varphi\|\ .$$

Umgekehrt erzeugt jedes $\varphi \in V$ durch diese Formel ein lineares stetiges Funktional auf V.

BEISPIEL: Sei $f \in L_2(\Omega)$ und $V = H_0^1(\Omega)$. Dann ist für $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \int\limits_\Omega f v\ dx \right| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_1\ ,$$

d.h.

$$F(v) = \int\limits_\Omega f v\ dx$$

ist ein lineares stetiges Funktional auf $H_0^1(\Omega)$. Also gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$F(v) = (v, u)_1\ , \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

u erfüllt also

$$\int_\Omega fv dx = \int_\Omega \left(vu + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \; , \quad \forall \, v \in H_0^1(\Omega) \; . \tag{4.2}$$

Wir wollen nun annehmen, es sei sogar $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und Ω sei ein Normalgebiet. Dann folgt durch partielle Integration für $v \in C_0^2(\Omega)$

$$\int_\Omega (f - u + \Delta u) v dx = 0 \; ,$$

d.h. u ist Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \qquad \text{in } \Omega \; , \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \; , \end{aligned} \tag{4.3}$$

letzteres wegen $u \in H_0^1(\Omega)$. Ist umgekehrt $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (4.3), so erfüllt u auch (4.2), jedenfalls für $v \in C_0^2(\Omega)$. Wir nennen daher ein $u \in H_0^1(\Omega)$, welches (4.2) erfüllt, verallgemeinerte (oder schwache) Lösung von (4.3).

Dieses Beispiel kann erheblich verallgemeinert werden. Sei a eine Bilinearform auf V, und sei F ein stetiges lineares Funktional auf V. Wir betrachten die "Variationsgleichung":

Gesucht $u \in V$, so daß

$$a(v, u) = F(v) \; , \qquad \forall \; v \in V \; . \tag{4.4}$$

Satz 4.1 (Lax-Milgram): *Sei a stetig, d.h. $\exists \; M < \infty$*

$$a(u, v) \leq M \|u\| \|v\| \; , \qquad \forall \; u, v \in V$$

und V-elliptisch, d.h. $\exists \;\; \alpha > 0$ mit

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \; , \qquad \forall \; v \in V \; .$$

Dann ist die Variationsgleichung (4.4) eindeutig lösbar, und es gilt für die Lösung u

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\| \; .$$

Dabei ist $\|u\|$ die Norm von u in V und $\|F\|$ die Norm von F als lineares Funktional über V.

Beweis: Für jedes $u \in V$ ist $v \to a(v,u)$ ein stetiges lineares Funktional auf V. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es also ein Element $Au \in V$ mit

$$a(v,u) = (v, Au) \ , \qquad \forall \ v \in V \ ,$$

und es gilt

$$\|Au\| = \operatorname*{Max}_{\|v\|=1} |a(v,u)| \leq M\|u\| \ .$$

Die - offensichtliche lineare - Abbildung $A : V \to V$ ist also auch stetig. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \operatorname*{Max}_{\|v\|=1} |a(v,u)| \geq a\left(\frac{u}{\|u\|}, u\right) \\ &= \frac{1}{\|u\|} a(u,u) \geq \alpha\|u\| \ . \end{aligned}$$

Also ist A invertierbar und $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$. Wir zeigen $AV = V$. Da A^{-1} stetig ist, ist AV abgeschlossen. Ist $w \in (AV)^\perp$, so gilt

$$0 = (w, Aw) = a(w,w) \geq \alpha\|w\|^2 \ ,$$

also $w = 0$. Also $(AV)^\perp = \{0\}$ und damit $AV = V$.

Nach dem Darstellungssatz gibt es $f \in V$ mit $F(v) = (v, f)$, $\forall \ v \in V$ und $\|f\| = \|F\|$. Die Variationsgleichung (4.4) lautet damit

$$(v, Au) = (v, f) \ , \qquad \forall \ v \in V$$

oder einfach $Au = f$. Wir haben gerade gesehen, daß diese Gleichung eine eindeutig bestimmte Lösung u mit

$$\|u\| \leq \|A^{-1}\|\|f\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|$$

besitzt.

$\square$

BEISPIELE

1) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und $V = H_0^1(\Omega)$. Die Norm in V sei $|f|_1$. Sei $a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$. a ist trivialerweise V-elliptisch. Für $f \in L_2(\Omega)$ ist $F(v) = \int\limits_\Omega vfdx$ ein stetiges lineares Funktional auf V.

Der Satz ergibt hier eine schwache Lösung der Dirichlet-Aufgabe

$$-\Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega \, , \qquad u = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega \, .$$

2) Sei $V = H^1(\Omega)$ und $a(u,v) = \int\limits_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx + \int\limits_{\partial\Omega} guvd\sigma$ mit einer stetigen Funktion g auf $\partial\Omega$. Erfüllt Ω die Segmentbedingung, so ist a eine stetige Bilinearform auf V. Sie ist V-elliptisch, wenn $g \geq 0$. Für $f \in L_2(\Omega)$ hat die Variationsgleichung

$$\int\limits_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} guvd\sigma = \int\limits_\Omega fvdx \, , \quad \forall \ v \in C^1(\overline{\Omega})$$

eine eindeutig bestimmte Lösung in $H^1(\Omega)$.

Lassen wir v die Funktionen aus $C_0^1(\Omega)$ durchlaufen, so folgt wie oben für $u \in C^2(\overline{\Omega})$

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \ \Omega \, . \tag{4.5}$$

Die erste Greensche Formel ergibt für $v \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_\Omega (-\Delta u + u) v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + gu \right) v d\sigma = \int\limits_\Omega fvdx \, .$$

Die Integrale über Ω fallen wegen (4.5) weg. Es folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + gu = 0 \quad \text{auf } \ \partial\Omega \, .$$

Wir haben also eine schwache Lösung der gemischten Randwertaufgabe gefunden.

3) Sei eine Lösung der Randwertaufgabe

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad \text{in } \Omega ,$$

$$u = 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

gesucht. Wir setzen $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ und $a_{ij} = a_{ji}$ voraus. Wir stellen zunächst die schwache Form her. Multiplikation mit $v \in C_0^1(\Omega)$, Integration und anschließende partielle Integration ergibt

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}v) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right) dx = \int_\Omega fv dx$$

oder

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right) v \right\} dx = \int_\Omega fv dx .$$

Durch die linke Seite dieser Gleichung ist eine in $V = H_0^1(\Omega)$ stetige Bilinearform $a(u,v)$ definiert. Es ist

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i' \frac{\partial v}{\partial x_i} v + cv^2 \right) dx , \\ b_i' &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i \in C^1(\overline{\Omega}) . \end{aligned}$$

Es ist für $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega b_i' \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx = \frac{1}{2} \int_\Omega b_i' \frac{\partial}{\partial x_i} v^2 dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} b_i' \right) v^2 dx ,$$

also

$$a(v,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c' v^2 \right) dx ,$$

$$c' = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i' \in C^0(\overline{\Omega}) .$$

a ist also V-elliptisch, falls (a_{ij}) positiv definit und $c' \geq 0$ in $\overline{\Omega}$ ist. Dann besitzt die Randwertaufgabe eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung.

Hilbertraum-Methoden sind hervorragend zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben geeignet. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 sei V_h ein endlich-dimensionaler linearer Unterraum von V. Dann definieren wir eine Näherung $u_h \in V_h$ für u als Lösung der Variationsgleichung

$$a(u_h, v) = F(v) \;, \qquad \forall \;\; v \in V_h \;.$$

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V_h, so ist

$$u_h = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \;,$$

wobei der Vektor $c = (c_k)$ das lineare Gleichungssystem $Ac = b$ löst mit

$$A = (a(v_k, v_\ell)) \;, \qquad b = (F(v_\ell)) \;.$$

u_h heißt die Galerkin-Näherung für u.

Satz 4.2: *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 ist u_h eindeutig bestimmt, und es gilt*

$$\|u - u_h\|| \leq \frac{M}{\alpha} \underset{v \in V_h}{Min} \|u - v\| \;.$$

Beweis: Daß u_h eindeutig bestimmt ist folgt aus Satz 4.1, angewandt auf V_h an Stelle von V. Durch Subtraktion der für alle $v \in V_h$ gültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} a(u, v) &= F(v) \\ a(u_h, v) &= F(v) \end{aligned}$$

folgt

$$a(u - u_h, v) = 0 \;, \qquad \forall \; v \in V_h \;.$$

Daraus ergibt sich für jedes $v \in V_h$

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - u_h + v) \\
&\leq M\|u - u_h\|\|u - u_h + v\| \; .
\end{aligned}$$

Ist $\|u - u_h\| = 0$, so ist die zu beweisende Ungleichung trivial. Andernfalls kürzen wir den Faktor $\|u - u_h\|$ weg und erhalten

$$\alpha\|u - u_h\| \leq M\|u - u_h + v\| \; .$$

Da dies für alle $v \in V_h$ gilt folgt

$$\alpha\|u - u_h\| \leq M \operatorname*{Min}_{v \in V_h} \|u - v\| \; .$$

$\square$

4.5 Die Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung

Die n-dimensionale Wellengleichung lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \ , \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \ . \tag{5.1}$$

Ihre Lösungen $u(x,t)$ beschreiben die Ausbreitung von Wellen: $u(x,t)$ ist der Zustand eines n-dimensionalen Systems an der Stelle x zur Zeit t. Die Konstante $c > 0$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Durch Einführen der neuen Zeitskala $t' = ct$ wird $c = 1$. Dies wollen wir im folgenden immer annehmen.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\varphi(x,t) = 0$ ist nach §2 charakteristisch, falls

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = |\nabla_x \varphi|^2 \ .$$

Nehmen wir $\varphi(x,t) = t - \psi(x)$ an, so bedeutet dies

$$|\nabla \psi|^2 = 1 \ , \tag{5.2}$$

d.h. ψ erfüllt die Eikonal-Gleichung. Dieses Wort leitet sich vom Griechischen *eikon* = bildliche Darstellung, Ebenbild (man vergleiche auch Ikone) ab und deutet die Beziehung zur Optik an.

Die Charakteristiken (genauer: Die Kurven, welche Streifen tragen, welche Lösungen des charakteristischen Systems von (5.2) sind) von 5.2 nennen wir Bicharakteristiken von (5.1). Nach Teil II, §2 sind dies die Geraden $t = \theta \cdot x + a$ mit $\theta \in S^{n-1}$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Lösungen von (5.2) lassen sich aus diesen Geraden aufbauen und sind daher kegelartige Mannigfaltigkeiten, die den x-Raum unter einem Winkel von 45° schneiden.

Die Mannigfaltigkeit $t = 0$ ist nicht charakteristisch. Das Cauchysche Anfangswertproblem für diese Mannigfaltigkeit lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u \ , \qquad t > 0 \ , \\ u(x,0) = f(x) \quad &, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Für $n = 1$ haben wir dieses Problem schon in der Einleitung gelöst:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-t) + f(x+t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(s)ds \; . \tag{5.4}$$

Mit Hilfe des (eindimensionalen) Mittelungsoperators

$$(M(t)f)(x) = \frac{1}{2t}\int\limits_{x-t}^{x+t} f(s)ds$$

können wir dies in der Form

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)f)(x) + (tM(t)g)(x) \tag{5.5}$$

schreiben. Fassen wir zusammen

Satz 5.1: *Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Dann hat die Anfangswertaufgabe (5.3) genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, und diese ist durch (5.5) gegeben.*

Zur physikalischen Interpretation schreiben wir (5.4) als

$$u(x,t) = v(x-t) + w(x+t) \; .$$

Betrachten wir zunächst den Fall $w = 0$. Dann entsteht $u(x,t) = v(x-t)$ durch Verschiebung der Funktion v um t nach rechts.

u stellt also eine sich nach rechts mit der Geschwindigkeit 1 ausbreitende Welle dar. Entsprechend ist $u(x,t) = w(x+t)$ eine sich nach links ausbreitende Welle. (5.4) ist also eine Überlagerung von Wellenausbreitungen nach links und nach rechts, jeweils mit der Geschwindigkeit 1.

Im $x-t$-Raum sprechen wir wieder wie in Teil III, §2 vom Abhängigkeitsbereich eines Punktes (x,t) (also das Intervall $[x-t, x+t]$ der x-Achse) und dem Einflußbereich des Intervalls $[a,b]$ der x-Achse $\{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : [x-t, x+t] \cap [a,b] \neq \emptyset\}$.

Wir wollen nun den Satz 5.1 auf höhere Dimensionen n übertragen. Dabei ergeben sich physikalisch bedeutsame Unterschiede zwischen dem Fall gerader (z.B. $n = 2$) und ungerader (z.B. $n = 3$) Dimensionen. Zunächst behandeln wir den Fall $n = 3$.

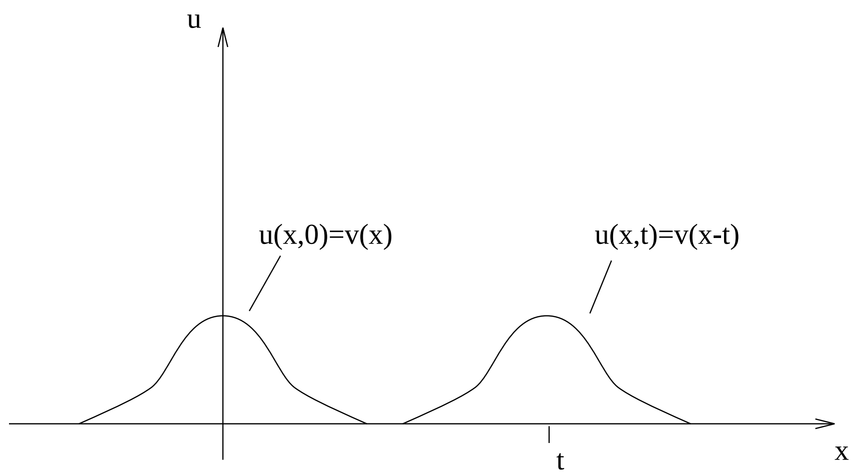


Abbildung 4.1: Eine Lösung einer eindimensionalen Wellengleichung.

Satz 5.2: *Sei* $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann hat das Anfangswertproblem (5.3) genau eine Lösung* $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, *und diese ist durch (5.5) mit dem (dreidimensionalen) Mittelungsoperator*

$$(M(t)f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} f(x+t\theta)d\sigma(\theta)$$

gegeben.

Beweis:

(a) Es ist klar, daß die rechte Seite von (5.5) eine Funktion in $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ ist.

(b) Wir zeigen, daß die Funktion u aus (5.5) die Differentialgleichung erfüllt. Da ein großer Teil der Rechnung für beliebige n gilt, führen wir sie auch für beliebiges n durch.

Sei für $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3, \ldots$

$$\overline{v}(x,t) = \int\limits_{S^{n-1}} v(x+t\theta)d\sigma(\theta) \; .$$

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{v}(x,t) = \int\limits_{S^{n-1}} \theta \cdot \nabla v(x+t\theta)d\sigma(\theta) \qquad (t\theta = y)$$

$$
\begin{aligned}
&= t^{1-n} \int\limits_{tS^{n-1}} \frac{y}{|y|} \cdot \nabla v(x+y) d\sigma(y) \quad (t^{n-1} d\sigma(\theta) = d\sigma(y)) \\
&= t^{1-n} \int\limits_{tS^{n-1}} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x+y) d\sigma(y) \; .
\end{aligned}
$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist für jedes Normalgebiet Ω und jedes $v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$
\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = \int\limits_{\Omega} \Delta v dx \; .
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{v}(x,t) &= t^{1-n} \int\limits_{|y|<t} \Delta v(x+y) dy \\
&= t^{1-n} \int\limits_0^t \int\limits_{rS^{n-1}} \Delta v(x+y) d\sigma(y) dr \; .
\end{aligned}
$$

Eine weitere Differentiation ergibt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{v}(x,t) &= (1-n)t^{-n} \int\limits_0^t \int\limits_{rS^{n-1}} \Delta v(x+y) d\sigma(y) dr \\
&\quad + t^{1-n} \int\limits_{tS^{n-1}} \Delta v(x+y) d\sigma(y) \; .
\end{aligned}
$$

Für $w = t\overline{v}$ erhalten wir damit

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial t}\overline{v}(x,t) + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{v}(x,t) \\
&= \left(2t^{1-n} + (1-n)t^{1-n}\right) \int_0^t \int\limits_{rS^{n-1}} \Delta v(x+y) d\sigma(y) dr + \\
&\quad + t^{2-n} \int\limits_{tS^{n-1}} \Delta v(x+y) d\sigma(y) \; .
\end{aligned}
$$

Für $n = 3$ vereinfacht sich dies zu

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = t^{-1} \int\limits_{tS^2} \Delta v(x+y) d\sigma(y) \qquad (y = t\theta)
$$

$$
\begin{aligned}
&= t \int\limits_{S^2} \Delta v(x+t\theta) d\sigma(\theta) \\
&= \Delta w(x,t) \ .
\end{aligned}
$$

Damit ist klar, daß (5.5) die Differentialgleichung erfüllt.

(c) Wir zeigen, daß (5.5) die Anfangsbedingungen erfüllt. Zunächst ist

$$u(x,0) = (M(0)f)(x) = f(x) \ .$$

Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= (M(0)g)(x) + 2\left[\frac{\partial}{\partial t}(M(t)f)(x)\right]_{t=0} \\
&= g(x) + 2\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} f(x+t\theta)d\sigma(\theta)\right]_{t=0} \\
&= g(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2} \theta\cdot\nabla f(x)d\sigma(\theta) \\
&= g(x) \ .
\end{aligned}
$$

(d) Wir zeigen, daß jede Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ durch (5.5) gegeben ist. Sei u eine solche. Wir setzen für jedes $x \in \mathbb{R}^3$

$$v_x(r,t) = rM(r)u(\,\cdot\,,t)(x)$$

und zeigen, daß v_x der eindimensionalen Wellengleichung in t und r genügt. In (b) haben wir gezeigt, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}v_x(r,t) = \Delta_x v_x(r,t) \ .$$

Da u die Wellengleichung erfüllt, gilt

$$
\begin{aligned}
\Delta_x v_x(r,t) &= r(M(r)\Delta u(\,\cdot\,,t))(x) \\
&= r(M(r)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\,\cdot\,,t))(x) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rM(r)u(\,\cdot\,,t))(x) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,v_x(r,t) \ .
\end{aligned}
$$

Zusammen gilt also in der Tat

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_x(r,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_x(r,t) \ .$$

Schon in der Einleitung haben wir gesehen, daß die eindimensionale Wellengleichung die allgemeine Lösung

$$v_x(r,t) = \varphi_x(r+t) + \psi_x(r-t)$$

mit Funktionen φ_x, $\psi_x \in C^2(\mathbb{R})$ hat. Wegen $v_x(0,t) = 0$ gilt sogar

$$v_x(r,t) = \varphi_x(r+t) - \varphi_x(t-r) \ .$$

Differentiation nach r und t ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} v_x(r,t) &= \varphi_x'(r+t) + \varphi_x'(t-r) \\
\frac{\partial}{\partial t} v_x(r,t) &= \varphi_x'(r+t) - \varphi_x'(t-r)
\end{aligned}$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen folgt

$$2\varphi_x'(r+t) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) v_x(r,t) \ .$$

Setzen wir nun $r = 0$, so entsteht

$$2\varphi_x'(t) = (M(0)u(\,\cdot\,,t))(x) = u(x,t) \ ,$$

und für $t = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\varphi_x'(r) &= \frac{\partial}{\partial r}(rM(r)u(\,\cdot\,,0)) + (rM(r)\frac{\partial u}{\partial t}(\,\cdot\,,0))(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(rM(r)f)(x) + (rM(r)g)(x) \ .
\end{aligned}$$

Vergleich dieser beiden Formeln für $2\varphi_x'$ zeigt, daß u (5.5) erfüllen muß.

$\square$

Das entsprechende Resultat für $\mathbb{R}^2$ lautet

Satz 5.3: *Sei $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann hat das Anfangswertproblem (5.3) genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$, und diese ist durch (5.5) mit dem (zweidimensionalen) Mittelungsoperator*

$$(M(t)f)(x) = \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy$$

gegeben.

Beweis: Wir benutzen die "Hadamardsche Abstiegsmethode". Wir lösen die dreidimensionale Aufgabe mit Funktionen f, g, welche nicht von x_3 abhängen. Für den (dreidimensionalen) Mittelungsoperator M gilt für ein solches f mit $z = \sqrt{1 - \theta_1^2 - \theta_2^2}$

$$\begin{aligned}
(M(t)f)(x) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} f(x + t\theta) d\sigma(\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_1^2+\theta_2^2<1} f(x_1 + t\theta_1, x_2 + t\theta_2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right)^2} d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_1^2+\theta_2^2<1} \frac{f(x_1 + t\theta_1, x_2 + t\theta_2)}{\sqrt{1 - \theta_1^2 - \theta_2^2}} d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{y_1^2+y_2^2<t^2} \frac{f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)}{\sqrt{t^2 - y_1^2 - y_2^2}} dy_1 dy_2 \ .
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß (5.5) Lösung der Anfangswertaufgabe für $n = 2$ ist. Jede weitere Lösung wäre auch eine Lösung des Problems für $n = 3$ und müßte daher nach Satz 5.2 mit (5.5) übereinstimmen.

$\square$

Bemerkung: Die Abhängigkeitsbereiche eines Punktes (x, t) sind also im zwei- und dreidimensionalen ganz verschieden: In zwei Dimensionen ist es der

Vollkreis $|y-x| \leq t$, in drei Dimensionen die Sphäre $|y-x| = t$. Dies kann man leicht beobachten: Während ein in der dreidimensionalen Atmosphäre ausgelöster Schuß keinen Nachhall erzeugt, zieht die von einem ins Wasser geworfenen Stein auf der zweidimensionalen Oberfläche erzeugte Welle einen ganzen Wellenzug nach sich.

Wir kommen nun zur inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + h \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \tag{5.6a}$$

mit eine stetigen Funktion $h(x,t)$. Es genügt, das Anfangswertproblem

$$u(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.6b}$$

zu lösen, da man die Lösung der inhomogenen Gleichung mit allgemeinen Anfangswerten durch Addition der Lösung der homogenen Gleichung mit den allgemeinen Anfangswerten erhält.

Wir lösen (5.6) durch das "Duhamelsche Prinzip". Dabei gehen wir zunächst heuristisch vor und verifizieren anschließend die erhaltene Formel.

Sei $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$ und

$$h^{\varepsilon,\tau}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} h(x,t) & , \quad \tau - \varepsilon \leq t \leq \tau \ , \\ 0 & , \qquad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Sei $u = \phi^{\varepsilon,\tau}(x,t)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u + h^{\varepsilon,\tau} \ \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (\tau - \varepsilon, \infty) \ , \\ u(x, \tau - \varepsilon) &= 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau - \varepsilon) = 0 \ . \end{aligned}$$

Dann folgt durch Integration der Differentialgleichung nach t von $\tau - \varepsilon$ bis τ

$$\frac{\partial \phi^{\varepsilon,\tau}}{\partial t}(x,\tau) - \frac{\partial \phi^{\varepsilon,\tau}}{\partial t}(x, \tau - \varepsilon) = \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left(\Delta \phi^{\varepsilon,\tau} + \frac{1}{\varepsilon} h \right)(x,t) dt \ .$$

Nehmen wir einmal an, daß $\Delta \phi^{\varepsilon,\tau}$ für $\varepsilon \to 0$ beschränkt bleibt, so folgt wegen der Anfangsbedingung für kleine ε

$$\frac{\partial \phi^{\varepsilon,\tau}}{\partial t}(x,\tau) \sim h(x,\tau) \ .$$

Sei nun $\tau_i = i\varepsilon,\ \ i = 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$h \sim \varepsilon \sum_{\tau_i < t} h^{\varepsilon, \tau_i}$$

und daher für die Lösung u von (5.6)

$$u \sim \varepsilon \sum_{\tau_i < t} \phi^{\varepsilon, \tau_i} \ .$$

Wir vermuten daher

$$u(x,t) = \int_0^t \phi^\tau(x,t) d\tau \ , \tag{5.7}$$

wo $u = \phi^\tau$ Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^n \times (\tau, \infty) \ , \\ u(x,\tau) &= 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau) = h(x,\tau) \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.8}$$

ist. Nach Satz 5.1-3 ist ϕ^τ für hinreichend glattes h wohlbestimmt, jedenfalls für $n = 1, 2, 3$.

Satz 5.4 (Duhamel): *Sei $h \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, und sei $\phi^\tau \in C^2(\mathbb{R}^n \times (\tau,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [\tau,\infty))$ eine Lösung von (5.8). Dann ist (5.7) Lösung von (5.6).*

Beweis: Zunächst ist $u(x,0) = 0$. Differentiation nach t ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \phi^t(x,t) + \int_0^t \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t}(x,t) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t}(x,t) d\tau \end{aligned}$$

wegen (5.8). Insbesondere ist also $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, so daß also die Anfangsbedingungen in (5.6) erfüllt sind. Eine weitere Differentiation nach t liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial \phi^t}{\partial t}(x,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 \phi^\tau}{\partial t^2}(x,t)d\tau \\
&= h(x,t) + \int_0^t \Delta\phi^\tau(x,t)d\tau \\
&= h(x,t) + \Delta u(x,t) \ ,
\end{aligned}$$

so daß also u die inhomogene Wellengleichung erfüllt.

□

Durch Kombination von Satz 5.4 mit Satz 5.2 erhält man

Satz 5.5 (Kirchhoff): *Die Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u + h \quad \textit{in} \ \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\
u(x,0) &= f(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \textit{für} \ x \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-y|=t} \frac{g(y)}{|x-y|}d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|x-y|=t} \frac{f(y)}{|x-y|}d\sigma(y) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-y|\le t} \frac{h(y,t-|y-x|)}{|x-y|}dy \ .
\end{aligned}$$

Beweis: Nach den Sätzen 5.4, 5.2 ist mit dem (dreidimensionalen) Mittelungsoperator

$$u(x,t) = (tM(t)g)(x) + \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)f)(x) + \int_0^t (t-\tau)(M(t-\tau)h(\cdot,\tau))(x)d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} tg(x+t\theta)d\sigma(\theta) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S^2} tf(x+t\theta)d\sigma(\theta) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t (t-\tau)\int\limits_{S^2} h(x+(t-\tau)\theta,\tau)d\sigma(\theta)d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{tS^2} g(x+y)\frac{d\sigma(y)}{t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{tS^2} f(x+y)\frac{d\sigma(y)}{t} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t r \int\limits_{S^2} h(x+r\theta,t-r)d\sigma(\theta)dr \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-y|=t} g(y)\frac{d\sigma(y)}{|x-y|} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|x-y|=t} f(y)\frac{d\sigma(y)}{|x-y|} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|\le t} h(x+y,t-|y|)\frac{dy}{|y|}\ .
\end{aligned}
$$

$\square$

Der Vollständigkeit geben wir noch die Kirchhoff'sche Formel für $n = 1$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(y)dy \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} h(y,\tau)dyd\tau
\end{aligned}
$$

und $n = 2$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|<t} \frac{g(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}dy + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}dy \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|<t}\int\limits_0^{t-|y|} \frac{h(x+y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|y|^2}}\, d\tau dy\ .
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:
1) Integriert wird in allen Fällen über die charakteristischen Mannigfaltigkeiten bzw. den von diesen eingeschlossenen Bereich.

2) Vergleichen wir für $n = 3$ unser Resultat mit der Lösungsformel aus Satz 2.2 für die Potentialgleichung $-\Delta u = h$, also

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{h(y)}{|x-y|} dy \ .$$

Im stationären (zeitunabhängigen) Fall geht die Kirchhoff'sche Formel in diese über. Man nennt daher $h(y, t - |x-y|)$ das retardierte Potential.

4.6 Anfangs-Randwertprobleme hyperbolischer Gleichungen

Wie bei hyperbolischen Systemen erster Ordnung (vgl. II.3), so kann man auch für hyperbolische Gleichungen zweiter Ordnung Anfangs-Randwertprobleme betrachten, wobei die Art der vorzugebenden Anfangs- oder Randwerte von dem Verlauf der (Bi-) Charakteristiken abhängt. Wir könnten dies durch Rückführung der Gleichung zweiter Ordnung auf ein System erster Ordnung tun. Eine direkte Behandlung der Gleichung zweiter Ordnung ist aber einfacher.

Wir betrachten zunächst die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h \qquad a < x < b \ , \quad y > 0$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = f(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g(x) \ , \qquad a < x < b$$

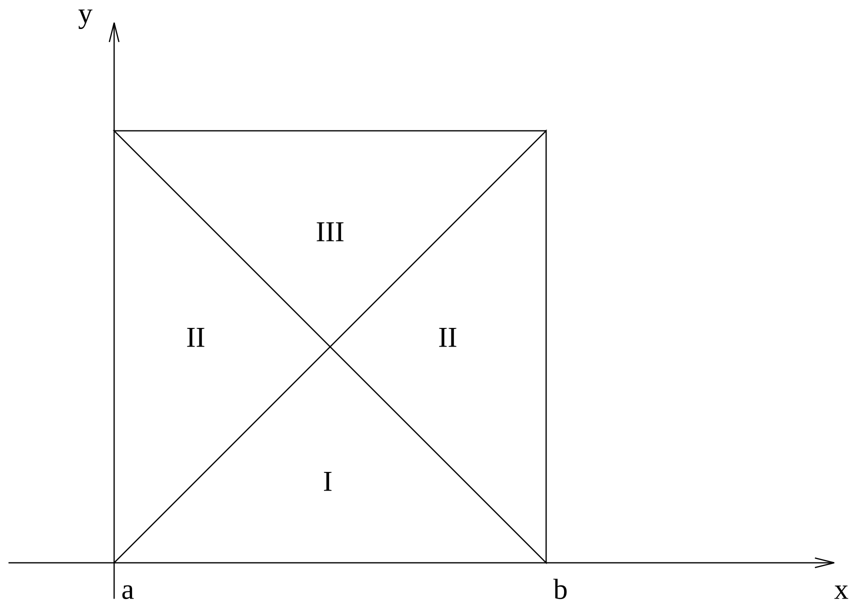
und den Randwerten

$$u(a,y) = 0 \ , \qquad u(b,y) = 0 \ , \qquad y > 0 \ .$$

Wir unterteilen das Gebiet $a < x < b, \ \ y > 0$ in Gebiete der Art I, II, III nach Abb. 4.2. Zunächst ist u in dem Einflußbereich I des Anfangsintervalls (a,b) bestimmt als Lösung der Cauchyschen Anfangswertaufgabe, etwa durch die eindimensionale Version der Kirchhoffschen Formel (Satz 5.5). Damit ist u bekannt auf den senkrechten (also nichtcharakteristischen) Randteilen der Gebiete II und auf deren unteren (charakteristischen) Randteilen. Wir werden sehen, daß dadurch u in den Gebieten II bestimmt ist (gemischtes Problem). Damit ist u auf den unteren (charakteristischen) Randteilen von III bekannt. Wir wollen sehen, daß u dadurch im Gebiet III bestimmt ist (charakteristische Anfangswertaufgabe).

Zur Lösung der Probleme I, II, III rotieren wir das Koordinatensystem um 45° durch die Transformation

$$x' = -x + y \ , \qquad y' = x + y \ .$$



$u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g$

Abbildung 4.2: Gebietsaufteilung bei der Cauchyschen Anfangswertaufgabe der Wellengleichung.

Dann geht die Differentialgleichung in neuen Bezeichnungen bis auf den konstanten Faktor $-\frac{1}{4}$ in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = h$$

über. Die Charakteristiken sind jetzt natürlich die Parallelen zu den Koordinatenachsen. (Zur Kontrolle: Die Kurve $\varphi = 0$ ist charakteristisch, wenn $Q(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ ist). Nach weiterer Transformation $x'' = c_1 x' + d_1$, $y'' = c_2 y' + d_2$, die es uns erlauben, in $[0,1] \times [0,1]$ zu arbeiten, lauten die Aufgaben I, II, III nun wie folgt:

I: u ist in dem Dreieck $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x+y \geq 1$ zu bestimmen aus seinen Werten und den Werten der ersten Ableitungen entlang $x+y = 1$ (Cauchysche Anfangswertaufgabe).

II: u ist in dem Dreieck $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \geq y$ zu bestimmen aus seinen Werten entlang $x = y$ und $y = 0$ (gemischte Anfangswertaufgabe).

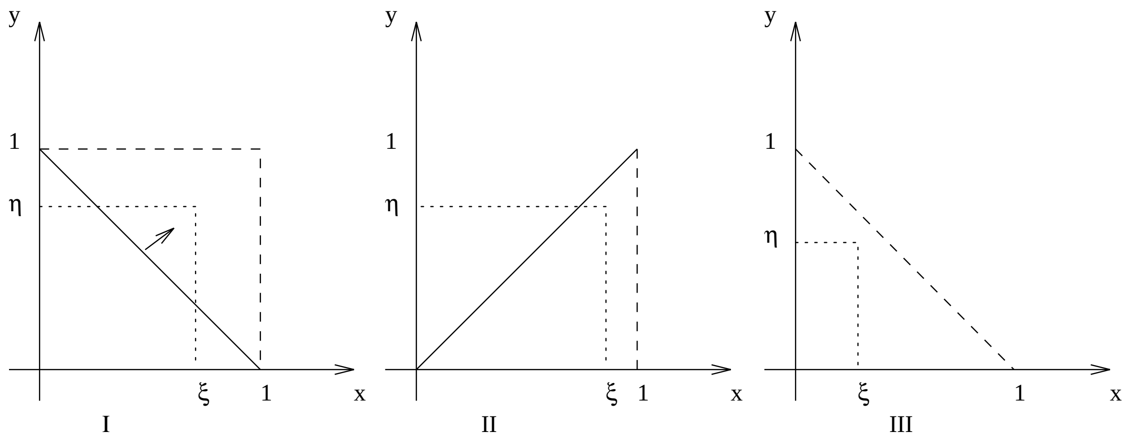


Abbildung 4.3: Teilgebiete nach der Transformation.

III: u ist in dem Dreieck $0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1,\ \ x + y \leq 1$ zu bestimmen aus seinen Werten entlang $x = 0$ und $y = 0$ (charakteristische Anfangswertaufgabe).

Die Aufgaben I, II, III sind in Abb. 4.3 graphisch dargestellt. Auf den durchgezogenen Linien ist u vorgegeben; der Pfeil deutet an, daß auch eine aus der Linie herausführende Ableitung vorgegeben ist. Auf den gestrichelten Linien ist u unbekannt.

I. Wir integrieren die Differentialgleichung vertikal zwischen den Punkten $(x, 1-x), (x, \eta)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1-x) + \int\limits_{1-x}^{\eta} h(x, y) dy$$

und anschließend horizontal zwischen den Punkten $(1-\eta, \eta)$, (ξ, η)

$$u(\xi, \eta) = u(1-\eta, \eta) + \int\limits_{1-\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1-x) dx + \int\limits_{1-\eta}^{\xi} \int\limits_{1-x}^{\eta} h(x, y) dy dx\ .$$

Da u samt seiner Ableitungen 1. Ordnung entlang $x+y = 1$ bekannt ist, ist u

dadurch im ganzen Gebiet I bekannt. Dies ist natürlich nichts anderes als die eindimensionale Kirchhoffsche Formel in dem rotierten Koordinatensystem.

II. Wir integrieren die Differentialgleichung vertikal zwischen den Punkten $(x, 0)$ und (x, η)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + \int_0^\eta h(x, y) dy$$

und anschließend horizontal zwischen den Punkten (η, η) und (ξ, η)

$$u(\xi, \eta) = u(\eta, \eta) + \int_\eta^\xi \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) dx + \int_\eta^\xi \int_0^\eta h(x, y) dy dx \; .$$

Auf $x = y$ ist u bekannt. Ebenso ist u auch auf $y = 0$ bekannt und damit auch $\partial u / \partial x$. Also ist u im ganzen Bereich II bekannt.

III. Wir integrieren die Differentialgleichung vertikal zwischen den Punkten $(x, 0)$ und (x, η)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + \int_0^\eta h(x, y) dy$$

und anschließend horizontal von $(0, \eta)$ bis (ξ, η):

$$u(\xi, \eta) = u(0, \eta) + \int_0^\xi \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) dx + \int_0^\xi \int_0^\eta h(x, y) dy dx$$

Auf $x = 0$ ist u bekannt. Auf $y = 0$ ist u und damit auch $\partial u / \partial x$ bekannt. Also ist u im ganzen Gebiet III bekannt.

Durch das Zusammensetzen der Lösung entlang der Charakteristiken entsteht natürlich im allgemeinen keine C^2-Funktion. Wir sehen, daß sich Unstetigkeiten wieder entlang der Charakteristiken ausbreiten.

Die gleichen Verhältnisse hat man für Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = h\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) .$$

Man hat dazu nur die Volterraschen Integralgleichungen zu lösen, die man durch die obige Methode erhält, im Falle I also z.B.

$$u(\xi,\eta) = u(1-\eta,\eta) + \int\limits_{1-\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1-x)dx + \int\limits_{1-\eta}^{\xi} \int\limits_{1-x}^{\eta} h\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy .$$

Dies geht ganz analog zu III.2.

Wir wollen nun noch für die Cauchysche Anfangswertaufgabe für Gleichungen der Form

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = h$$

eine Darstellung der Lösung durch die Riemannsche Funktion angeben. Diese entspricht der Greenschen Funktion bei elliptischen Gleichungen. Zunächst führen wir den adjungierten Differentialoperator

$$L^*u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(bu) + cu$$

ein. Für diesen gilt

$$\begin{aligned} vLu - uL^*v &= v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial}{\partial x}(av) + \frac{\partial}{\partial y}(bv)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} + buv\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - auv\right) . \end{aligned}$$

Ist also G ein Normalgebiet in $\mathbb{R}^2$ und u, $v \in C^2(\overline{G})$, so gilt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int\limits_G (vLu - uL^*v)dxdy = \int\limits_{\partial G} \left\{\left(v\frac{\partial u}{\partial x} + buv\right)\nu_y - \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - auv\right)\nu_x\right\} d\sigma$$

mit der äußeren Normalen $\nu = (\nu_x, \nu_y)$. Nun ist

$$\int\limits_{\partial G} (pdx + qdy) = \int\limits_{\partial G} (p\tau_x + q\tau_y)d\sigma$$

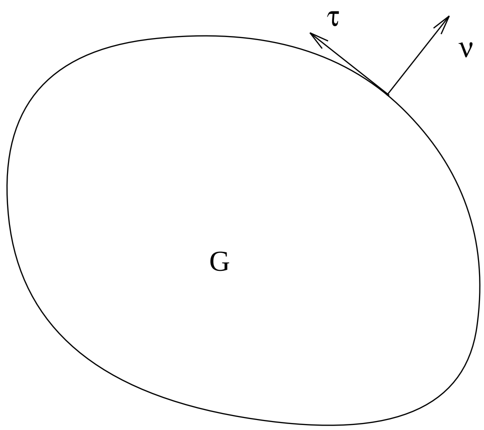


Abbildung 4.4: Tangential- und Normaleneinheitsvektor.

mit dem Tangentialeinheitsvektor τ. Bei mathematisch positiver Orientierung (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) von ∂G gilt $\nu_y = -\tau_x$, $\nu_x = \tau_y$
Also haben wir

$$\int\limits_{\partial G} (pdx + qdy) = \int\limits_{\partial G} (-p\nu_y + q\nu_x) d\sigma \ ,$$

insbesondere also

$$\int\limits_G (vLu - uL^*v) dxdy = -\int\limits_{\partial G} \left\{ \left(v\frac{\partial u}{\partial x} + buv \right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - auv \right) dy \ . \right\}$$

Wir betrachten nun eine nichtcharakteristische Anfangskurve Γ, d.h. eine Kurve ohne horizontale und vertikale Tangenten (Abb. 4.5) und den Einflußbereich G von Γ. $u \in C^2(\overline{G})$ sei eine Lösung der Cauchyschen Anfangswertaufgabe für $Lu = h$, und $v \in C^2(\overline{G})$ sei zunächst beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
- \ & \int\limits_G (vh - uL^*v) dxdy = \int_{\partial G} \left\{ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu \right) dx + u \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right) dy \right\} \\
= \ & \int\limits_{AB} \left\{ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu \right) dx + u \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right) dy \right\} \\
& \qquad + \int\limits_{BP} u \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right) dy + \int\limits_{PA} v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu \right) dx \ .
\end{aligned}$$

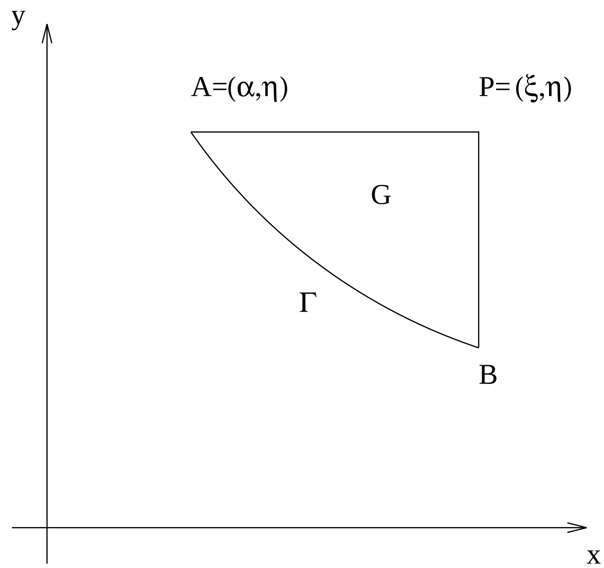


Abbildung 4.5: Der Einflußbereich G einer Anfangskurve Γ.

Im letzten Integral integrieren wir partiell und erhalten

$$\begin{aligned}
\int\limits_{PA} v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx &= -\int\limits_{\alpha}^{\xi} v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)(x,\eta)dx \\
&= -(vu)(\xi,\eta)+(vu)(\alpha,\eta)+\int\limits_{\alpha}^{\xi} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)(x,\eta)dx \\
&= -(vu)(P)+(vu)(A)+\int\limits_{AP} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx\ .
\end{aligned}$$

Benutzen wir dies, so wird aus der vorhergehenden Formel

$$\begin{aligned}
(vu)(P) \quad = \quad & \int\limits_{G}(vh-uL^*v)dxdy+\int\limits_{AB}\left\{v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx+u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy\right\} \\
& +(vu)(A)+\int\limits_{AP} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx+\int\limits_{BP} u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy\ .
\end{aligned}$$

Um den Wert von u in P zu erhalten, wählen wir nun v so, daß

$$\begin{array}{lll} 1) & v(P) = 1 & \\ 2) & L^*v = 0 & \text{in } G \\ 3) & \frac{\partial v}{\partial x} - bv = 0 & \text{entlang } AP , \\ & \frac{\partial v}{\partial y} - av = 0 & \text{entlang } BP . \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u(P) &= \int_G vhdxdy + \int_{AB} \left\{ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right) dx + u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - au\right) dy \right\} \\ &\quad + (vu)(A) , \end{aligned}$$

und die Größen auf der rechten Seite sind alle bekannt.

Die Funktion v heißt Riemannsche Funktion. Sie löst die charakteristische Anfangswertaufgabe für $L^*v = 0$. Wir schreiben

$$v(x,y) = R(x,y;\xi,\eta) .$$

Die Bedingungen 1) und 3) können zusammengefaßt werden zu

$$3') \qquad v(x,\eta) = e^{\int\limits_\xi^x b(x',\eta)dx'} , v(\xi,y) = e^{\int\limits_\eta^y a(\xi,y')dy'} .$$

Als Lösung der charakteristischen Anfangswertaufgabe 2), 3′) ist sie eindeutig bestimmt.

BEISPIELE:

1) $Lu = \partial^2 u/\partial x \partial y$. Offenbar ist $R = 1$ die Riemannsche Funktion, und wir haben

$$u(P) = \int_G hdxdy + \int_{AB} \frac{\partial u}{\partial x} dx + u(A) .$$

2) $Lu = \partial^2 u/\partial x \partial y + cu \;\; c > 0$ konstant. Es ist $L^* = L$. Für eine Lösung von $L^*v = 0$ machen wir den Ansatz

$$v(x,y) = f(z) , \qquad z = (\xi - x)(\eta - y) .$$

Einsetzen in $L^*v = 0$ ergibt

$$zf''(z) + f'(z) + cf(z) = 0 \; .$$

Durch die Substitution $u = 2\sqrt{c}z^{1/2}$ wird daraus

$$\frac{d^2f}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{df}{du} + f = 0 \; .$$

Dies ist eine Besselsche Differentialgleichung. Ihre Lösung f mit $f(0) = 1$ ist

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (u/2)^{2k}}{(k!)^2} = J_0(u) \; .$$

J_0 ist die Besselsche Funktion 1. Art der Ordnung 0. Wir sehen nun, daß

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{4c(\xi - x)(\eta - y)})$$

die Riemannsche Funktion ist.

Das hinter der Riemannschen Funktion stehende Prinzip ist sehr einfach und allgemein. Wir wollen es an dem Beispiel der Lösung des linearen Gleichungssystems $Au = b$ mit der nichtsingulären Matrix A erläutern. Die adjungierte Matrix A^* erfüllt $(u, Av) = (A^*u, v)$. Wir lösen nun

$$A^*v^k = e_k$$

mit dem k-ten Einheitsvektor e_k. Dann ist

$$\begin{aligned} (v^k, b) &= (v^k, Au) = (A^*v^k, u) = (e_k, u) \\ &= u_k \; . \end{aligned}$$

Damit ist u_k berechnet.

Wir betrachten nun Anfangs-Randwertaufgaben der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= f(x) \; , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \; , \quad x \in \Omega \; . \end{aligned}$$

$$u(x, t) = 0 \; , \quad x \in \partial\Omega \; .$$

Hier ist Ω ein Normalgebiet in $\mathbb{R}^n$.

Satz 6.1: Die Anfangs-Randwertaufgabe hat höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$.

Beweis: Seien u_1, u_2 Lösungen der genannten Art und sei $u = u_1 - u_2$. Dann ist u eine Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe mit $f = g = 0$.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left((\frac{\partial u}{\partial t})^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \; .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E(t) &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \; \Delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(-\nabla \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 \right) dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \, \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma \; .
\end{aligned}$$

Der Integrand im ersten Integral ist Null, im zweiten wegen $u = 0$ auf Ω ebenfalls. Also

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0 \; ,$$

d.h. $E(t)$ hängt von t nicht ab. Wegen der Anfangsbedingungen ist aber $E(0) = 0$. Also ist $E(t) = 0$ für $0 \le t \le T$ und damit $u = 0$ in $\overline{\Omega \times (0,T)}$.

□

Bemerkung: Der Ausdruck $E(t)$ im Beweis zu Satz 11.1 ist die Energie des Systems zur Zeit t. Diese ist also konstant. Die "Energiemethode" werden wir noch öfter für Eindeutigkeitsbeweise verwenden.

4.7 Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$ lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \, .$$

Sie ist parabolisch, und ihre charakteristischen Mannigfaltigkeiten sind die Ebenen $t =$ konstant. Das charakteristische Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f(x) \, , \quad x \in \mathbb{R}^n \, . \end{aligned}$$

Wir lösen es mit Hilfe der Grundlösung

$$\gamma_n(x, t) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} \, .$$

Man rechnet leicht nach, daß γ_n für $t > 0$ die Wärmeleitungsgleichung löst.

Satz 7.1: *Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$, und es gelte mit Konstanten A, $M > 0$*

$$|f(x)| \leq M e^{A|x|^2} \, .$$

Dann ist für $T < \frac{1}{4A}$

$$u(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma_n(x - y, t) f(y) dy$$

eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ des Anfangswertproblems, und es gibt von x unabhängige Konstanten $A_1(t)$, $M_1(t)$

$$|u(x, t)| \leq M_1(t) e^{A_1(t)|x|^2} \, .$$

Beweis: Für $0 < t < T$ kann man $u(x, t)$ beliebig häufig unter dem Integralzeichen differenzieren, so daß $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Es ist noch zu zeigen, daß $u(x, t) \to f(x_0)$ falls $(x, t) \to (x_0, 0)$.

Es ist

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma_n(x-y)f(x_0)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma_n(x-y)(f(y)-f(x_0))dy \ .$$

Mit Hilfe der Substitution $y' = (x-y)/\sqrt{4t}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma_n(x-y)dy &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t}dy \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y'|^2}dy' = 1 \ . \end{aligned}$$

Also ist das erste Integral $f(x_0)$. Im zweiten Integral führt die gleiche Substitution zu

$$u(x,t) = f(x_0) + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y'|^2} \left(f(x-\sqrt{4t}y') - f(x_0)\right) dy' \ .$$

Der Integrand geht für $(x,t) \to (x_0, 0)$ punktweise gegen 0 und läßt sich abschätzen durch

$$e^{-|y'|^2} M \left(e^{A|x-\sqrt{4t}y'|^2} + e^{A|x_0|^2}\right) \ .$$

Dies bleibt bei dem Grenzübergang für $T < \frac{1}{4A}$ unter einer integrierbaren Funktion. Also kann der Grenzübergang unter dem Integral ausgeführt werden und liefert den Wert 0.

Die angegebene Abschätzung folgt aus folgendem

Lemma: Seien $|f_i(x)| \leq M_i e^{A_i|x|^2}$, $i = 1,2$, mit $M_i > 0$, $A_1 + A_2 < 0$. Dann gilt mit einer Konstanten M und $A = A_1A_2/(A_1+A_2)$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y)f_2(x-y)dy \right| \leq M \ e^{A|x|^2} \ .$$

Denn es ist

$$
\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y) f_2(x-y)\, dy \right| &\le M_1 M_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{A_1|y|^2 + A_2|x-y|^2} dy \\
&= M_1 M_2\, e^{A|x|^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(A_1+A_2)|y-\frac{A_2}{A_1+A_2}x|^2} dy \\
&= M_1 M_2\, e^{A|x|^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(A_1+A_2)|z|^2} dz \; .
\end{aligned}
$$

Dies ist die Behauptung mit

$$
M = M_1 M_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(A_1+A_2)|z|^2} dz \; .
$$

□

Satz 7.2 (Maximumprinzip): *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(G \times (0,T)) \cap C(\overline{G} \times [0,T])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $G \times (0,T)$. Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf $(\partial G \times [0,T]) \cup (G \times \{0\})$ an.*

Bemerkung: Diese Menge $\partial G \times [0,T] \cup (G \times 0)$ heißt "parabolischer Rand" von $G \times (0,T)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $v_\varepsilon = u - \varepsilon t$. v_ε nimmt sein Maximum in $\overline{G} \times [0,T]$ in einem Punkt (x_0, t_0) an. Wir zeigen, daß (x_0, t_0) auf dem parabolischen Rand von $G \times (0,T)$ liegt.

Wäre dies nicht der Fall, so wäre $x_0 \in G$ und $0 < t_0 \le T$. Insbesondere hätte $v_\varepsilon(x, t_0)$ in x_0 ein lokales Maximum. Damit wäre notwendig

$$
\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x_0, t_0) \le 0 \; , \quad i = 1, \ldots, n \; .
$$

Dann wäre

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0,t_0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0)-\varepsilon = \Delta u(x_0,t_0)-\varepsilon = \Delta v_\varepsilon(x_0,t_0)-\varepsilon \\ &\le -\varepsilon\ ,\end{aligned}$$

und es gäbe ein $\delta > 0$, so daß

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0,t) \le -\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für} \quad t_0-\delta \le t \le t_0\ .$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, daß v_ε in (x_0,t_0) sein Maximum annimmt.

Würde nun u sein Maximum nicht auf dem parabolischen Rand von $G\times(0,T)$ annehmen, so wäre das für hinreichend kleine ε auch für v_ε der Fall. Da dies nicht sein kann, muß u sein Maximum auf dem parabolischen Rand annehmen.

□

Satz 7.3 (Eindeutigkeit): *Das Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung ist in der Klasse der Funktionen* $u \in C^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,T])$*, welche einer Abschätzung der Form*

$$|u(x,t)| \le M\ e^{A|x|^2}\ , \quad x\in\mathbb{R}^n\ , \quad t\in[0,T]$$

mit $A,\ M>0$ *genügen, eindeutig lösbar.*

Beweis: Seien u_1,u_2 zwei Lösungen der genannten Art, und sei $u=u_1-u_2$. Dann ist

$$u(x,0)=0\ , \quad |u(x,t)|\le 2Me^{A|x|^2}\ , \quad x\in\mathbb{R}^n\ , \quad t\in[0,T]\ .$$

Seien nun $\varepsilon>0$ und $b>0$ beliebig, und sei a so groß, daß

$$a>b\ , \quad 2Me^{-Aa^2}<\varepsilon\ .$$

Sei weiter für $t < 1/(8A)$

$$v(x,t) = \frac{\varepsilon}{(1-8At)^{n/2}}\ e^{2A|x|^2/(1-8At)}\ .$$

v ist wie γ_n eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Weiter ist wegen $u(x,0) = 0$

$$v(x,0) = \varepsilon\ e^{2A|x|^2} > u(x,0)\ .$$

und für $|x| = a,\ \ t < \mathrm{Min}(1/(8A), T)$

$$v(x,t) \geq \varepsilon\ e^{2A|x|^2} > 2M\ e^{Aa^2} \geq u(x,t)\ .$$

Die Funktion $v - u$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und nimmt also ihr Maximum auf dem parabolischen Rand des offenen Zylinders $|x| < a$, $0 < t < \mathrm{Min}(1/(8A), T)$ an. Die beiden letzten Ungleichungen zeigen, daß dort $v - u \geq 0$ ist. Also gilt im ganzen Zylinder $v - u \geq 0$ oder $u \leq v$, und entsprechend zeigt man $-u \leq v$. Also ist $|u| \leq v$ in dem Zylinder. Insbesondere ist also für $|x| \leq b,\ \ 0 \leq t < \mathrm{Min}(1/(16A), T)$

$$|u(x,t)| \leq v(x,t) \leq \varepsilon 2^{n/2} e^{4Ab^2}\ .$$

Da ε beliebig war, muß $u(x,t) = 0$ sein für $0 \leq t < \mathrm{Min}(1/(16A), T)$ und $|x| \leq b$. Da auch b beliebig war, gilt dies sogar für alle x. Wiederholung der Schlußweise ergibt $u(x,t) = 0$ in $[0,T]$.

$\square$

Die im Satz genannte Abschätzung kann nicht weggelassen werden. Dies zeigt folgendes Beispiel einer Funktion $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, welche die Wärmeleitungsgleichung erfüllt und entlang $t = 0$ verschwindet:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & ,\ \ t > 0\ , \\ 0 & ,\ \ t = 0\ . \end{cases}$$

Unterstellen wir einmal hinreichend gute Konvergenz der Reihe, so bestätigt man durch gliedweise Differentiation sofort $u_t = u_{xx}$, und natürlich ist $u(x,0) = 0$. u läßt aber keine Abschätzung wie im Satz genannt zu. Für Einzelheiten vergleiche man

Widder, D.V.: The heat equation. Academic Press 1970. Chapt. V.6.

Man könnte auf die Idee kommen, als Gegenbeispiel die Funktion

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\gamma_1(x,t) = -\frac{x}{2t\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$$

zu nehmen. Es gilt ja offensichtlich für jedes feste x

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 \ .$$

Dies reicht aber nicht aus, um $u \in C(\mathbb{R}^1 \times [0,\infty))$ zu zeigen. In der Tat ist u bei $(0,0)$ nicht beschränkt:

$$u(x,x^2) \to \infty \qquad \text{für} \quad x \to 0 \ .$$

Zur Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + h \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

mit einer Funktion h von x und t benutzen wir wieder das Duhamel'sche Prinzip: Wir definieren ϕ^τ als Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial \phi^\tau}{\partial t} &=& \Delta\phi^\tau & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (\tau,T) \\ \phi^\tau(x,\tau) &=& h(x,\tau) & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \end{array}$$

und setzen

$$u(x,t) = \int_0^t \phi^\tau(x,t)d\tau$$

Satz 7.4: *Sei $h \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ und*

$$|h(x,t)| \le Me^{A|x|^2}$$

für geeignete Konstanten M, A. Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe.

Beweis: Analog zu Satz 5.4.

4.8 Rand-Anfangswertprobleme parabolischer Differentialgleichungen

Wir betrachten die Rand-Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = 0\ ,\ \ x>0 \quad &,\ \ u(0,t) = f(t)\ ,\quad t>0\ . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Zur Kompatibilität in $(0,0)$ verlangen wir $f(0) = 0$. Dies ist also eine gemischte (charakterisch-nichtcharakteristische) Aufgabe.

Wir werden sehen, daß sich (8.1) auf die Abel'sche Integralgleichung

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds = f(t) \tag{8.2}$$

zurückführen läßt. Hier ist $0 < \alpha < 1$.

Satz 8.1: *Sei $f \in C^1[0,\infty)$ und $f(0) = 0$. Dann hat (8.2) in $C[0,\infty)$ die eindeutig bestimmte Lösung*

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{f(t)}{(s-t)^\alpha}dt \tag{8.3}$$

Beweis: Zunächst zeigen wir Eindeutigkeit.

Sei $\varphi \in C[0,\infty)$ eine Lösung von (8.2). Wir multiplizieren (8.2) mit $(x-t)^{-\alpha}$ und integrieren über t von 0 bis x. Es entsteht

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\int_0^t \frac{\varphi(s)}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}}dsdt = \int_0^x \frac{f(x)}{(x-t)^\alpha}dt\ .$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \varphi(s)\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}}ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\ .$$

Im inneren Integral führen wir die Substitution $t = (1-t')s + t'x$ durch. Dann wird

$$\begin{aligned}\int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} &= \int\limits_0^1 \frac{dt'}{(1-t')^\alpha t'^{1-\alpha}} \\ &= B(1-\alpha,\alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} \ .\end{aligned}$$

B ist die Beta-Funktion. Also haben wir

$$\Gamma(1-\alpha)\int\limits_0^x \varphi(s)ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt$$

und damit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \ .$$

Das letzte Integral ist wegen $f \in C^1[0,\infty)$ und $f(0) = 0$ stetig. Wenn (8.2) also eine stetige Lösung hat, dann ist es (8.3). Durch Umkehrung der einzelnen Schritte sieht man, daß (8.3) auch tatsächlich Lösung von (8.2) ist.

□

Satz 8.2: *Sei $f \in C^1[0,\infty)$ und $f(0) = 0$. Dann besitzt (8.1) die Lösung*

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{e^{-x^2/4(t-s)}}{\sqrt{t-s}}\,\varphi(s)ds \ , \\ \varphi(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{ds}\int\limits_0^s \frac{f(t)}{\sqrt{s-t}}dt \ .\end{aligned}$$

Beweis: Es ist für $x = 0$ nach Satz 8.1

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds = f(t)$$

und natürlich $u(x,0) = 0$. Die Differentialgleichung für x, $t > 0$ rechnet man unmittelbar nach.

4.9 Eigenwertprobleme

Sei Ω ein Normalgebiet. Wir suchen Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Es wird sich zeigen, daß dieses Problem nur für diskrete Werte $\lambda = \lambda_k$ nichttriviale Lösungen u_k hat. Wir nennen λ_k Eigenwerte und u_k Eigenfunktionen. Wir benötigen einige funktionalanalytische Hilfsmittel.

Sei V (reeller) Hilbertraum und $A : V \to V$ linear und beschränkt, also

$$\|A\| = \operatorname*{Sup}_{\|f\|=1} \|Af\| < \infty\,.$$

A heißt selbstadjungiert, falls

$$(Af, g) = (f, Ag) \qquad \forall \quad f, g \in V\,.$$

A heißt vollstetig (oder kompakt), falls A jede beschränkte Menge in eine relativ kompakte Menge abbildet.

BEISPIELE:

1) Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen inneren Produkt, und sei A eine (n,n)-Matrix. Dann ist A linear und beschränkt mit

$$\|A\| = (\rho(A^*A))^{1/2}\,, \quad \rho \text{ Spektralradius}\,.$$

Da jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$ relativ kompakt ist, ist A vollstetig. Selbstadjungiertheit bedeutet Symmetrie.

2) Sei $V = L_2(\Omega)$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt ist. Sei $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$ und

$$(Af)(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) dy\,, \qquad x \in \Omega\,.$$

A heißt Integraloperator mit Kern K. Es ist nach Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|(Af)(x)|^2 &\leq \int_\Omega K^2(x,y)dy \int_\Omega f^2(y)dy \;, \\
\int_\Omega |(Af)(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega \int_\Omega K^2(x,y)dydx \int_\Omega f^2(y)dy \;.
\end{aligned}$$

Also ist A beschränkt, und es ist

$$\|A\| \leq \left(\int_\Omega \int_\Omega K^2(x,y)dydx \right)^{1/2} \;.$$

Im folgenden setzen wir alle Funktionen außerhalb Ω gleich Null. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|(Af)(x+h) - (Af)(x)|^2 &\leq \left(\int_\Omega |K(x+h,y) - K(x,y)| \, |f(y)|dy \right)^2 \\
&\leq \int_\Omega |K(x+h,y) - K(x,y)|^2 dy \int_\Omega |f(y)|^2 dy \;, \\
\int_\Omega |(Af)(x+h) - (Af)(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega \int_\Omega |K(x+h,y) - K(x,y)|^2 dxdy \int_\Omega |f^2(y)|dy.
\end{aligned}$$

L_2-Funktionen sind im Mittel stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x+h,y) - K(x,y)|^2 dydx \leq \varepsilon^2 \qquad \text{für} \quad |h| \leq \delta \;.$$

Also gilt

$$\int_\Omega |(Af)(x+h) - (Af)(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_\Omega f^2(y)dy \qquad \text{für} \quad |h| \leq \delta \;.$$

Eine Menge $M \subseteq L_2(\Omega)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

1) M beschränkt ist,

2) M im Mittel gleichgradig stetig ist, d.h. für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2$$

für alle $f \in M$ und $|h| \leq \delta$.

Danach ist die Menge $M = AB$ für eine beschränkte Menge $B \subseteq L_2(\Omega)$ relativ kompakt, mithin A vollstetig.

Zur Untersuchung der Selbstadjungiertheit bilden wir

$$\begin{aligned}
(Af, g) &= \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K(x,y)f(y)dyg(x)dx \\
&= \int\limits_\Omega f(y) \int\limits_\Omega K(x,y)g(x)dxdy \\
&= \int\limits_\Omega f(y)(A^*g)(y)dy = (f, A^*g) \\
(A^*f)(x) &= \int\limits_\Omega K(y,x)f(y)dy \;.
\end{aligned}$$

A^* ist der zu A adjungierte Operator. Er hat die gleichen Eigenschaften wie A. A ist also genau dann selbstadjungiert, wenn K symmetrisch ist, d.h. $K(x,y) = K(y,x)$.

Satz 9.1: *Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann ist*

$$\|A\| = r_A \quad , \quad r_A = \operatorname*{Sup}_{\|f\|=1} |(Af,f)| \;.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$\|A\| = d_A \;, \quad d_A = \operatorname*{Sup}_{\|f\|=\|g\|=1} |(Af,g)| \;.$$

Es ist für $\|f\| = \|g\| = 1$

$$|(Af,g)| \leq \|Af\|\|g\| \leq \|A\|\|f\|\|g\| = \|A\| \;,$$

also $d_A \leq \|A\|$. Sei nun (f_n) eine Folge mit $\|f_n\| = 1$ und $\|Af_n\| \to \|A\|$, und sei $g_n = Af_n/\|Af_n\|$. Dies ist für $A \neq 0$ möglich, und für $A = 0$ ist nichts zu beweisen. Dann ist

$$|(Af_n, g_n)| = \frac{1}{\|Af_n\|}|(Af_n, Af_n)| = \|Af_n\| \to \|A\| \;,$$

also $d_A = \|A\|$.

Wir haben $\|A\| = r_A$ zu zeigen mit

$$r_A = \operatorname*{Sup}_{\|f\|=1} |(Af,f)| = \operatorname*{Sup}_{f \neq 0} \frac{|(Af,f)|}{(f,f)} \; .$$

Wie oben sieht man $r_A \leq \|A\|$. Wegen der Selbstadjungiertheit ist

$$4(Af,g) = (A(f+g), f+g) - (A(f-g), f-g)$$

und daher

$$\begin{aligned} 4|(Af,g)| &\leq |(A(f+g), f+g)| + |(A(f-g), f-g)| \\ &\leq r_A\{(f+g, f+g) + (f-g, f-g)\} \\ &= 2r_A\{(f,f) + (g,g)\} \; . \end{aligned}$$

Für $\|f\| = \|g\| = 1$ ist also $|(Af,g)| \leq r_A$ und damit nach dem ersten Teil des Beweises $\|A\| \leq r_A$.

□

Satz 9.2: *Sei A vollstetig und selbstadjungiert. Dann ist r_A oder $-r_A$ Eigenwert zu A.*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge mit $\|f_n\| = 1$ und $|(Af_n, f_n)| \to r_A$. Dann gibt es eine Teilfolge, die wir wieder mit (f_n) bezeichnen, so daß

$$(Af_n, f_n) \to \mu_1 \; , \qquad |\mu_1| = r_A \; .$$

Für diese Folge gilt

$$\begin{aligned} \|Af_n - \mu_1 f_n\|^2 &= (Af_n, Af_n) - 2\mu_1(Af_n, f_n) + \mu_1^2 \\ &\leq \|A\|^2 - 2\mu_1(Af_n, f_n) + \mu_1^2 \end{aligned} \tag{9.2}$$

und dies konvergiert wegen $\|A\|^2 = \mu_1^2$ gegen Null. Also

$$Af_n - \mu_1 f_n \to 0 \ , \qquad n \to \infty \ .$$

Da (f_n) beschränkt ist, ist (Af_n) relativ kompakt. Wir können also eine Teilfolge von (f_n) wählen, die wir wieder mit (f_n) bezeichnen, so daß (Af_n) konvergiert. Dann konvergiert auch (f_n), jedenfalls für $\mu_1 \neq 0$, und für $\mu_1 = 0$ ist nichts zu beweisen. Für $f = \lim\limits_n f_n$ gilt

$$Af - \mu_1 f = 0 \ , \qquad \|f\| = 1 \ ,$$

d.h. f ist Eigenelement zum Eigenwert μ_1.

□

Satz 9.3: *A sei vollstetig und selbstadjungiert. Dann gilt:*

(a) Es gibt eine Folge (μ_n) von Eigenwerten mit $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots > 0$. Ist diese unendlich, so konvergiert sie gegen 0.

(b) Jeder Eigenwert μ_n hat endliche Vielfachheit. Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(c) Jedes Element Af ist Linearkombination der Eigenelemente u_n.

Beweis: Ist $A = 0$, so ist nichts zu beweisen. Für $A \neq 0$ konstruieren wir μ_1 und das zugehörige Eigenelement u_1 wie in Satz 9.2. Dann setzen wir $V_2 = \{f \in V : (f, u_1) = 0\}$. V_2 ist wie V ein Hilbertraum. A bildet V_2 in sich ab. Denn ist $f \in V_2$, so ist

$$(Af, u_1) = (f, Au_1) = \mu_1(f, u_1) = 0 \ ,$$

also auch $Af \in V_2$. Also ist die Restriktion A_2 von A auf V_2 ein vollstetiger selbstadjungierter Operator.

Ist $A_2 \neq 0$, so finden wir nach Satz 9.2 wieder einen Eigenwert $\mu_2 \neq 0$ mit $|\mu_2| \leq |\mu_1|$ und ein dazugehöriges Eigenelement $u_2 \in V_2$. In dieser Weise fahren wir fort, konstruieren also eine Folge von Hilberträumen $V_{n+1} = \{f \in$

$V_n : (f, u_n) = 0\}$, eine Folge von sich evtl. wiederholenden Eigenwerten μ_n und Eigenelemente u_n, die paarweise orthogonal sind.

Bricht diese Folge einmal mit $A_n = 0$ ab, so sind wir fertig. In diesem Fall hat A die Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ und den Eigenwert 0, diesen eventuell mit unendlicher Vielfachheit.

Bricht die Folge nicht ab, so muß $\mu_n \to 0$ gelten. Die Folge (u_n) ist nämlich beschränkt. Wegen der Vollstetigkeit von A muß sich also aus (Au_n) eine konvergente Teilfolge auswählen lassen. Nun ist aber wegen der Orthogonalität von Au_n, Au_m für $n \neq m$

$$\|Au_n - Au_m\|^2 = \|Au_n\|^2 + \|Au_m\|^2 = \mu_n^2 + \mu_m^2 \ .$$

Würden die μ_n nicht gegen Null konvergieren, so wäre mit einem $\varepsilon > 0$

$$\|Au_n - Au_m\|^2 \geq \varepsilon^2 \ ,$$

und (Au_n) könnte keine konvergente Teilfolge enthalten.

Wegen $\mu_n \to 0$ kann jedes μ_n nur endlich oft in (μ_n) auftreten, d.h. jedes μ_n ist von endlicher Vielfachheit.

Sei nun $f \in V$ und $f_n = f - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (f, u_k) u_k$. Dann ist $f_n \in V_n$, und nach Satz 9.1

$$\|Af_n\| = \|A_n f_n\| \leq \|A_n\| \|f_n\| = r_{A_n} \|f_n\| = |\mu_n| \|f_n\| \ .$$

Also gilt $\|Af_n\| \to 0$, d.h.

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) \mu_k u_k \ .$$

$\square$

Bemerkungen:

1) Es gibt keine weiteren von Null verschiedenen Eigenwerte. Ist nämlich μ ein solcher, d.h. $Au = \mu u$ mit $\|u\| = 1$, so ist

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) \mu_k u_k \ .$$

Nun sind aber Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal, d.h. $(u, u_k) = 0$ für alle k. Also $Au = 0$ und damit $\mu = 0$.

2) Ist A positiv definit, d.h. $(Af, f) > 0$ für alle $f \neq 0$, so sind alle Eigenwerte positiv. Die Eigenelemente bilden dann ein vollständiges Orthonormalsystem in V.

Wir wollen die entwickelte Theorie auf das Eigenwertproblem (9.1) anwenden. Sei G die Greensche Funktion zu Ω, und sei

$$(Af)(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy \ .$$

Für $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ist dann $u = Af$ Lösung von $-\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Ist also $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösung von (9.1) mit $\lambda \neq 0$, so ist mit $\mu = 1/\lambda$

$$Au = \mu u \ . \tag{9.3}$$

Ist umgekehrt $u \in L_2(\Omega)$ Lösung von (9.3) mit $\mu \neq 0$, so ist zunächst einmal $u \in C(\overline{\Omega})$, damit nach Satz 2.2 sogar $u \in C^1(\overline{\Omega})$, und weiter mit Satz 2.2 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von (9.1).

Satz 9.4: *A ist für $n = 2, 3$ vollstetig, selbstadjungiert und positiv definit.*

Beweis: Sei K Kugel um 0, welche Ω enthält, und sei G_K die Greensche Funktion zu K. Dann ist für $x, y \in \Omega$

$$0 \leq G(x,y) \leq G_K(x,y) \ ,$$

wie man dem Maximumprinzip entnimmt. Dem expliziten Ausdruck für G_K aus III.2 entnimmt man, daß G_K Singularitäten höchstens der Ordnung

$$\ell n|y-x| \quad (n = 2) \ , \qquad |x-y|^{2-n} \quad (n \geq 3)$$

enthält, und diese sind quadratintegrierbar in $\Omega \times \Omega$ für $n < 4$. Also ist G_K und damit erst recht G in $L_2(\Omega \times \Omega)$ für $n = 2, 3$. Nach Beispiel 2 ist A dann vollstetig und wegen der Symmetrie von G (vgl. Satz 2.4) auch selbstadjungiert. A ist darüber hinaus positiv definit, denn für $f \in V$ und u die Lösung von $f = -\Delta u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ist

$$(Af, f) = (u, -\Delta u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx > 0 \,,$$

falls $u \neq 0$.

Satz 9.5: *Das Eigenwertproblem (9.1) besitzt für $n = 2, 3$ eine Folge positiver Eigenwerte λ_k mit $\lambda_k \to \infty$. Jeder dieser Eigenwerte ist von endlicher Vielfachheit, die Eigenfunktionen sind aus $C^2(\Omega)$ und bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\Omega)$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 9.4 und 9.3.

4.10 Separation der Variablen

Die Lösung des Eigenwertproblems

$$-\Delta f = \lambda f \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad f = 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega \tag{10.1}$$

für einfache Gebiete Ω kann oft auf eindimensionale Probleme zurückgeführt werden durch eine Methode, welche man Separation der Variablen nennt.

Zunächst rechnen wir Δf auf neue Koordinaten um und bedienen uns dazu der Methode von Aufgabe 30. Sei $x = \phi(u)$ eine umkehrbar eindeutige zweimal stetig differenzierbare Transformation mit der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & , & \cdots & , & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & , & \cdots & , & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

und sei $F(u) = f(\phi(u))$. Dann ist

$$\nabla_u F(u) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^T (u) \nabla_x f(\phi(u))\ .$$

Für $f \in C^2(\Omega)$, $g \in C_0^2(\Omega)$ ist also mit $G(u) = g(\phi(u))$

$$\begin{aligned} \int \Delta f \cdot g dx &= -\int \nabla f \cdot \nabla g dx \\ &= -\int \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^{-T} \nabla_u F \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^{-T} \nabla_u G \left|\frac{\partial \phi}{\partial u}\right| du \\ &= -\int H \nabla_u F \cdot \nabla_u G du \\ &= \int \mathrm{div}_u (H \nabla_u F) G du \\ &= \int \frac{1}{|\frac{\partial \phi}{\partial u}|} \mathrm{div}_u (H \nabla_u F) g dx\ , \end{aligned}$$

wobei H die Matrix

$$H = \left|\frac{\partial \phi}{\partial u}\right| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^{-T} = (h_{ij})$$

bedeutet. Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{|\frac{\partial\phi}{\partial u}|}\,\mathrm{div}_u\,(H\nabla_u F)\\ &= \frac{1}{|\frac{\partial\phi}{\partial u}|}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_{ij}\frac{\partial F}{\partial u_j}\right)\ .\end{aligned}$$

Für orthogonale Transformationen ist

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^T\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} g_1^2 & & O\\ & \ddots & \\ O & & g_n^2\end{pmatrix}\ ,\qquad \left|\frac{\partial\phi}{\partial u}\right| = g_1\dots g_n\ .$$

In diesem Fall erhält man

$$\Delta f = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_i\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)\ ,\quad h = g_1\dots g_n\ ,\ \ h_i = \frac{g_1\dots\check{g}_i\dots g_n}{g_i}\ ,\qquad (10.2)$$

wobei ˇ andeutet, daß der entsprechende Faktor in dem Produkt fehlt.

BEISPIELE:

1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta\ ,\quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta\ ,\quad z = r\cos\vartheta\ ,\\ & \quad 0\le\varphi<2\pi\ ,\quad 0<\vartheta<\pi\ ,\quad r>0\ .\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta\\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^T\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix}1 & & \\ & r^2\sin^2\vartheta & \\ & & r^2\end{pmatrix}\ ,\qquad \left|\frac{\partial\phi}{\partial u}\right| = r^2\sin\vartheta\ ,$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)\right)\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)\ .\end{aligned}$$

2) Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z \;, \qquad r > 0 \;, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{R}^1 \;.$$
$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \;.$$

Zur Lösung von (10.1) mittels Separation muß man zunächst einmal annehmen, Ω könne durch eine orthogonale Variablentransformation auf ein Gebiet im Raume der Variablen u abgebildet werden, so daß $\partial\Omega$ auf Koordinatenhyperflächen abgebildet wird. Mit (10.2) lautet dann (10.1)

$$\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_i\frac{\partial F}{\partial u_i}\right) + \lambda F = 0 \;. \tag{10.3}$$

Wir suchen Lösungen der Form

$$F(u_1,\ldots .u_n) = F_1(u_1)\cdots F_n(u_n) \;.$$

Damit lautet (10.3)

$$\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_i}\,\frac{\partial}{\partial u_i}\left(h_i\frac{dF_i}{du_i}\right) + \lambda = 0 \;. \tag{10.4}$$

Unter günstigen Umständen führt dies zu gewöhnlichen Differentialgleichungen.

BEISPIEL: Sei Ω ein Zylinder mit Radius 1 und Höhe π.

Setzen wir $F(r,\varphi,z) = R(r)\phi(\varphi)Z(z)$, so lautet (10.4)

$$\frac{1}{rR}(rR')' + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''}{\phi} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0 \;.$$

Dies ist nur möglich, wenn

$$\frac{Z''}{Z} = -\alpha \;, \qquad \frac{\phi''}{\phi} = -\beta$$

konstant sind, und es muß dann

$$\frac{1}{rR}(rR')' - \frac{\beta}{r^2} - \alpha + \lambda = 0$$

sein. Da ϕ die Periode 2π haben muß, ist $\beta = k^2$ mit $k = k = 0, 1, \ldots$, und es ist dann

$$\phi(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi$$

mit Konstanten a_k, b_k. Da Z bei 0 und π verschwinden muß, ist $\alpha = \ell^2$ mit $\ell = 1, 2, \ldots$, und es ist dann

$$Z(z) = \sin \ell z \; .$$

Damit wird dann aus der Differentialgleichung für R

$$R'' + \frac{1}{r}R' + (j^2 - \frac{k^2}{r^2})R = 0 \; , \qquad j^2 = \lambda - \ell^2 \; .$$

Dies ist eine Besselsche Differentialgleichung. Ihre einzige bei 0 beschränkte Lösung ist

$$R(r) = J_k(jr)$$

mit J_k der Besselfunktion 1. Art der Ordnung k. Sie hat (neben der Nullstelle 0 für $k > 0$) Nullstellen $j_{k1} < j_{k2} < \cdots$ mit $j_{kp} \to \infty$ für $p \to \infty$. Da $R(1) = 0$ sein muß, ist $j = j_{kp}$. Damit hat man die Eigenwerte

$$\lambda_{pk\ell} = (j_{kp})^2 + \ell^2$$

und die Eigenfunktionen

$$J_k(j_{kp}r) \left\{ \begin{array}{c} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{array} \right\} \sin \ell z$$

$$\ell, p = 1, 2, \ldots \; , \qquad k = 0, 1, \ldots$$

gefunden. Man kann zeigen, daß dies alle Eigenwerte und Eigenfunktionen sind.

Kapitel 5

Anwendungen

5.1 Streuung an einem Zylinder

In ein Medium mit Schallgeschwindigkeit c_0 sei ein Zylinder mit Radius ρ und Schallgeschwindigkeit c_1 eingebettet. Der Zylinder wird bestrahlt von einer ebenen Welle mit Frequenz ω. Zu berechnen ist das gestreute Feld.

Wir betrachten das Problem als invariant entlang der Zylinderachse und behandeln es dementsprechend als zweidimensional. Zu lösen ist dann die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x)\Delta u \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \times (-\infty, -\infty) \tag{1.1}$$

mit

$$c(x) = \begin{cases} c_0 & , \quad |x| > \rho \\ c_1 & , \quad |x| < \rho \end{cases} \quad . \tag{1.2}$$

Wir betrachten nur zeitharmonische Lösungen, also

$$u(x,t) = e^{i\omega t} v(x) \ .$$

Damit wird aus (1.1)

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \ , \tag{1.3}$$

mit

$$k(x) = \frac{\omega}{c(x)} = \begin{cases} \frac{\omega}{c_0} = k_0 & , \quad |x| > \rho \\ \frac{\omega}{c_1} = k_1 & , \quad |x| < \rho \end{cases} \quad .$$

Eine in x_1-Richtung einfallende ebene Welle hat die Form $e^{ik_0 x_1}$. Also suchen wir eine Lösung von (1.3) mit

$$v(x) = e^{ik_0 x_1} + w(x)$$

wo w die gestreute Welle darstellt. Diese muß die Ausstrahlungsbedingung (vgl. IV.3) erfüllen. In zwei Dimensionen lautet diese

$$r^{1/2} \operatorname*{Max}_{|x|=r} |w(x)| \leq M \ , \quad r^{3/2} \operatorname*{Max}_{|x|=r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} - ik_0 w \right| \leq M \ . \tag{1.4}$$

Wir führen nun Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ein. Aus (1.3) wird dann (vgl. IV.10 oder Aufgabe 30)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0 \ . \tag{1.5}$$

Separation der Variablen ergibt Lösungen der Form (n ganz)

$$v = e^{in\varphi} v_n(r) \ ,$$

$$v_n'' + \frac{1}{r} v_n' + (k^2 - \frac{n^2}{r^2}) v_n = 0 \ . \tag{1.6}$$

Dies ist die Bessel'sche Differentialgleichung. Also haben wir für $r < \rho$ mit $k = k_1$ und für $r > \rho$ mit $k = k_0$ die Lösungen $J_n(kr)$, $Y_n(kr)$. Diese erfüllen zwar die erste der Ausstrahlungsbedingungen (1.4), aber nicht die zweite. Um auch diese zu erfüllen, führen wir die Hankel'schen Funktionen 1. Art

$$H_n = J_n + iY_n$$

ein. Für diese gilt

$$H_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r - \frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{r}\right) \ , \quad r \to \infty \ .$$

Hieraus folgt, daß $H_n(k_0 r)$ auch die zweite Bedingung (1.4) erfüllt. Also haben wir folgende Lösungen von (1.5): Für $r < \rho$ $J_n(k_1 r)$, für $r > \rho$ $H_n(k_0 r)$. Aus diesen Lösungen wollen wir die Lösung v aufbauen.

Für $|x| < \rho$ ist v beschränkt. Also lautet die Entwicklung von v nach Lösungen von (1.6) für $r < \rho$.

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n J_n(k_1 r) e^{in\varphi} \ . \tag{1.7}$$

Für $|x| > \rho$ läßt sich die gestreute Welle nach Hankel-Funktionen entwickeln. Wir entwickeln die einfallende Welle in eine Fourier-Reihe

$$e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{in\varphi}$$

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikr\cos\varphi - in\varphi} d\varphi = i^n J_n(kr) \ .$$

Also haben wir (Jacobi-Anger)

$$e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\varphi} \ .$$

Für $r > \rho$ ist also

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n (J_n(k_0 r) + b_n H_n(k_0 r)) e^{in\varphi} \ . \tag{1.8}$$

Bei $r = \rho$ müssen sich die beiden Entwicklungen zu stetig differenzierbaren Funktionen zusammenfügen. Dies bedeutet

$$v(\rho - 0, \varphi) = v(\rho + 0, \varphi) \ , \quad \frac{\partial v}{\partial r}(\rho - 0, \varphi) = \frac{\partial v}{\partial r}(\rho + 0, \varphi) \ .$$

Für die Koeffizienten a_n, b_n bedeutet dies

$$\begin{array}{rcccc} a_n J_n(k_1\rho) & = & J_n(k_0\rho) & + & b_n H_n(k_0\rho) \\ a_n \frac{k_1}{k_0} J_n'(k_1\rho) & = & J_n'(k_0\rho) & + & b_n H_n'(k_0\rho) \ . \end{array}$$

Um dieses lineare Gleichungssystem zu lösen, machen wir Gebrauch von

$$(J_n H_n' - J_n' H_n)(z) = \frac{2i}{\pi z} \ .$$

Dann ergeben sich nach der Cramer'schen Regel aus

$$\begin{array}{rcccc} J_n(k_1\rho) & = & \frac{1}{a_n} J_n(k_0\rho) & + & \frac{b_n}{a_n} H_n(k_0\rho) \\ \frac{k_1}{k_0} J_n'(k_1\rho) & = & \frac{1}{a_n} J_n'(k_0\rho) & + & \frac{b_n}{a_n} H_n'(k_0\rho) \end{array}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= \frac{J_n(k_1\rho)H_n'(k_0\rho) - \frac{k_1}{k_0} J_n'(k_1\rho)H_n(k_0\rho)}{(J_n H_n' - J_n' H_n)(k_0\rho)} \\ &= \frac{k_0 J_n(k_1\rho)H_n'(k_0\rho) - k_1 J_n'(k_1\rho)H_n(k_0\rho)}{\frac{2i}{\pi\rho}}, \\ \frac{b_n}{a_n} &= \frac{J_n(k_0\rho)\frac{k_1}{k_0} J_n'(k_1\rho) - J_n'(k_0\rho)J_n(k_1\rho)}{(J_n H_n' - J_n' H_n)(k_0\rho)} \\ &= \frac{k_1 J_n(k_1\rho)J_n'(k_1\rho) - k_0 J_n'(k_1\rho)J_n(k_1\rho)}{\frac{2i}{\pi\rho}}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (1.6), (1.7) ein, so erhalten wir die Lösung des Streuproblems.

5.2 Die Wellengleichung in der Näherung der geometrischen Optik

Wieder betrachten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c(x)\Delta u$$

mit einer Funktion $c(x) > 0$, und wieder suchen wir Lösungen der Form

$$u(x,t) = e^{-i\omega t} v(x) \ ,$$

$$\Delta v + \frac{\omega^2}{c^2} v = 0 \ . \tag{2.1}$$

Wir nehmen nun an, daß ω groß ist, und suchen eine Lösung von (2.1) in der Form

$$v(x) = e^{i\omega\phi(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x)}{(i\omega)^j} \ . \tag{2.2}$$

Setzen wir dies in (2.1) ein, so entsteht

$$(i\omega\Delta\phi - \omega^2|\nabla\phi|^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\phi \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla v_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta v_j}{(i\omega)^j}$$

$$+ \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{(i\omega)^j} = 0 \ .$$

Diese Beziehung soll für alle ω gelten. Vergleichen wir die Faktoren der Potenzen ω^2, ω, 1, $\omega^{-1}, \ldots$, so entsteht der Reihe nach

$$\begin{array}{rcl} \omega^2 & : & |\nabla\phi|^2 = \frac{1}{c^2} \\ \omega & : & 2\nabla\phi \cdot \nabla v_0 + v_0\Delta\phi = 0 \\ 1 & : & 2\nabla\phi \cdot \nabla v_1 + v_1\Delta\phi + \Delta v_0 = 0 \\ \omega^{-1} & : & 2\nabla\phi \cdot \nabla v_2 + v_2\Delta\phi + \Delta v_1 = 0 \end{array}$$

usw. Die erste Gleichung ist die uns wohlbekannte Eikonal-Gleichung. Wir schreiben sie in der Form

$$F(x,p,\phi) = |p| - \frac{1}{c(x)} = 0 \ . \tag{2.3}$$

Die weiteren Gleichungen sind sogenannte Transportgleichungen. Diese Gleichungen werden nun sukzessive nach $\phi, v_0, \ldots, v_j$ aufgelöst und dadurch eine Funktion v bestimmt, welche (2.1) bis auf Terme der Ordnung ω^{2-j} erfüllt.

Betrachten wir zunächst die Funktion

$$v(x) = e^{i\omega\phi(x)} ,$$

wobei ϕ die Eikonal-Gleichung erfüllt. Sie führt zu der Näherung

$$u(x,t) = e^{i\omega(\phi(x)-t)}$$

für die Wellengleichung. u beschreibt eine Welle, deren Phase in allen Punkten der Fläche $\phi(x) = t$ dieselbe ist. Diese Fläche heißt daher Wellenfront. Für konstantes $c > 0$ ist z.B. $\phi(x) = p \cdot x$ mit $|p| = \frac{1}{c}$ eine Lösung der Eikonal-Gleichung, die Wellenfront also die Ebene $p \cdot x = t$. Diese bewegt sich mit der Geschwindigkeit c. Ein anderes Beispiel ist $\phi(x) = \frac{1}{c}|x|$. Die Wellenfront hat jetzt die Gleichung $|x| = ct$ und stellt ebenfalls eine sich mit der Geschwindigkeit c fortbewegende Fläche dar. Dies stimmt auch für nicht konstantes c. Ist nämlich $x(t)$ ein Punkt einer Wellenfront, der sich senkrecht zu ihr fortbewegt, so gilt

$$\phi(x(t)) = t , \qquad \dot{x}(t) = \alpha(t)\nabla\phi(x(t))$$

mit einem Skalar $\alpha(t)$. Differenzieren der ersten Beziehung nach t ergibt zusammen mit der zweiten

$$\alpha(t)|\nabla(\phi(x(t))|^2 = 1$$

und damit wegen der Eikonal-Gleichung

$$\alpha(t) = c^2(x(t)) , \qquad |\dot{x}(t)| = c^2(x(t))|\nabla\phi(x(t))| = c(x(t)) .$$

Also bewegt sich unser Punkt $x(t)$ mit der Geschwindigkeit $c(x(t))$ und damit die ganze Wellenfront in jedem ihrer Punkte x mit der Geschwindigkeit $c(x)$ senkrecht zu sich selbst.

Das charakteristische System der Eikonal-Gleichung ist nach II.2.2

$$\dot{x} = \frac{p}{|p|} , \qquad \dot{p} = \nabla(\frac{1}{c(x)}) , \qquad \dot{\phi} = \frac{1}{c(x)} . \tag{2.4}$$

Wir wollen zeigen, daß die Lösungen $x(t)$ von (2.4), also die Kurven, welche charakteristische Streifen tragen, gerade die Kurven sind, entlang denen sich Signale in dem Geschwindigkeitsfeld $c(x)$ ausbreiten. Nach dem Fermat'schen Prinzip erfolgt diese Ausbreitung nämlich so, daß die Laufzeit zwischen zwei Punkten minimal ist. Mit anderen Worten: Ist K eine beliebige Kurve, welche die Punkte x_0, x_1 verbindet, so läuft ein Signal, das bei x_0 startet und bei x_1 beobachtet wird entlang der Kurve K^*, für welche

$$\int_K \frac{ds}{c(x)} , \qquad s = \text{Bogenlänge} \tag{2.5}$$

möglichst klein ist.

Wir brauchen nun folgendes Hilfsmittel aus der Variationsrechnung.

Satz 2.1: *Sei $L \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$, und sei x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Unter allen Kurven x, welche x_0 mit x_1 verbinden, sei x^* so, daß*

$$\int_0^1 L(x^*, \dot{x}^*)dt \leq \int_0^1 L(x, \dot{x})dt .$$

Ist $x^* \in C^2[0,1]$, so gelten die Euler'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x^*, \dot{x}^*) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \dot{x}^*) = 0 , \qquad i = 1, \ldots, n .$$

Beweis: Sei x^* wie im Satz angenommen, und sei $x^\varepsilon = x^* + \varepsilon\varphi$ mit $\varphi \in C^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Dann verbindet auch x^ε die Punkte x_0, x_1, und es nimmt die Funktion

$$J_\varphi(\varepsilon) = \int_0^1 L(x^\varepsilon, \dot{x}^\varepsilon)dt$$

in $\varepsilon = 0$ ein relatives Minimum an. Also ist $J'_\varphi(0) = 0$. Berechnung von $J'_\varphi(0)$ mittels Kettenregel und partieller Integration ergibt

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_\varphi(0) \quad = \quad \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 L(x^* + \varepsilon\varphi, \dot{x}^* + \varepsilon\dot{\varphi})dt\big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \dot{x}^*)\varphi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x^*, \dot{x}^*)\dot{\varphi}_i \right) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) (x^*, \dot{x}^*)\varphi_i dt = 0 \; .$$

Da dies für alle $\varphi \in C^2[0,1]$ mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ gelten muß, folgen die Euler'schen Gleichungen.

Wenden wir dies nun an auf das Problem, (2.5) zu minimieren. Hier haben wir

$$L(x, \dot{x}) = \frac{|\dot{x}|}{c(x)} \; .$$

Die Euler'schen Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{c(x)|\dot{x}|} - |\dot{x}|\nabla\frac{1}{c(x)} = 0$$

Diese Gleichungen sind invariant gegenüber Parametertransformationen. Also können wir z.B. die Bogenlänge als Parameter verwenden. Dann ist $|\dot{x}| = 1$, und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{c(x)} = \nabla\frac{1}{c(x)} \; .$$

Mit $p = \dot{x}/c(x)$, also $|p| = 1/c(x)$, wird hieraus gerade (2.4).

Damit steht fest: Die (Träger der) Charakteristiken der Eikonal-Gleichung genügen dem Fermat'schen Prinzip (und werden daher als “Strahlen” angesehen).

Zur Lösung der Eikonal-Gleichung verwenden wir die Methoden der Charakteristiken aus II.2.2. Sei Γ eine Fläche in $\mathbb{R}^n$, entlang der wir ϕ vorschreiben. Sei $x_0 \in \Gamma$, und sei $x = x(s)$ die Charakteristik (genauer: der Träger der Charakteristik) durch x_0. Ist Γ nicht charakteristisch, so verläuft $x = x(s)$ nicht in Γ. Wir integrieren die letzte der Gleichungen (2.4), also

$$\dot{\phi} = \frac{1}{c(x)}$$

entlang $x = x(t)$ und erhalten

$$\phi(x_0, s) = \phi(x_0) + \int_0^s \frac{ds}{c(x(s))} \; .$$

Dies nehmen wir als den Wert von $\phi(x)$ in $x = x(s)$, also

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{c(x)} \ .$$

Dies ist nach II.2.2 die Lösung, jedenfalls lokal, der Anfangswertaufgabe. Die Integration ist zu erstrecken über die Charakteristik, welche x_0 mit x verbindet. Vergleich mit (2.5) zeigt, daß $\phi(x) - \phi(x_0)$ die Zeit ist, welche ein Signal von x_0 nach x benötigt.

Wenden wir uns nun der Bestimmung der v_j aus den Gleichungen

$$2\nabla v_j \cdot \nabla\phi + v_j\Delta\phi + \Delta v_{j-1} = 0 \tag{2.6}$$

mit $v_{-1} = 0$ zu. Dies sind gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung entlang der Charakteristiken. Denn ist D die Richtungsableitung entlang einer Charakteristik durch x, also

$$(Dv)(x) = \frac{d}{ds} v(x(s))\Big|_{s=0} = \nabla v(x) \cdot \dot{x}(0) = (\nabla v \cdot \nabla\phi)(x) \ ,$$

so lautet (2.6)

$$2Dv_j + v_j\Delta\phi + \Delta v_{j-1} = 0 \ .$$

Diese Gleichung können wir durch Integration entlang der Charakteristik lösen. Wir erhalten

$$v_j(x) = v_j(x_0) e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \Delta\phi ds} - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}\int_{x}^{y} \Delta\phi ds} \Delta v_{j-1}(y) ds(y) \ .$$

Hier sind überall Integrale entlang Charakteristiken gemeint.

Für $j = 0$ gibt es eine alternative Lösungsmethode, welche eine interessante geometrische Interpretation ermöglicht. Wir multiplizieren (2.6) für $j = 0$ mit v_0 und können dann

$$\operatorname{div}(v_0^2 \nabla\phi) = 0 \tag{2.7}$$

schreiben. Wir integrieren (2.7) über eine “ray tube” S in $\mathbb{R}^n$, welche von den Wellenfronten $\phi(x) = t_0$, $\phi(x) = t_1$ berandet wird und deren zylindrische Seitenwand S' von Strahlen (also Charakteristiken) gebildet wird. Der Rand von S besteht aus dieser zylindrischen Seitenwand und den auf den Wellenfronten gelegenen Boden S_0 und Deckel S_1, vgl. **Fig. 2.1**.

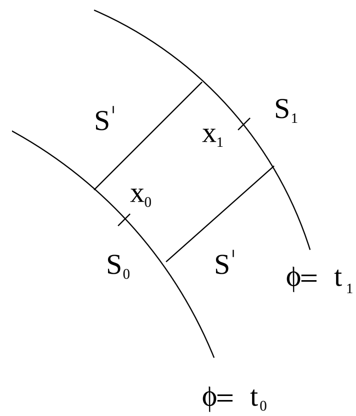


Fig. 2.1: Ray tube

Es ist dann

$$\int\limits_S \operatorname{div}(v_0^2 \nabla\phi) dx = 0$$

oder, nach dem Gauß'schen Integralsatz,

$$\int\limits_{\partial S} v_0^2 \nabla\phi \cdot \nu d\sigma = 0$$

mit der äußeren Normalen ν von S. Auf S' hat $\nabla\phi$ wegen (2.4) die Richtung der Charakteristiken, auf denen ν nach Konstruktion von S senkrecht steht. Also verschwinden die Integrale über S', und wir erhalten

$$\int\limits_{S_0} v_0^2 \nabla\phi \cdot \nu d\sigma + \int\limits_{S_1} v_0^2 \nabla\phi \cdot \nu d\sigma = 0 \ .$$

Auf S_0, S_1 steht $\nabla\phi$ senkrecht, hat also die Richtung $+\nu$ bzw. $-\nu$. Also ist dort

$$\nabla\phi \cdot \nu = \pm|\nabla\phi| = \pm\frac{1}{c} \ ,$$

wobei eines der Vorzeichen für S_0, das andere für S_1 gilt. Es folgt

$$\int\limits_{S_0} v_0^2 \ \frac{d\sigma}{c} = \int\limits_{S_1} v_0^2 \ \frac{d\sigma}{c} \ .$$

Nun lassen wir S_0 auf x_0 zusammenschrumpfen. Dann schrumpft S_1 auf x_1 zusammen, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2(x_1)}{v_0^2(x_0)} &= \frac{c(x_1)}{c(x_0)} I(x_0, x_1) && (2.8) \\ I(x_0, x_1) &= \lim_{|S_0| \to 0} \frac{|S_0|}{|S_1|} . && (2.9) \end{aligned}$$

$I(x_0, x_1)$ läßt sich aus ϕ berechnen. (2.8) gibt die Werte von v_0^2 auf der Wellenfront $\phi(x) = t_1$, wenn sie auf der Wellenfront $\phi(x) = t_0$ gegeben sind.

BEISPIELE:

1) c konstant, $\phi(x) = \frac{1}{c}\theta \cdot x$, $\theta \in S^{n-1}$.

Dann ist $\Delta\phi = 0$, $\nabla\phi = \frac{1}{c}\theta$ und damit $\partial v_0/\partial\theta = 0$. Damit ist $v_0(x) = f(x \cdot \theta^\perp)$ mit $\theta^\perp \perp \theta$ Lösung der Gleichung für v_0, und die entsprechende Näherung

$$v(x) = f(x \cdot \theta^\perp) e^{i\frac{\omega}{c}\theta \cdot x} .$$

2) c konstant, $\phi(x) = \frac{1}{c}|x|$. Dann ist

$$\frac{v_0^2(x_1)}{v_0^2(x_0)} = I(x_0, x_1) = \left(\frac{|x_0|}{|x_1|}\right)^{n-1}$$

und damit $v_0(x) = \alpha|x|^{\frac{1-n}{2}}$ Lösung der Differentialgleichung für v_0. Das kann man natürlich leicht nachrechnen. Für $n = 3$ bekommt man dann

$$v(x) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{|x|} ,$$

und dies ist die bekannte Grundlösung der Helmholtz-Gleichung.

3) $c(x) = x_2$ in $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$. Wir lösen zunächst die charakteristischen Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{p}{|p|} , \quad \dot{p} = \nabla(\frac{1}{c}) , \quad \dot{\phi} = \frac{1}{c}$$

oder die hierzu äquivalenten Euler'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{x_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/x_2^2 \end{pmatrix} = 0 .$$

Diese haben die Lösung

$$\begin{aligned} x_1 &= m + r\cos(t/r) \\ x_2 &= r\sin(t/r) \end{aligned}$$

mit Konstanten m, r. Die Charakteristiken sind also Halbkreise mit Mittelpunkten auf der x_1-Achse. Dies sind die Geraden der hyperbolischen Geometrie in der oberen Halbebene von $\mathbb{R}^2$.

5.3 Inverse Probleme hyperbolischer Differentialgleichungen

Wir betrachten das hyperbolische Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u \,, \qquad x \in \mathbb{R}^1 \,, \quad t > 0 \,, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = 0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x) \,.$$

Dabei ist δ die Dirac'sche δ-Funktion.

Bei vorgegebenem q ist diese Aufgabe eindeutig lösbar. Wir setzen q als gerade voraus, d.h. $q(-x) = q(x)$. Wir können das Problem dann auch in $x > 0$ betrachten mit der Randbedingung $\partial u/\partial x(0,t) = 0$.

Als inverses Problem bezeichnet man folgende Aufgabe: An Stelle von q ist die Funktion

$$g(t) = u(0,t) \,, \qquad t > 0 \tag{3.2}$$

gegeben. Man bestimme q!

Wir werden das inverse Problem zunächst näherungsweise (in der sogenannten Born'schen Näherung) lösen. Eine exakte Lösung folgt in §4.

Wir betrachten den Term $h = -q(x)u$ in (3.1) als Inhomogenität und können dann nach IV.5 u in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \delta(y)dy - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(y)u(y,\tau)dyd\tau \tag{3.3}$$

schreiben. Mit der Heaviside-Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$\int\limits_{x-t}^{x+t} \delta(y)dy = H(t - |x|) \,.$$

Damit erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|) + O(q) \ .$$

Dies ist eine Näherung für u, welche für kleines q sinnvoll ist. Die Born'sche Näherung erhält man nun dadurch, daß man diese Näherung in dem Integral in (3.3) verwendet und dann $x = 0$ setzt. Die entstandene Gleichung

$$g(t) = \frac{1}{2} H(t) - \frac{1}{4} \int\limits_0^t \int\limits_{-(t-\tau)}^{t-\tau} q(y) H(\tau - |y|) dy d\tau$$

ist dann bis auf $\mathrm{O}(q^2)$ erfüllt. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man

$$g(t) = \frac{1}{2} H(t) - \frac{1}{4} \int\limits_{-t/2}^{t/2} (t - 2|x|) q(x) dx \ .$$

Durch zweimalige Differentiation erhält man für $t > 0$

$$g''(t) = -\frac{1}{4}\ q\ (\frac{t}{2}) \ .$$

Damit ist q in der Born'schen Näherung bestimmt.

Das dreidimensionale Problem wird ganz entsprechend behandelt. Die Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - q(x) u \ , \qquad x \in \mathbb{R}^3 \ , \quad t > 0 \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x - x_0)$$

ist bei bekanntem q für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmt. Beim inversen Problem wollen wir q bestimmen aus der Kenntnis von

$$g(x_0, x_1, t) = u(x_1, t) \ , \qquad x_0 \in S_0 \ , \quad x_1 \in S_1 \tag{3.5}$$

mit gewissen Mengen S_0, $S_1 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Wieder mit IV.5 können wir (3.4) in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-y|=t} \frac{\delta(y - x_0)}{|x - y|}\ d\sigma(y) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-y|\le t} \frac{q(y) u(y, t - |y - x|)}{|x - y|}\ dy$$

schreiben. Unter Verwendung von

$$\int\limits_{|x-y|=t} \delta(y-x_0)d\sigma(y) = \delta(t-|x_0-x|)$$

erhalten wir in der Born-Approximation

$$g(x_0,x_1,t) = \frac{1}{4\pi t}\delta(t-|x_0-x_1|) - \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_{|x_1-y|\le t} \frac{q(y)\delta(t-|y-x_1|-|y-x_0|)}{|x_1-y|(t-|y-x_1|)} dy \ .$$

Mit Hilfe der Formel

$$\int f(y)\delta(\phi(y))dy = \int\limits_{\phi(y)=0} f(y)\,\frac{d\sigma(y)}{|\nabla\phi(y)|}$$

für $\phi(y) = t - |y-x_1| - |y-x_0|$ erhalten wir für $t > 0$

$$g(x_0,x_1,t) = \frac{1}{4\pi t}\delta(t-|x_0-x_1|) - \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_{E_t(x_0,x_1)} K(y-x_0, y-x_1)q(y)d\sigma(y) \ , \tag{3.6}$$

wo $E_t(x_0,x_1)$ das Ellipsoid $|y-x_0| + |y-x_1| = t$ und K die Funktion

$$K(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{|u|^2|v|^2 + |u||v|uv}}$$

bedeuten. Die Auflösung von (3.6) nach q ist ein Problem der Integralgeometrie. Dort behandelt man die Berechnung von Funktionen in $\mathbb{R}^n$ aus Integralen über Mannigfaltigkeiten der Dimension $< n$.

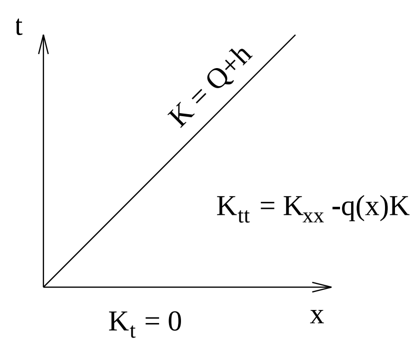
5.4 Die Gelfand-Levitan-Methode

Wir wollen nun eine exakte Lösung des eindimensionalen hyperbolischen inversen Problems aus S3 geben. Dazu betrachten wir das Hilfsproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u \quad , \quad 0 < x < \infty \, , \quad -\infty < t < \infty \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + hu(0,t) &= 0 \quad , \quad -\infty < t < \infty \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit einer Konstanten h.

Satz 4.1: Sei $u^0 \in C^2((0,\infty) \times (-\infty,\infty)) \cap C^0([0,\infty) \times (-\infty,\infty))$ eine beliebige Lösung von (4.1) mit $q = 0$, $h = 0$. Sei K die Lösung von



mit $Q(x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^x q(y)dy$. Dann ist

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \int\limits_0^x K(x,y)u^0(y,t)dy \tag{4.2}$$

Lösung von (4.1) mit $u(0,t) = u^0(0,t)$.

Bemerkungen:

1) Es ist natürlich

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}(u^0(0,t+x) + u^0(0,t-x)) \tag{4.3}$$

2) Kennt man K, so ist auch

$$q = 2\frac{d}{dx}K(x,x) \tag{4.4}$$

bekannt.

3) K ist als Lösung der gemischten Anfangswertaufgabe (vgl. IV.6) eindeutig bestimmt.

Beweis: Der Beweis geschieht einfach durch Verifizieren. Für $x = 0$ ist natürlich $u = u^0$. Partielle Ableitung nach x ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial u^0}{\partial x}(x,t) + K(x,x)u^0(x,t) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x,y)u^0(y,t)dy\ .$$

Für $x = 0$ ist $\partial u^0/\partial x = 0$ und $K(0,0) = h$, also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = hu^0(0,t) = hu(0,t)\ .$$

Also ist auch die Randbedingung entlang $x = 0$ erfüllt. Weiteres Differenzieren nach x liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}(x,t) + \frac{d}{dx}(K(x,x)u^0(x,t)) \\ &+ \frac{\partial K}{\partial x}(x,x)u^0(x,t) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y)u^0(y,t)dy\ .\end{aligned} \tag{4.5}$$

Die zweite partielle Ableitung nach t, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}(x,t) + \int\limits_0^x K(x,y)\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}(y,t)dy \\ &= \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}(x,t) + \int\limits_0^x K(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}u^0(y,t)dy\end{aligned}$$

wird durch partielle Integration umgeformt zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}(x,t) &+ \left[K(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u^0(y,t) - \frac{\partial K}{\partial y}(x,y)u^0(y,t)\right]_0^x \\ &+ \int\limits_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y)u^0(y,t)dy\ .\end{aligned} \tag{4.6}$$

Setzt man (4.2), (4.5-6) in die Differentialgleichung aus (4.1) ein, so heben sich zunächst einmal alle Integrale wegen der Differentialgleichung für K weg. Der Rest ist

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}(x,t) + \left[K(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u^0(y,t) - \frac{\partial K}{\partial y}(x,y)u^0(y,t)\right]_0^x \\ =\ &\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}(x,t) + \frac{d}{dx}(K(x,x)u^0(x,t)) \\ &\qquad + \frac{\partial K}{\partial x}(x,x)u^0(x,t) - q(x)u^0(x,t)\ .\end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften von K ist dies eine Identität.

$\square$

Bei der Gelfand-Levitan-Methode bestimmt man aus der Funktion $g(t)$ zunächst einmal K und dann q nach (4.4). K wird aus der (linearen) Gelfand-Levitan-Integralgleichung bestimmt. Diese gewinnt man wie folgt. Die Lösung u von (3.1) wird als in t ungerade Funktion auf $(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)$ fortgesetzt. Dadurch wird u zu einer Lösung von (4.1) (mit $h=0$). Also gilt (4.2) mit

$u^0(0,t) = g(t)$. Für $|t| < x$ is $u(x,t) = 0$. Also gilt für $|t| < x$

$$0 = \frac{1}{2}(g(t+x) + g(t-x)) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} K(x,y)g(t+y)dy \; . \tag{4.7}$$

Dies ist für jedes x eine Integralgleichung 1. Art für die Funktion $K(x,\,\cdot\,)$ in $[-x,+x]$. (4.7) ist die Integralgleichung von Gelfand-Levitan.

1 Ältere Werke

- **Bieberbach, L.:** Differentialgleichungen.
  Springer 1930.
- **Duff, G.F.D.:** Partial Differential Equations.
  University of Toronto Press 1956.
- **Garabedian, P.R.:** Partial Differential Equations.
  Wiley 1964.
- **Kamke, E.:** Differentialgleichungen II.
  Akademische Verlagsgesellschaft 1962.
- **Kamke, E.:** Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen II.
  Akademische Verlagsgesellschaft 1965.

2 Lehrbücher

- **Courant, R. - Hilbert, D.:** Methoden der mathematischen Physik.
  Springer.
- **Evans, L.C.:** Partielle Differentialgleichungen.
  AMS 1998.
- **Guenther, R.B. and Lee, J.W.:** Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations.
  Prentice Hall 1998, Dover 1996.
- **Hellwig, G.:** Partial Differential Equations.
  Teubner.
- **Hackbusch, W.:** Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.
  Teubner 1986.
- **John, F.:** Partial Differential Equations. 4. Auflage,
  Springer 1991.
- **Jost, J.:** Partielle Differentialgleichungen.
  Springer 1998.

- **Leis, R.:** Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
  Bibliographisches Institut Mannheim, 1967.
- **Meister, E.:** Partielle Differentialgleichungen.
- **Michlin, S.G.:** Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik.
  Harri Deutsch Thun, 1978.
- **Ockendon, J. et al.:** Applied Partial Differential Equations.
  Oxford University Press 1999.
- **Renardy, M. - Rogers, R.C.:** An Introduction to Partial Differential Equations.
  Springer 1992.
- **Smirnow, W.I.:** Lehrgang der höheren Mathematik, Band IV.2.
  VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- **Tychonoff, A.N. - Samarski, A.A.:** Differentialgleichungen der mathematischen Physik.
  VEB Verlag der Wissenschaften 1959.
- **Zauderer, E.:** Partial Differential Equations of Applied Mathematics.
  Wiley Interscience 1989.

3 Moderne Darstellungen

- **Hörmander, L.:** Linear Partial Differential Operators.
  Springer, mehrere Auflagen seit 1963.
- **Hörmander, L.:** The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. I-IV.
  Springer, 1983-84.
- **Lions, J.L. - Magenes, E.:** Problemès aux limites non homogenènes et application, 3 volumes.
  Dunod 1968.
- **Mizohata, S.:** The Theory of Partial Differential Equations. At the University Press, 1973.

- **Rauch, J.:** Partial Differential Equations. Springer 1991.
- **Treves, F.:** Basic Linear Partial Differential Equations.
  Academic Press 1975.
- **Wloka, J.:** Partielle Differentialgleichungen.
  Teubner 1982.